Capitolo 13 (Integrazione a unità 55-57)

Dati e previsioni

Nota bene. I primi 8 quesiti a risposta chiusa ed i primi 7 a risposta aperta riguardano il calcolo combinatorio.

13. 1 Quesiti a risposta chiusa.

13. 1. 1 Quanti numeri di tre cifre distinte si possono formare con le cifre 1, 2, 3, 4, 5?
[A] 10. [B] 20. [C] 40. [D] 60.

13. 1. 2 Quanti sono i sottoinsiemi dell'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ formati da tre elementi?
[A] 10. [B] 20. [C] 40. [D] 60.

13. 1. 3 Una delle seguenti proposizioni è falsa. Quale?
[A] Il numero 25! è divisibile per 26.
[B] Il numero 26! è divisibile per 27.
[C] Il numero 27! è divisibile per 28.
[D] Il numero 28! è divisibile per 29.

13. 1. 4 Ad una gara di atletica partecipano 8 concorrenti, ma solo i primi 3 di essi saranno premiati. Quante sono le possibili graduatorie dei premiati?
[A] 8! . [B] $D_{8,3}$. [C] $\binom{8}{3}$. [D] 3! .

13. 1. 5 Una classe è formata da 18 ragazze e 8 ragazzi. Tra le ragazze vi sono 2 "Elisa". Si deve formare una delegazione composta da 2 ragazze ed un ragazzo. Quante delegazioni comprendono almeno una "Elisa"?
[A] 256. [B] 264. [C] 272. [D] Un numero diverso.

13. 1. 6 Attorno ad un tavolo sono disposte n sedie. Sia H il numero dei modi in cui n persone possono sistemarsi sulle sedie e sia K il numero in cui possono sistemarsi n−1 persone. Quale relazione sussiste fra H e K?
[A] H=K. [B] H>K. [C] H<K. [D] Non si può sapere.

13. 1. 7 Sia a il numero dei modi in cui n oggetti distinti (con n>3) possono essere suddivisi in raggruppamenti di 3 oggetti distinti e sia b il numero dei modi in cui gli n oggetti possono essere suddivisi in raggruppamenti di n−3 oggetti distinti. Quale relazione sussiste fra a e b?
[A] a=b. [B] a>b. [C] a<b. [D] Non si può sapere.

13. 1. 8 Quante sono le possibili funzioni dell'insieme $\{1,2,3\}$ nell'insieme $\{x,y\}$?
[A] 5. [B] 6. [C] 8. [D] 9.

13. 1. 9 Si consideri la variabile statistica: $X=\begin{bmatrix} a & b \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, dove a, b sono parametri reali, con $a \neq b$. Indicata con $M(X)$ la sua media e con $M(X^2)$ la media della variabile statistica X^2, risulta che:
[A] $[M(X)]^2 > M(X^2)$; [B] $[M(X)]^2 = M(X^2)$;
[C] $[M(X)]^2 < M(X^2)$; [D] nessuna delle tre relazioni è certa.

13. 1. 10 Siano X ed Y due variabili statistiche e sia lineare la regressione di Y su X. Si indichi con r la retta di regressione di Y su X. Di che tipo è la regressione di X su Y?
[A] È lineare e la retta di regressione di X su Y coincide con r.
[B] È lineare ma la retta di regressione è distinta da r.
[C] Non è lineare.
[D] Non è possibile stabilirlo con certezza senza conoscere le due variabili statistiche.

13. 1. 11 Posto che x_i ed y_i (con i=1,2,…,n) siano n determinazioni delle due variabili statistiche X ed Y rispettivamente, cos'è il baricentro della "nuvola" di punti (x_i, y_i) rappresentati in un piano cartesiano?
[A] È il punto medio del segmento avente per estremi i punti (x_1, y_1) e (x_n, y_n).
[B] È il centro della circonferenza passante per i tre punti più esterni della "nuvola".
[C] È il baricentro del triangolo avente per vertici i tre punti più esterni della "nuvola".
[D] Nessuna delle tre.

13. 1. 12 In due urne, U_1 e U_2, sono poste 3 palline, di cui 2 bianche ed 1 nera, in uno dei seguenti modi:
a) le 3 palline nell'urna U_1 e nessuna nell'urna U_2.
b) 2 palline bianche nell'urna U_1 e la pallina nera nell'urna U_2;
c) 1 pallina bianca nell'urna U_1 e le altre nell'urna U_2.
Si sceglie a caso un'urna e da essa si estrae a caso una pallina. Sia p_a la probabilità che sia bianca nel caso a), p_b quella che sia bianca nel caso b) e p_c quella che lo sia nel caso c). Risulta:
[A] $p_a<p_b<p_c$; [B] $p_b<p_c<p_a$; [C] $p_c<p_b<p_a$; [D] nessuna delle tre.

13. 1. 13 Durante una festa paesana Tizio, con un fantasmagorico cappello in testa, sta facendo questo gioco. Fa vedere tre cartoncini uguali in tutto fuorché nel colore: uno è rosso su entrambe le facce, uno è nero su entrambe le facce, uno è rosso su una faccia e nero sull'altra. Infila i tre cartoncini in una busta e ne fa estrarre uno a caso da uno spettatore in modo però che del cartoncino estratto si veda solo una faccia. La faccia visibile è rossa. Tizio scommette alla pari che anche l'altra faccia è rossa.
[A] Il gioco è equo giacché Tizio ha la stessa probabilità di vincere che di perdere.
[B] Il gioco non è equo e Tizio ha più probabilità di vincere che di perdere.
[C] Il gioco non è equo e Tizio ha più probabilità di perdere che di vincere.
[D] Gli elementi dati non sono sufficienti per concludere alcunché sull'equità del gioco.

13. 1. 14 Si lanciano due dadi con le facce numerate da "1" a "6", aventi le stesse probabilità di uscire. Tra i due numeri usciti compare il "2". Qual è la probabilità che la somma dei due numeri usciti sia 7 ?
[A] $\frac{2}{23}$. [B] $\frac{1}{6}$. [C] $\frac{2}{11}$. [D] $\frac{1}{3}$.

13. 2 Quesiti a risposta aperta.

13. 2. 1 Calcolare la probabilità di indovinare un "ambo" al gioco del Lotto, giocando sulla Ruota di Napoli.

13.2.2 Considerato l'insieme A={1,2}, quante sono le possibili funzioni di A in A? Quali sono? Quante sono, fra esse, le funzioni biiettive? Quali sono?

13.2.3 Spiegare, senza usare strumenti di calcolo automatico, se il numero 35!+1 è divisibile o no per qualcuno dei numeri 10, 26, 32.

13.2.4 Calcolare nel modo più rapido possibile, ma senza usare strumenti di calcolo automatico, il valore della seguente espressione:

$$\binom{9}{0}+\binom{9}{1}+\binom{9}{2}+\binom{9}{3}+\binom{9}{4}+\binom{9}{5}+\binom{9}{6}+\binom{9}{7}+\binom{9}{8}+\binom{9}{9}\ .$$

13.2.5 Andrea e Giuseppe decidono di giocare a "testa-croce" con una moneta perfettamente bilanciata. Andrea segna un punto se in un lancio esce "testa", Andrea lo segna se esce "croce". Puntano € 100 ciascuno e vince tutto chi arriva per primo a segnare 100 punti. Ma quando Andrea ha segnato 99 punti e Giuseppe ne ha segnati 97, per cause di forza maggiore sono costretti a interrompere il gioco. Come devono ripartire l'intera posta di € 200, ammesso che il gioco sia equo?

13.2.6 Si lanciano tre dadi con le facce numerate da "1" a "6". Compilare una tabella che descriva la distribuzione delle somme ottenute sulle tre facce.

13.2.7 Se si prende in esame la serie dei numeri naturali, si può constatare che esistono sequenze di numeri composti formate da 1, 3, 5, 7, … numeri composti che non sono interrotte dalla presenza di numeri primi [(1)]. Ad esempio, una sequenza di 5 numeri composti è questa: 24-25-26-27-28. Una sequenza di 13 numeri composti è questa: 114-115-116-117-118-119-120-121-122-123-124-125-126.
Sei in grado di dimostrare che, comunque si fissi un numero narurale n, non nullo, esiste una sequenza di almeno n numeri composti?

13.2.8 Si consideri la variabile statistica $X=\begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, dove a, b sono parametri reali, con a≠b. Dopo aver rappresentato le distribuzioni delle frequenze assolute delle variabili X^2 ed XX, stabilire se le loro medie sono uguali o diverse.

13.2.9 Si considerino le due variabili statistiche X ed Y rappresentate nelle tabelle sottostanti assieme alle loro frequenze assolute N_X ed N_Y.

X	1	3	4	5
N_X	4	3	3	2

Y	2	3	5	6
N_Y	3	5	2	4

Qual è la distribuzione delle frequenze assolute della variabile statistica $Z=\frac{X+Y}{2}$?

13.2.10 Considerate le medesime variabili statistiche del quesito precedente, trovare la loro distribuzione congiunta e le loro distribuzioni marginali.

[1] In realtà, a parte la coppia 2-3, fra due qualsiasi numeri primi può essere compreso soltanto un numero dispari di numeri composti.

13. 2. 11 Delle variabili statistiche A e B si sono ottenute le determinazioni rappresentate nelle tabelle sottostanti assieme alle loro frequenze assolute N_A ed N_B.

A	1	2	3	4		B	1	2	3	4
N_A	2	4	3	2		N_B	3	4	2	4

Determinare la distribuzione delle frequenze relative della variabile statistica C=max(A,B).

13. 2. 12 Delle variabili statistiche X ed Y sono stati rilevati i 10 valori sintetizzati nella tabella sottostante.

X	2	2	3	4	4	5	6	6	7	8
Y	30	40	25	45	60	40	30	55	50	70

Fornire una rappresentazione grafica della dispersione dei dati rilevati. Quindi, mediante uno strumento di calcolo automatico, calcolare il coefficiente di correlazione di Bravais-Pearson. Di che tipo di correlazione si tratta?

13. 2. 13 Considerate le medesime variabili statistiche X ed Y del quesito precedente, calcolare, ancora mediante uno strumento di calcolo automatico, l'equazione della retta di regressione di Y su X. Si tratta di una regressione lineare?

13. 2. 14 Con riferimento alle stesse urne U_1 e U_2, considerate nel quesito n. 8.1.12 ed alla medesima composizione, si sceglie a caso un'urna e da essa una pallina: si constata che è bianca. Calcolare quanto vale la probabilità che provenga dall'urna U_1 in ciascuno dei tre casi a), b), c).

13. 2. 15 Tre sacchetti contengono monete di tre valori diversi, secondo la distribuzione sintetizzata nella tabella sottostante.

	A	B	C
€ 2	6	5	7
€ 1	7	6	3
€ 0,5	2	8	6

Si sceglie a caso un sacchetto e in esso si pesca a caso una moneta: risulta essere da € 2. Qual è la probabilità che provenga dal sacchetto A? Quale quella che provenga da B? Quale da C? Quanto vale la somma di queste tre probabilità?

13. 2. 16 In un'urna sono contenute 3 palline: si sa che una è bianca ed una è nera, mentre della terza non si conosce il colore ma si sa che è bianca o nera. Si estraggono a caso due palline dall'urna e si constata che sono di colore diverso. Qual è la probabilità che la pallina rimasta nell'urna sia nera?

13. 2. 17 In un'urna sono contenute 3 palline: si sa che una è bianca, mentre delle altre due non si conosce il colore ma si sa che ciascuna di esse è bianca o nera. Si estraggono a caso due palline dall'urna e si constata che sono entrambe bianche. Qual è la probabilità che anche la pallina rimasta nell'urna sia bianca?

13. 3 Risposte commentate: quesiti a risposta chiusa.

Quesito 13. 1. 1. I numeri sono tanti quante le disposizioni semplici di 5 oggetti presi a 3 a 3, vale a dire $D_{5,3}$ e perciò sono in numero di $5\times4\times3=60$. [D] è l'alternativa corretta.

Quesito 13. 1. 2. I sottoinsiemi cercati sono tanti quante le combinazioni semplici di 5 oggetti presi a 3 a 3, vale a dire $C_{5,3}$ e perciò in numero di $\frac{5\times4\times3}{2\times3}=10$. [D] è l'alternativa corretta.

Quesito 13. 1. 3. Nello sviluppo di 25! ci sono i fattori 2 e 13, per cui 25! è divisibile per 26. Parimenti nello sviluppo di 26! ci sono i fattori 3 e 9, per cui 26! è divisibile per 27 e, allo stesso modo, nello sviluppo di 27! ci sono i fattori 2 e 14, per cui 27! è divisibile per 28. Invece nello sviluppo di 28! non ci può essere 29, che è un numero primo maggiore di 28, che l'ultimo fattore dello sviluppo suddetto. Quindi 28! non è divisibile per 29. [D] è l'alternativa corretta.

Quesito 13. 1. 4. Le possibili graduatorie dei premiati sono tante quanti i modi di disporre 8 oggetti distinti a 3 a 3, vale a dire $D_{8,3}$ e cioè $8\times7\times6=336$. [B] è l'alternativa corretta.

Quesito 13. 1. 5. Il numero delle delegazioni è dato dal numero delle delegazioni di ragazze con almeno una "Elisa" per il numero delle delegazioni di ragazzi. Quest'ultimo è chiaramente 8, cioè tante delegazioni quanti sono i ragazzi. Il numero delle delegazioni di ragazze, comprendenti almeno una "Elisa" è così formato:

- la delegazione {Elisa1, Elisa2} formata dalle due "Elisa",
- le 16 delegazioni {Elisa1, F} formate da una "Elisa" e da una delle 16 ragazze che non si chiamano "Elisa";
- le 16 delegazioni {Elisa2, F} formate dall'altra "Elisa" e da una delle 16 ragazze che non si chiamano "Elisa".

In tutto ci sono 33 delegazioni di ragazze con almeno una "Elisa".
Il numero delle delegazioni richiesto è allora $33\times8=264$. [B] è l'alternativa corretta.

Quesito 13. 1. 6. Il numero dei modi in cui m persone possono disporsi su n sedie è $D_{n,m}$. Nei casi in esame:

- quando $m=n$: $H=D_{n,n}=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1$,
- quando $m=n-1$: $K=D_{n,\,n-1}=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot3\cdot2$.

Pertanto $H=K$. [A] è l'alternativa corretta.

Quesito 13. 1. 7. Il numero dei modi in cui n oggetti distinti possono essere suddivisi in raggruppamenti di k oggetti distinti non è altro che il numero delle combinazioni semplici di n oggetti presi a k a k, vale a dire $\binom{n}{k}$. Risulta perciò: $a=\binom{n}{3}$ e $b=\binom{n}{n-3}$.
D'altro canto, qualunque sia $k\le n$, è $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$, per cui è $a=b$. [A] è l'alternativa corretta.

Quesito 13. 1. 8. Il numero delle funzioni dell'insieme {1,2,3} nell'insieme {x,y} è uguale al numero delle disposizioni con ripetizione di 2 oggetti distinti presi a 3 a 3, vale a dire 2^3 e perciò sono in numero di 8. [C] è l'alternativa corretta.

A titolo di esempio, indichiamo i grafici di due di tali funzioni:

$$G_1=\{(1,x),(2,x),(3,x)\},\quad G_2=\{1,x\},(2,x),(3,y).$$

Chi legge provi a scrivere i grafici delle altre 6 funzioni.

Quesito 13. 1. 9. Intanto si ha: $M(X)=\frac{2a+2b}{4}=\frac{a+b}{2}$, perciò: $[M(X)]^2=\frac{(a+b)^2}{4}$.

Siccome $X^2=\begin{bmatrix} a^2 & b^2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, risulta: $M(X^2)=\frac{2a^2+2b^2}{4}=\frac{a^2+b^2}{2}$.

Per cui: $[M(X)]^2-M(X^2)=\frac{(a+b)^2}{4}-\frac{a^2+b^2}{2}=-\frac{(a-b)^2}{4}$.

Poiché $a\neq b$, se ne desume che $[M(X)]^2<M(X^2)$ e la differenza è tanto maggiore quanto più a è diverso da b. [C] è l'alternativa corretta.

Quesito 13. 1. 10. [A] è l'alternativa corretta.

Quesito 13. 1. 11. Il baricentro della "nuvola" di punti è il punto intersezione della retta di regressione di Y su X con la retta di regressione di X su Y. [D] è l'alternativa corretta.

Quesito 13. 1. 12. Si calcola abbastanza agevolmente che: $p_a=\frac{1}{3}$, $p_b=\frac{1}{2}$, $p_c=\frac{3}{4}$. Si ha pertanto: $p_a<p_b<p_c$. [A] è l'alternativa corretta.

Quesito 13. 1. 13. Si può ricorrere al teorema di Bayes. Al riguardo visualizziamo la situazione mediante il grafo sottostante (Fig. 13.1), indicando con RR il cartoncino avente entrambe le facce rosse, con NN quello che le ha entrambe nere e con RN quello con le facce di colore diverso.

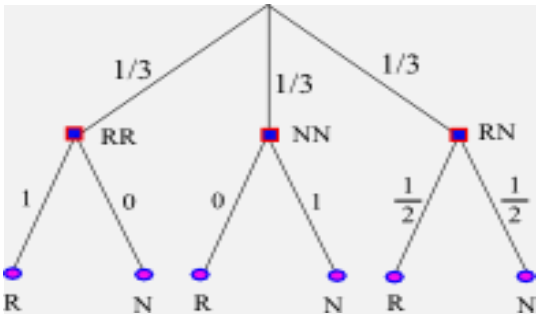

Fig. 13.1

Pertanto, la probabilità che la faccia non visibile sia rossa, sapendo che quella visibile è rossa, è, per il teorema di Bayes:

$$p(RR|Rossa)=\frac{p(Rossa|RR)\cdot p(RR)}{p(Rossa)}=\frac{1\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}.$$

Il gioco non è equo ma sbilanciato a favore di Tizio. L'alternativa corretta è [B].

In realtà, il ricorso al teorema di Bayes nel caso specifico è un tantino esagerato. Il problema si risolve, infatti, con considerazioni elementari.

Se la faccia visibile è rossa i casi possibili, tenendo presente che la carta di colore rosso su entrambe le facce ne ammette due, e precisamente ($Rosso_A$-$Rosso_B$, $Rosso_B$-$Rosso_A$), sono i seguenti: $Rosso_A$-$Rosso_B$, $Rosso_B$-$Rosso_A$, Rosso-Nero.

Dunque la probabilità che la seconda faccia sia rossa è $2/3$. Come sopra.

Quesito 13. 1. 14. Incominciamo ad osservare che di coppie di numeri, la cui somma è 7, ce ne sono 6 sulle 36 possibili: (1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3). In 2 di esse c'è il numero "2". Invece di coppie di numeri, la cui somma non è 7, ce ne sono 30 ed in 9 di esse c'è il numero "2". Consideriamo allora i seguenti eventi:
E = «c'è il numero "2" fra i due numeri usciti»; S7 = «la somma dei due numeri usciti è 7».
Ebbene, in virtù della formula di Bayes, la probabilità che la somma dei due numeri usciti sia 7, sapendo che fra i due numeri c'è il "2", è:

$$\mathrm{p}(\mathrm{S7}|\mathrm{E}) = \frac{\mathrm{p}(\mathrm{E}|\mathrm{S7}) \cdot \mathrm{p}(\mathrm{S7})}{\mathrm{p}(\mathrm{E}|\mathrm{S7}) \cdot \mathrm{p}(\mathrm{S7}) + \mathrm{p}\left(\mathrm{E}|\overline{\mathrm{S7}}\right) \cdot \mathrm{p}\left(\overline{\mathrm{S7}}\right)} = \frac{\frac{2}{6} \cdot \frac{6}{36}}{\frac{2}{6} \cdot \frac{6}{36} + \frac{9}{30} \cdot \frac{30}{36}} = \frac{2}{11}.$$

[C] è l'alternativa corretta.

13. 4 Risposte commentate: quesiti a risposta aperta.

Quesito 13. 2. 1. Possiamo seguire due procedimenti: uno con il coivolgimento del calcolo combinatorio, un altro senza. Occupiamoci del primo procedimento.
L'evento E: «esce un ambo prefissato» si realizza quando, sui 5 numeri estratti fra i 90 possibili, vi sono i due numeri giocati. Ora, i casi possibili sono tanti quante le cinquine che si possono formare con i 90 numeri, ossia tanti quante le combinazioni semplici di 90 oggetti presi a 5 a 5, vale a dire:

$$\binom{90}{5} = \frac{90!}{5!\,85!}.$$

Dovendo calcolare poi quante, fra queste cinquine, contengono l'ambo prefissato, ragioniamo così: eliminiamo dai 90 numeri complessivi i 2 che formano l'ambo; se combiniamo gli 88 numeri rimanenti a 3 a 3 e ad ogni terna ottenuta associamo l'ambo predetto, otteniamo esattamente tutte le cinquine che contengono per l'appunto quell'ambo. Dunque i casi favorevoli ad E sono in numero di:

$$\binom{88}{3} = \frac{88!}{3!\,85!}.$$

In definitiva:

$$\mathrm{p}(\mathrm{E}) = \frac{\binom{88}{3}}{\binom{90}{5}} = \frac{\frac{88!}{3!\,85!}}{\frac{90!}{5!\,85!}} = \frac{5 \cdot 4}{90 \cdot 89} = \frac{2}{801}.$$

Occupiamoci adesso del procedimento che non coinvolge il calcolo combinatorio. A questo proposito si ricorda che l'ambo sarà stato azzeccato se i due numeri giocati sono compresi fra i cinque estratti sulla "ruota" del Lotto su cui si è scommesso. Ora, la probabilità che sia stato indovinato uno dei due numeri è $\frac{5}{90}$; la probabilità che, azzeccato questo numero, sia stato indovinato il numero rimanente è $\frac{4}{89}$. Pertanto la probabilità di azzeccare il terno è:

$$\mathrm{p}(\mathrm{E}) = \frac{5}{90} \cdot \frac{4}{89} = \frac{2}{801}.$$

Esattamente come sopra, ovviamente.

Quesito 13. 2. 2. Considerato l'insieme A={1,2}, le possibili funzioni di A in A sono in numero di 2^2, cioè 4. Sono le funzioni che possiamo rappresentare nei modi seguenti:

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 2\end{bmatrix}.$$

Di esse solo le prime due sono biiettive.

Quesito 13. 2. 3. In realtà, il numero 35!+1 non è divisibile per alcuno dei numeri compresi fra 2 e 35 inclusi, giacché il resto della sua divisione per ciascuno di questi numeri è sempre 1.

Quesito 13. 2. 4. Basta tener presente lo sviluppo del binomio di Newton, in cui a=b=1 ed n=9, per concludere che si ha:

$$\binom{9}{0}+\binom{9}{1}+\binom{9}{2}+\binom{9}{3}+\binom{9}{4}+\binom{9}{5}+\binom{9}{6}+\binom{9}{7}+\binom{9}{8}+\binom{9}{9}=2^9=512.$$

Quesito 13. 2. 5. Bisogna calcolare qual è la probabilità di Andrea di giungere per primo a 100 punti e quale quella di Giuseppe. Ora, è fuor di dubbio che si sarebbe deciso tutto in capo a tre partite. Gli esiti possibili sono pertanto 2^3 e sono i seguenti, dove il nome dei giocatori indica l'assegnazione del punto a lui:

1) Andrea-Andrea-Andrea; 2) Andrea-Andrea-Giuseppe;
3) Andrea-Giuseppe-Andrea; 4) Giuseppe-Andrea-Andrea;
5) Andrea-Giuseppe-Giuseppe; 6) Giuseppe-Andrea-Giuseppe;
7) Giuseppe-Giuseppe-Andrea; 8) Giuseppe-Giuseppe-Giuseppe.

Nei primi 7 casi Andrea giunge per primo a quota 100 punti (in realtà, nei primi 6 non occorre neppure giocare tutte e tre le partite). Nell'ultimo caso Giuseppe arriva per primo a quota 100 punti. Sicché Andrea ha probabilità 7/8 di aggiudicarsi l'intera posta e Giuseppe ha probabilità 1/8. Ne consegue che l'intera posta di € 200 va suddivisa in 8 parti uguali, di cui 7, cioè € 175, vanno ad Andrea ed una, cioè € 25, va a Giuseppe.

Quesito 13. 2. 6. Si tratta di ripetere lo stesso procedimento, attribuito a Galileo Galilei,(2), per calcolare quante volte si presenta nei tre lanci la somma "9" e quante volte la somma "10". Si ottiene la seguente tabella:

somma punti sulle tre facce	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
numero volte in cui si presenta	1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1

Quesito 13. 2. 7. Fissato un numero naturale n>0, prendiamo in esame questa successione di numeri: (n+1)!+2, (n+1)!+3, (n+1)!+4, … , (n+1)!+(n+1).
È formata da n numeri naturali consecutivi, dei quali il primo è certamente divisibile per 2, il secondo per 3, il terzo per 4, e così via fino all'n-esimo, che è divisibile per n+1. Quindi si tratta di numeri composti. Insomma è la sequenza che si cercava.
Intendiamoci, questo non significa che sia l'unica, come non significa che il numero (n+1)!+1 che la precede sia primo e così pure che sia primo il numero (n+1)!+(n+2) che la segue.

[2] Cfr.: Unità 15: Dati e previsioni, un po' di storia, N° 15.2.1.

Quesito 13.2.8. Si ha: $X^2 = \begin{bmatrix} a^2 & b^2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $XX = \begin{bmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}$, per cui:

$$M(X^2)=\frac{a^2+b^2}{3}\ ,\quad M(XX)=\frac{a^2+4ab+4b^2}{9}\ .$$

Evidentemente $M(X^2)\neq M(XX)$. In realtà, questo vale per ogni variabile statistica X, mentre risulta sempre $[M(X)]^2=M(XX)$.

Quesito 13.2.9. La distribuzione delle frequenze assolute della variabile statistica Z è rappresentata nella tabella sottostante.

Z	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5
N_Z	12	20	9	32	37	16	18	16	8

Quesito 13.2.10. La distribuzione congiunta e le distribuzioni marginali delle due variabili statistiche in esame sono rappresentate nella tabella sottostante.

X Y	1	3	4	5	distribuzione marginale di Y
2	4×3	3×3	3×3	2×3	36
3	4×5	3×5	3×5	2×5	60
5	4×2	3×2	3×2	2×2	24
6	4×4	3×4	3×4	2×4	48
distr. marg. di X	56	42	42	28	***

Quesito 13.2.11. La distribuzione delle frequenze relative della variabile statistica C è rappresentata nella tabella sottostante.

C	1	2	3	4
f_C	0,0419	0,2517	0,2728	0,4336

Quesito 13.2.12. Un rappresentazione grafica è quella della figura sottostante (Fig. 13.2).
Il coefficiente di correlazione di Bravais-Pearson è:

$$r=\frac{p-n\ m_x\ m_y}{n\ \sigma_x\ \sigma_y}\ ,$$

dove il significato dei simboli è noto. Si calcola che:

$$n=10;\ p=2255;\ m_x=4{,}7;\ m_y=44{,}5;\ \sigma_x\approx 2{,}05750;\ \sigma_y\approx 14{,}42413;$$

per cui: $r \approx 0{,}55$. Si tratta perciò di una correlazione diretta.

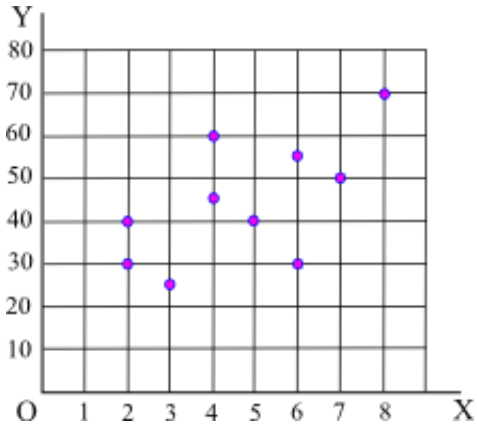

Fig. 13.2

Quesito 13. 2. 13. La retta di regressione di Y su X ha equazione y=ax+b, dove:

$$a=r\,\frac{\sigma_y}{\sigma_x} \quad \text{e} \quad b=m_y-a\,m_x\,.$$

Siccome: a≈3,86; b≈26,34 l'equazione della retta di regressione è:

$$y = 3{,}86\,x + 26{,}34.$$

La figura precedente può essere integrata da questa retta (Fig. 13.3). È evidente che non si può parlare di "regressione lineare", dal momento che i punti della "nuvola" sono mediamente molto discosti dalla retta di regressione.

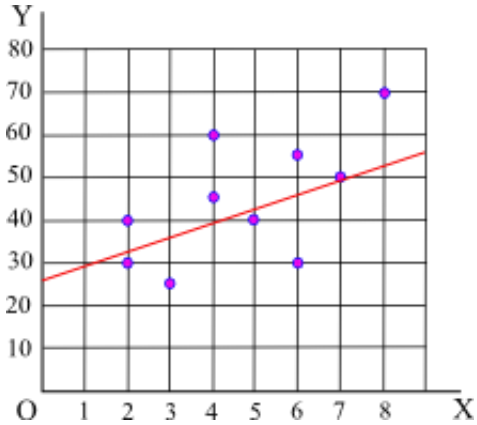

Fig. 13.3

Il lettore, se vuole, può completare la risoluzione determinando la retta di regressione di X su Y e il baricentro della nuvola di punti e integrando ulteriormente la figura.

Quesito 13. 2. 14. Nei casi a) e b), nei quali soltanto nell'urna U_1 vi sono palline bianche mentre nell'urna U_2 non ve ne sono, la probabilità che la pallina estratta (che si sa essere bianca) provenga dall'urna U_1 è ovviamente 1, senza tanti fronzoli.
Nel caso c) bisogna far ricorso alla formula di Bayes. La probabilità cercata è:

$$p(U_1|B) = \frac{p(B|U_1)\cdot p(U_1)}{p(B)} = \frac{1\cdot\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}.$$

Quesito 13.2.15. Ricorriamo alla formula di Bayes e per questo visualizziamo la situazione mediante il grafo sottostante (Fig. 13.4), che non richiede particolari spiegazioni. Allora, la probabilità p(A|2) che la moneta pescata, da 2 euro, provenga dal sacchetto A è, in virtù della suddetta formula:

$$p(A|2)=\frac{p(2|A)\cdot p(A)}{p(2)}, \text{ dove: } p(2|A)=\frac{6}{15},\ \ p(A)=\frac{1}{3},\ \ p(2)=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{6}{15}+\frac{5}{19}+\frac{7}{16}\right).$$

Per cui, a conti fatti: $p(A|2)\approx 0{,}3634$.

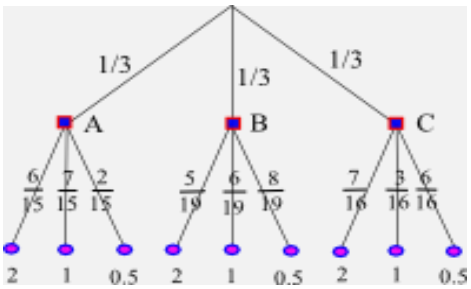

Fig. 13.4

Ragionando allo stesso modo: $p(B|2)\approx 0{,}2391$; $p(C|2)\approx 0{,}3975$.
La somma delle tre probabilità è 1 e non poteva essere diversamente dal momento che la moneta non poteva che provenire da uno dei tre sacchetti e da essi soltanto.

Quesito 13.2.16. Una volta estratte dall'urna due palline e constatato che sono di colore diverso, la pallina rimasta nell'urna evidentemente è bianca o nera. La probabilità che sia nera è perciò 1/2. Rapido ed efficace, senza scomodare il teorema di Bayes.
Se, tuttavia, vogliamo complicarci la vita e ricorrervi ugualmente, conviene immaginare che ci siano due urne, ciascuna con 3 palline: una – urna U' – con le palline BNB, l'altra – urna U" – con le palline BNN. La probabilità che due palline estratte a caso siano di colore diverso (evento che per comodità indichiamo con D) è 2/3 per ciascuna delle due urne, cosa che il lettore può spiegare agevolemente. Ora, scelta a caso un'urna, estratte a caso due palline da essa e constatato che sono di colore diverso (evento D), la pallina rimasta nell'urna è nera solamente se l'urna estratta è U". Dunque, ricorrendo al teorema di Bayes, la probabilità che la pallina rimasta nell'urna sia nera è:

$$p(U''|D)=\frac{p(D|U'')\cdot p(U'')}{p(D)}=\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}.$$

Quesito 13.2.17. Qui il ricorso al teorema di Bayes è decisivo. Conviene ragionare come nel caso precedente e immaginare che ci siano 4 urne, ciascuna con 3 palline: nell'urna U1 sono BBB, nell'urna U2 sono BBN, BNB nell'urna U3 e BNN nell'urna U4. La probabilità che le due palline estratte a caso siano entrambe bianche (evento BB) è 1 per l'urna U1, 2/3 per le urne U2 e U3, 0 per l'urna U4. Pertanto, scelta a caso un'urna, estratte a caso da essa due palline e constatato che sono entrambe bianche (evento BB), la pallina rimasta nell'urna è ancora bianca solamente se è stata scelta l'urna U1. Dunque, in virtù del teorema di Bayes, la probabilità che la pallina rimasta nell'urna sia bianca è:

$$p(U1|BB) = \frac{p(BB|U1) \cdot p(U1)}{p(BB)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{4}}{\frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \cdot 0} = \frac{3}{7}.$$

8. 5 Bruno de Finetti: vita ed opere.

de Finetti

«La probabilità: chi è costei?
«Prima di rispondere a tale domanda è certamente opportuno chiedersi: ma davvero "esiste" la probabilità? e cosa mai sarebbe? Io risponderei di no, che non esiste».

Può sembrare sorprendente, ma l'autore di queste parole è il maggiore probabilista italiano, Bruno de Finetti, che le scrisse alla voce "Probabilità", preparata per l'*Enciclopedia Einaudi*. Bisogna dire però che poi, nella stessa voce, egli chiarisce il suo pensiero, dal quale si evince che in realtà considera la probabilità come "guida nel pensare e nell'agire". Continua infatti così il suo intervento:

«Qualcuno, cui diedi questa risposta (ribadita, col motto in tutte maiuscole – PROBABILITY DOES NOT EXIST – nella prefazione all'edizione inglese di Teoria delle probabilità [1970]), mi chiese ironicamente perché mai, allora, me ne occupo. Mah! Potrei anche dire, viceversa e senza contraddizione, che la probabilità regna ovunque, che è, o almeno dovrebbe essere, la nostra "guida nel pensare e nell'agire", e che perciò mi interessa. Soltanto, mi sembra improprio, e perciò mi urta, vederla concretizzata in un sostantivo, "probabilità", mentre riterrei meglio accettabile e più appropriato che si usasse soltanto l'aggettivo, "probabile", o, meglio ancora, soltanto l'avverbio, "probabilmente".
«Dire che la probabilità di una certa asserzione vale 40 per cento appare – purtroppo! – come espressione concreta di una verità apodittica. Non pretendo né desidero che tale modo di esprimersi vada bandito, ma certo è che l'asserzione apparirebbe assai più appropriatamente formulata se la si ammorbidisse dicendo, invece, che quel fatto lo si giudica "probabile al 40 per cento", o, meglio ancora (a parte che suona male), che ci si attende "al 40 per cento – probabilmente" che sia o che risulti vero.»

Bruno de Finetti nacque ad Innsbruck (Austria) nel 1906 e morì a Roma nel 1985. Dal 1912 si trasferì con la madre, rimasta vedova, a Trento, che diventò la sua città adottiva. Conseguì la laurea in matematica nel 1927, a 21 anni di età, e 3 anni dopo, nel 1930, diventò libero docente

di Analisi Matematica. Dal 1946 ricoprì la cattedra di Matematica Attuariale presso la Facoltà di Scienze dell'Università di Trieste e dal 1951 quella di Matematica Finanziaria. Nel 1954 si trasferì all'Università "La Sapienza" di Roma, dove dal 1961 e fino al pensionamento insegnò Calcolo delle Probabilità.
Fu presidente nazionale della Mathesis, Società italiana di scienze matematiche e fisiche, dal 1970 al 1981 e direttore dell'organo di stampa di questa società, la rivista "Periodico di matematiche". Diede contributi significativi alla didattica della matematica. Fu anche socio e presidente onorario *dell'Associazione per la Matematica Applicata alle Scienze Economiche e Sociali*.

Fu il fondatore e massimo esponente della concezione soggettiva della probabilità. Di questa disciplina incominciò ad occuparsi giovanissimo fin dalla fine degli anni '20 e ne gettò le basi fin dal 1937 con un articolo in francese dal titolo *La prévision: ses lois logiques, ses sources subjectives*. La sua opera *Teoria delle Probabilità*, del 1970, costituisce il principale punto di riferimento per i probabilisti, soggettivisti e no.

Sono stati proprio gli studi sulla probabilità a rendere celebre de Finetti in campo internazionale, anche se all'inizio le sue idee innovative furono accolte con un certo sussiego e incominciarono ad essere prese in seria considerazione solo dopo che il probabilista statunitense Leonard J. Savage (1917-1971), nel suo lavoro dal titolo *Foundations of Statistics* del 1954, gli attribuì esplicitamente la paternità del concetto di probabilità soggettiva e divulgò quegli aspetti della teoria di de Finetti riguardanti il suo impiego nei problemi di statistica.

Tra i maggiori oppositori della concezione soggettiva della probabilità sono da annoverare gli studiosi sovietici, forse anche per una sorta di campanilismo, essendo appunto sovietico il fondatore della teoria assiomatica della probabilità, vale a dire il matematico russo Andrei Nikolaevic Kolmogorov (1903-1987). E la teoria assiomatica mal si concilia con la concezione soggettiva. Ma più probabilmente perché de Finetti elaborò le sue idee proprio in contrapposizione alla teoria assiomatica. Possono servire a capire meglio la posizione dei matematici russi alcune parole del matematico Gnedenko: *«Se la probabilità matematica fosse una misura quantitativa del grado di certezza del ricercatore, allora la teoria della probabilità si ridurrebbe a qualcosa affine alla psicologia; in ultima analisi uno sviluppo consistente di una concezione così puramente soggettivista porterebbe inevitabilmente ad un idealismo soggettivo.»* [3]

Comunque sia, se è vero che ultimamente sembra affermarsi la teoria assiomatica della probabilità, è altrettanto vero che appaiono in aumento, anche al di fuori dell'Italia, gli studiosi che accettano la concezione soggettiva della probabilità, proprio secondo il punto di vista di Bruno de Finetti.

[3] Cfr.: Boris Vladimirovič Gnedenko, *Teoria della probabilità*, Roma, Editori Riuniti, 1987, pag. 19.