Prerequisiti:

- Possedere il concetto di derivata di una funzione.
- Saper calcolare derivate di semplici funzioni.

Questa unità interessa solo marginalmente gli studenti dei Licei non scientifici [1] (5ª classe). Per quanto riguarda il Liceo Scientifico, compresa l'opzione Scienze applicate (5ª classe) e gli Istituti Tecnici e Professionali (2° biennio) valuterà il docente circa il grado di approfondimento.

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:

- *enunciare il teorema di Lagrange e fornire di esso un'interpretazione geometrica e qualche semplice applicazione*
- *enunciare il teorema di Rolle e dimostrarlo (supposto noto il teorema di Lagrange); fornire di esso un'interpretazione geometrica e qualche semplice applicazione*
- *enunciare ed applicare il teorema di de L'Hôpital*

67.1 Alcune proprietà delle funzioni derivabili.
67.2 Il teorema di de L'Hôpital.
67.3 Polinomi di Taylor.

Verifiche.

Una breve sintesi per domande e risposte.

Proprietà delle funzioni derivabili

Unità 67

[1] In tali licei il docente può limitarsi a fornire, oltre all'enunciato, un'interpretazione geometrica dei teoremi di Lagrange e di Rolle e l'enunciato del teorema di De L'Hôpital con qualche semplice applicazione.

67.1 ALCUNE PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI DERIVABILI

67.1.1 Consideriamo il seguente problema:

È data una funzione che ammetta tangente in ogni punto di un certo intervallo chiuso e limitato J. Esiste un punto di J in cui il grafico della funzione ha tangente parallela alla congiungente i punti estremi di J?

Ammesso che la funzione sia f(x) e l'intervallo sia [a,b] (Fig. 1), si intuisce che esiste almeno un punto C, interno al segmento AB, in cui la retta t tangente al grafico della funzione e la retta AB che unisce i punti estremi dell'intervallo sono parallele, ossia hanno la stessa pendenza. Siccome la pendenza della retta AB è:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

e quella della tangente t al grafico nel punto C di ascissa c, è $m_t = f'(c)$, risulta evidentemente:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)\,.$$

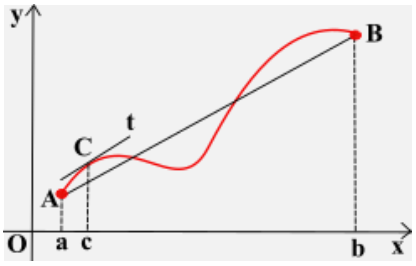

FIG. 1

Ebbene, ciò che il grafico fa cogliere così bene a livello intuitivo potrebbe essere dimostrato con rigore, ma noi ci esimiamo dal farlo, limitandoci a fornire l'enunciato della proposizione che esprime il fatto medesimo e che va sotto il nome di teorema di Lagrange [(2)]:

TEOREMA DI LAGRANGE (o **DEL VALOR MEDIO**). Sia f(x) una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato [a,b] e derivabile in]a,b[. Esiste almeno un punto $c \in]a,b[$ tale che:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)\,.$$

Ogni punto c suddetto si chiama ***punto di Lagrange***, relativo all'intervallo considerato.
Per esempio, con riferimento alla precedente figura 1, s'intuisce che di punti di Lagrange ce ne sono tre. Invece, considerata la funzione $y = \ln x$, con $1 \le x \le e$, siccome $y(1)=0$ e $y(e)=1$, risulta:

$$\frac{y(e) - y(1)}{e - 1} = \frac{1}{e - 1}\,.$$

D'altra parte: $y' = \frac{1}{x}$. Per cui : $\frac{1}{x} = \frac{1}{e-1}$ e dunque: $x = e - 1$.
Il punto $e-1$ è l'unico punto di Lagrange nell'intervallo]1,e[.

Il teorema di Lagrange ha un interessante modello cinematico. Basta supporre che la funzione sia la legge oraria $s = s(t)$ di un moto che si svolge dalla posizione A alla posizione B senza soste, percorrendo lo spazio $s_B - s_A$ nell'intervallo di tempo $[t_A, t_B]$. Ebbene, constatato che la velocità media del moto in tale intervallo di tempo è:

[2] **Lagrange,** Giuseppe Luigi, matematico italo-francese, 1736-1813.

$$v_m = \frac{s_B - s_A}{t_B - t_A} = \frac{s(t_B) - s(t_A)}{t_B - t_A},$$

esiste almeno un istante $t_0 \in [t_A, t_B]$ in cui la velocità istantanea, cioè $s'(t_0)$, è esattamente uguale a v_m.

67.1.2 Andiamo adesso a fare alcune considerazioni supplementari collegate al teorema di Lagrange.

- Anzitutto è facile comprendere che se viene meno qualcuna delle ipotesi fatte:

  1) f(x) è continua in [a,b], 2) f(x) è derivabile in]a,b[,

  può non esistere alcun punto $c \in]a,b[$ per il quale risulti: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.

  ESEMPI:

  - La funzione $y=\sqrt{x^2}$, con $x \in [-1,1]$, è continua in $[-1,1]$ ma non è derivabile in $]-1,1[$, non essendo derivabile per x=0. Ora, siccome $y(-1)=y(1)=1$, si ha: $\frac{y(1)-y(-1)}{1-(-1)} = 0$. Non esiste però alcun $c \in [-1,1]$ tale che $y'(c)=0$, essendo $y'=-1$ per $x<0$ e $y'=1$ per $x>0$.
  - La funzione $y=\begin{cases} \ln x & \text{se } 0<x<1 \\ 0 & \text{se } x=0 \end{cases}$ non è continua in [0,1] ma è derivabile in]0,1[; precisamente in tale intervallo si ha: $y'=\frac{1}{x}$. Ora, siccome $y(0)=0$ e $y(1)=0$, si ha: $\frac{y(1)-y(0)}{1-0} = 0$. Ma l'equazione $\frac{1}{x} = 0$ è impossibile, per cui non esiste alcun punto $c \in]0,1[$ tale che $y'(c)=0$.

- Proponiamo adesso alcune interessanti applicazioni del teorema di Lagrange. Altre ne vedremo in seguito.

  - PROBLEMA. La funzione reale di variabile reale f(x) è continua nell'intervallo chiuso e limitato [0,2] e derivabile nell'intervallo aperto]0,2[. Si sa poi che f(0)=0 e inoltre $0{,}1<f'(x)<0{,}2$ per ogni $x \in]0,2[$. È possibile determinare un intervallo plausibile in cui si trova il valore di f(2)?

    RISOLUZIONE. Per rispondere basta ricorrere al teorema di Lagrange. Essendone soddisfatte le condizioni per applicarlo, esiste un punto u interno all'intervallo]0,2[tale che $\frac{f(2)-f(0)}{2-0} = f'(u)$; d'altra parte, come per ogni x dell'intervallo]0,2[, anche il numero $f'(u)$ è compreso fra 0,1 e 0,2. Dunque: $0{,}1<\frac{f(2)-f(0)}{2-0}<0{,}2$ e da qui, per le ipotesi fatte, segue: $0{,}2<f(2)<0{,}4$. Effettivamente è possibile determinare un intervallo in cui si trova f(2): è l'intervallo]0,2; 0,4[.

    Ci piace far notare come anche per questi tipi di esercizi sia inefficace l'uso di uno strumento di calcolo automatico.

  - TEOREMA. Sia f(x) una funzione reale di variabile reale, definita e continua in un intervallo [a,b] e derivabile in]a,b[. Condizione necessaria e sufficiente affinché f(x) sia costante in [a,b] è che abbia derivata nulla in ogni punto di]a,b[.

    DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione che la condizione sia sufficiente, vale a dire se $f'(x)=0$ in]a,b[allora f(x) è costante in [a,b], richiede un po' di attenzione, ma solo un po'. Basta infatti prendere un x qualunque appartenente all'intervallo [a,b] e ragionare sul comportamento di f(x) in [a,x].

    La dimostrazione invece che la condizione sia necessaria, cioè se f(x) è costante in [a,b] allora $f'(x)=0$ in]a,b[, è del tutto banale. La lasciamo a te.

    Noi andiamo a fornire un'interessante applicazione del teorema con riferimento alla funzione:

    $$f(x)= \cos^2 x + \sin^2 x.$$

Sappiamo che questa funzione è uguale ad 1 per ogni x reale. Ma se anche non sapessimo ciò, potremmo ugualmente scoprirlo utilizzando proprio la proprietà precedente. Basta osservare, infatti, che la funzione f(x) è definita, continua e derivabile in tutto $\mathbb{R}$ e si ha inoltre:

$$f'(x) = 2\cos x\,(-\sin x) + 2\sin x\cos x = 0\,.$$

La funzione è pertanto costante in $\mathbb{R}$. È sufficiente, poi, constatare che f(0)=1 per concludere che f(x)=1 per ogni $x\in\mathbb{R}$.

ATTENZIONE!!! Se il campo di esistenza della funzione f(x) non è un intervallo ma un dominio generico D, può accadere che f(x), avente derivata nulla in D, sia ancora costante in D, ma può accadere pure che non lo sia, ma in quest'ultimo caso è "costante a tratti".
Valgano, per tutti, ancorché come esempi banali, le seguenti funzioni:

$$f(x)=\frac{x}{x}\,,\quad f(x)=\frac{|x|}{x}\,.$$

Entrambe hanno come dominio l'insieme $\mathbb{R}_0$ ed entrambe hanno derivata nulla in tale dominio; ma mentre la prima è costante in $\mathbb{R}_0$: è infatti f(x)=1, la seconda non lo è: è infatti una funzione costante a tratti e precisamente: f(x)= −1 se x<0 ed f(x)=1 se x>0.
Cosa si può dire, al riguardo, della funzione $f(x)=\operatorname{atan} x+\operatorname{atan}\frac{1}{x}$?

- ESERCIZIO. Dimostrare che, per ogni x reale positivo, risulta:

$$\frac{1}{x+1}<\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<\frac{1}{x}.$$

DIMOSTRAZIONE. Per x>0 la funzione ln x è continua e derivabile nell'intervallo [x, x+1], quindi, in virtù del teorema di Lagrange, esiste $c\in]x, x+1[$ tale che $\ln(x+1)-\ln x=\frac{1}{c}$, vale a dire: $\ln\frac{x+1}{x}=\frac{1}{c}$.
D'altro canto, essendo x<c<x+1, risulta: $\frac{1}{x+1}<\frac{1}{c}<\frac{1}{x}$. Di conseguenza risulta vera la relazione da dimostrare. In particolare:

- per x=1 : $\frac{1}{2}<\ln 2<1$; in effetti : $\ln 2\approx 0{,}693$;
- per x=10 : $\frac{1}{11}<\ln\frac{11}{10}<\frac{1}{10}$; in effetti : $\ln\frac{11}{10}\approx 0{,}095$ mentre $\frac{1}{11}\approx 0{,}091$ e $\frac{1}{10}=0{,}1$.

67.1.3 Un caso particolare del teorema di Lagrange è il teorema di Rolle [(3)]:

TEOREMA DI ROLLE. Sia f(x) una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato [a,b] e derivabile in]a,b[e sia inoltre f(a)=f(b): esiste almeno un punto $c\in]a,b[$ tale che $f'(c)=0$.

Ogni punto c siffatto si chiama ***punto di Rolle***, relativo all'intervallo considerato.

Il teorema è sostanzialmente un corollario del teorema di Lagrange. Ne lasciamo a te la dimostrazione, assieme alla sua interpretazione geometrica [(4)]. Fa' vedere pure che se viene meno la condizione f(a)=f(b), può non esistere alcun punto di Rolle nell'intervallo]a,b[.

[3] **Rolle,** Michel, matematico francese, 1652-1719.
[4] In realtà, sul piano cronologico, dapprima è stato enunciato il teorema di Rolle e poi quello di Lagrange che lo generalizza.

67.1.4 Un'altra proprietà delle funzioni derivabili è espressa dal teorema di Cauchy [5]:

TEOREMA DI CAUCHY (o **DEGLI INCREMENTI FINITI**). Siano f(x) e g(x) funzioni continue nell'intervallo chiuso e limitato [a,b] e derivabili in]a,b[; sia inoltre $g(a)\neq g(b)$ ma in nessun $x\in]a,b[$ risultino contemporaneamente nulle $f'(x)$ e $g'(x)$. Esiste allora almeno un punto $c\in]a,b[$ tale che:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}\ .$$

DIMOSTRAZIONE. Per la dimostrazione di questo teorema, che come vedremo si basa sul teorema di Rolle, costruiamo la funzione ausiliaria:

$$F(x) = [f(b) - f(a)]\, g(x) - [g(b) - g(a)]\, f(x).$$

Essa risulta chiaramente continua in [a,b] e derivabile in]a,b[. Inoltre:

$$F(a) = [f(b)-f(a)]\, g(a) - [g(b)-g(a)]\, f(a) = f(b)g(a) - f(a)g(b),$$
$$F(b) = [f(b)-f(a)]\, g(b) - [g(b)-g(a)]\, f(b) = f(b)g(a) - f(a)g(b);$$

per cui: $F(a)=F(b)$.

Sono quindi soddisfatte per la funzione F(x), con $x\in[a,b]$, tutte le ipotesi del teorema di Rolle. Sicché esiste almeno un punto $c\in]a,b[$ tale che $F'(c)=0$. Siccome:

$$F'(x) = [f(b)-f(a)]g'(x) - [g(b)-g(a)]f'(x)$$

e, di conseguenza, mettendo c al posto di x:

$$F'(c) = [f(b)-f(a)]g'(c) - [g(b)-g(a)]f'(c),$$

deve essere:

$$[f(b)-f(a)]g'(c) = [g(b)-g(a)]f'(c).$$

Ora, se fosse $g'(c)=0$, essendo per ipotesi $g(b)\neq g(a)$ e perciò $g(b)-g(a)\neq 0$, dovrebbe essere $f'(c)=0$; contro l'ipotesi che in nessun $x\in]a,b[$ risulti contemporaneamente $f'(c)=g'(c)=0$. Dunque $g'(c)\neq 0$. Poiché, come precisato $g(b)-g(a)\neq 0$, dalla precedente uguaglianza segue la relazione da dimostrare.

67.2 IL TEOREMA DI DE L'HÔPITAL [6].

67.2.1 Il teorema di Rolle e quello di Cauchy costituiscono la base per la dimostrazione di un altro teorema, il quale permette di risolvere alcune questioni che, trattando dei limiti, abbiamo lasciato a suo tempo in sospeso. Ricorderai precisamente che, se per $x\to a$ (con a finito o infinito) la funzione f(x) è una forma indeterminata di uno dei seguenti tipi:

$$\frac{0}{0}\ ,\quad \frac{\infty}{\infty}\ ,\quad 0\cdot\infty,\quad \infty-\infty\ ,$$

allora nulla si può dire circa il limite di f(x) per $x\to a$.

Per la verità, in alcuni casi elementari (cfr.: unità 65, n. 65.2) siamo riusciti a superare l'indeterminazione in seguito a qualche artificio di calcolo. Adesso dimostriamo un teorema che ci permette di affrontare situazioni più generali.

---

[5] **Cauchy,** Augustin Louis, matematico francese, 1789-1857.
[6] **de L'Hôpital,** Guillaume François Antoine (marchese), matematico francese, 1661-1704.

TEOREMA DI DE L'HÔPITAL. Siano f(x) e g(x) funzioni derivabili in un intervallo]a,b[, escluso al più il punto u∈]a,b[, ed in ogni x∈]a,b[sia g'(x)≠0. Se, per x→u, f(x)→0 e g(x)→0, ma:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \to l$$

(dove l è un numero reale oppure +∞ o anche −∞), allora anche:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to l\,.$$

DIMOSTRAZIONE. Le funzioni f(x) e g(x), derivabili in]a,b[, escluso al più il punto u, sono continue in]a,b[−{u}. Siccome, per x→u, f(x)→0 e g(x)→0, il punto u è al più un punto di discontinuità eliminabile sia per f(x) sia per g(x): basta porre infatti f(x)=0 e g(x)=0. In questo modo f(x) e g(x) sono continue anche in u e quindi sono continue in tutto l'intervallo]a,b[.

Osserviamo adesso che per x≠u deve essere g(x)≠g(u) giacché, in caso contrario, esisterebbe un punto c, compreso fra x ed u in cui, per il teorema di Rolle, sarebbe g'(c)=0; contro l'ipotesi che in ogni x∈]a,b[sia g'(x)≠0. A questo punto, per il teorema di Cauchy relativo all'intervallo dei punti compresi fra x ed u, esiste un punto t interno a quest'intervallo tale che: $\frac{f(x)-f(u)}{g(x)-g(u)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$.

Poiché per x→u anche t→u, ricordando che abbiamo posto f(u)=g(u)=0, risulta:

$$\lim_{x\to u}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to u}\frac{f'(t)}{g'(t)}$$

o anche, ponendo x al posto di t nel secondo membro:

$$\lim_{x\to u}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to u}\frac{f'(x)}{g'(x)}\,. \qquad [\text{c. v. d.}]$$

Possono essere dimostrate anche le seguenti proposizioni, che invece ci limitiamo ad enunciare:

- Il teorema di de L'Hôpital vale anche quando, per x→u, f(x) e g(x) tendono ad infinito.
- Esso vale pure quando $x\to a^+$ e quando $x\to b^-$.
- Ammesso che l'intervallo]a,b[sia del tipo]a,+∞[, il teorema vale ancora per x→+∞; e posto che]a,b[sia del tipo]−∞,b[vale anche quando x→−∞.
- Se, una volta applicato il teorema di de L'Hôpital, la funzione f '(x)/g'(x) è di nuovo una forma indeterminata per x→u e se per le funzioni f '(x) e g'(x) sono soddisfatte le ipotesi del teorema allora lo si può applicare una seconda volta al rapporto f '(x)/g'(x), e se occorre una terza volta, una quarta, e così via.

67.2.2 Prima di passare a qualche applicazione del **teorema di de L'Hôpital**, vogliamo precisare che esso **esprime una condizione sufficiente** per concludere che il rapporto f(x)/g(x) ha limite in una certa situazione. **La condizione però non è necessaria**. In altri termini, può esistere il limite di f(x)/g(x) anche se non c'è quello di f '(x)/g'(x), come mostra il seguente esempio.

Se $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$ e $g(x)=x$, si ha: $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)=0$.

Siccome, tuttavia, $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}+x^2\left(\cos\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$ e $g'(x)=1$, risulta:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\left(2\,x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)$$

e questo limite non esiste.

67.2.3 Occupiamoci adesso di alcune applicazioni del teorema di de L'Hôpital al caso delle indeterminazioni del tipo $0/0$ e ∞/∞. Premettiamo, una volta per tutte, che negli esempi che prenderemo in esame sono soddisfatte le condizioni per ricorrere al teorema, come tu stesso potrai controllare per conto tuo.

- ESERCIZIO 1. Calcolare:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}.$$

RISOLUZIONE. Per $x\to 0$ la funzione assegnata è una forma indeterminata del tipo $0/0$. Si ha:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\,e^{2x}}{1}=2\,.$$

- ESERCIZIO 2. Calcolare:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{e^{3x}}{x^4}.$$

RISOLUZIONE. Per $x\to+\infty$ la funzione assegnata è una forma indeterminata del tipo ∞/∞. Dopo aver applicato per 4 volte la regola di de L'Hôpital, al numeratore figura e^{3x} moltiplicato per un fattore costante, mentre al denominatore figura 4!, cioè una costante. Si ha perciò:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{e^{3x}}{x^4}=+\infty.$$

- ESERCIZIO 3. Calcolare:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^{100}}{e^x}.$$

RISOLUZIONE. Ragionando più o meno come nell'esercizio precedente, si trova:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^{100}}{e^x}=0\,.$$

- ESERCIZIO 4. Calcolare:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x+x}{x^3}.$$

RISOLUZIONE. Per $x\to+\infty$ la funzione assegnata è una forma indeterminata del tipo ∞/∞. Si ha:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x+x}{x^3}=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x+1}{3\,x^2}=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{6\,x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{6}=+\infty\,.$$

67.2.4 Le forme indeterminate del tipo $0\cdot\infty$ e $\infty-\infty$ possono essere ricondotte a quelle precedenti. Lo vediamo con qualche esempio.

- ESERCIZIO 1. Calcolare:

$$\lim_{x\to -\infty}(x\,e^x)\,.$$

RISOLUZIONE. Per $x\to-\infty$ la funzione $x\,e^x$ è una forma indeterminata del tipo $0\cdot\infty$. Infatti, quando $x\to-\infty$, $e^x\to 0$. Essa, tuttavia, può essere scritta in questo modo:

$$\frac{x}{e^{-x}}$$

e diventa così una forma indeterminata del tipo ∞/∞, naturalmente per $x\to-\infty$. Sicché:

$$\lim_{x\to -\infty}(x\,e^x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{x}{e^{-x}}=\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=0\,.$$

- ESERCIZIO 2. Calcolare:

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\ln x)\,.$$

RISOLUZIONE. Per $x\to+\infty$ la funzione $x-\ln x$ è una forma indeterminata del tipo $\infty-\infty$. Si può scrivere:

$$x-\ln x = x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right).$$

A questo punto si tratta di calcolare il limite, per $x\to+\infty$, di $\frac{\ln x}{x}$, funzione che, quando $x\to+\infty$, è di per sé una forma indeterminata del tipo ∞/∞. Siccome, sempre per il teorema di de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{1} = 0\,,$$

allora:

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\ln x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)\right) = +\infty\,.$$

- ESERCIZIO 3. Calcolare:

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right).$$

RISOLUZIONE. Per $x\to0$, sia da destra sia da sinistra, la funzione assegnata è una forma indeterminata del tipo $\infty-\infty$. Siccome:

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x - x}{x\sin x}$$

e siccome questa funzione, per $x\to0$, è una forma indeterminata del tipo $0/0$, si ha:

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right) = \lim_{x\to0}\frac{\sin x - x}{x\sin x} = \lim_{x\to0}\frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x} = \lim_{x\to0}\frac{-\sin x}{\cos x + (\cos x - x\sin x)} = 0\,.$$

67.2.5 Oltre a quelle esaminate fin qui, si possono studiare altre forme indeterminate; quelle dei seguenti tipi:

$$\mathbf{0^0},\ \mathbf{\infty^0},\ \mathbf{1^\infty}.$$

Si presentano, di norma, quando si cerca il limite di una funzione del tipo $f(x)^{g(x)}$.

Per risolverle bisogna ricordare prima di tutto che si ha:

$$f(x)^{\,g(x)} = e^{\,g(x)\ln f(x)}.$$

A questo punto è sufficiente calcolare il limite di $g(x)\ln f(x)$.

Forniamo un esempio per ciascuna delle tre forme indeterminate considerate, ricordando per inciso che la funzione $\left(x+\frac{1}{x}\right)^x$, già presa in esame, non è altro che una forma indeterminata del tipo 1^∞, quando $x\to\pm\infty$.

- ESERCIZIO 1. Calcolare:

$$\lim_{x\to0^+} x^x.$$

RISOLUZIONE. Per $x\to0^+$ la funzione x^x è una forma indeterminata del tipo 0^0. Siccome:

$$x^x = e^{\,x\ln x}$$

si ha:

$$\lim_{x\to0^+} x^x = \lim_{x\to0^+} e^{\,x\ln x} = e^{\,\lim_{x\to0^+}(x\ln x)}.$$

D'altro canto:

$$\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0\,.$$

Pertanto:

$$\lim_{x\to 0^+}x^x=e^0=1\,.$$

- ESERCIZIO 2. Calcolare:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^x.$$

RISOLUZIONE. Per $x\to 0^+$ la funzione $\left(\frac{1}{x}\right)^x$ è una forma indeterminata del tipo ∞^0. Siccome:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to 0^+}e^{x\ln(1/x)}=\lim_{x\to 0^+}e^{x(-\ln x)}$$

come prima:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^x=e^0=1.$$

- ESERCIZIO 3. Calcolare:

$$\lim_{x\to 0}(1-x)^{1/x}.$$

RISOLUZIONE. Per $x\to 0$ la funzione $(1-x)^{1/x}$ è una forma indeterminata del tipo 1^∞. Siccome:

$$(1-x)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln(1-x)}\quad\text{e}\quad\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\ln(1-x)\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{1-x}}{1}=-1$$

allora:

$$\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

In realtà si poteva calcolare il limite, senza scomodare il teorema di de L'Hôpital, ponendo $x=-1/t$ e ricordando la definizione del numero "e". Infatti:

$$\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-t}=\left(\lim_{t\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{-1}=e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

- ESERCIZIO 4 (da risolvere). Calcolare il seguente limite, facendo vedere che è uguale ad 1:

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x.$$

67.2.6 Il teorema di de L'Hôpital consente di classificare gli eventuali punti di discontinuità di una funzione in casi più complessi di quelli che a suo tempo (cfr.: unità 65, n. 65.3.2) abbiamo avuto modo di prendere in esame. Lo facciamo con alcuni esempi e con qualche esercizio che proponiamo a chi legge.

ESERCIZIO. Studiare i punti di discontinuità delle seguenti funzioni:

$$\text{a)}\ f(x)=\frac{\ln(x-1)}{x-2}\ ;\qquad \text{b)}\ f(x)=x\cdot e^{\frac{1}{x}}\ ;\qquad \text{c)}\ f(x)=\frac{|x^2-1|}{x^3-1}\ ;$$

RISOLUZIONE.

a) La funzione, definita per gli x reali tali che $x>1$ purché $x\neq 2$, presenta una discontinuità per $x=2$. Si ha:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\ln(x-1)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{x-1}}{1}=1\,.$$

Si tratta pertanto di un punto di discontinuità eliminabile. Basta porre $y(2)=1$.

b) La funzione, definita per ogni x reale non nullo, presenta una discontinuità per x=0.
Si ha:

$$\lim_{x\to 0^-} x\, e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-\frac{1}{x^2}\, e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = 0\,; \quad \lim_{x\to 0^+} x\, e^{\frac{1}{x}} = +\infty\,.$$

Si tratta pertanto di un punto di discontinuità non eliminabile.

c) La funzione è definita su tutto l'asse reale tranne che nel punto x=1, dove presenta una discontinuità.
Si ha:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{|x^2-1|}{x^3-1} = -\frac{2}{3}\,; \quad \lim_{x\to 1^+} \frac{|x^2-1|}{x^3-1} = \frac{2}{3}\,.$$

Si tratta pertanto di un punto di discontinuità non eliminabile.

Proponiamo di risolvere il seguente esercizio.
ESERCIZIO. Studiare i punti di discontinuità delle seguenti funzioni, stabilendo in particolare se si tratta di punti di discontinuità eliminabili o non eliminabili:

$$\text{a) } f(x) = \frac{e^x-1}{x}\,; \quad \text{b) } f(x) = \frac{e^x-1}{x^2}\,; \quad \text{c) } f(x) = \frac{x^2}{\sin x}\,, \text{con } x \in \,]-\pi,\pi[\,;$$

$$\text{d) } f(x) = \frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\,, \text{con } x \in \,]-\pi,\pi[; \quad \text{e) } f(x) = \frac{e^{\ln x}-1}{\ln x}\,; \quad \text{f) } f(x) = \frac{\ln x}{x^2-1}\,;$$

$$\text{g) } f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}\,; \quad \text{h) } f(x) = \frac{\ln|x-1|}{x}\,.$$

67.3 POLINOMI DI TAYLOR

67.3.1 Riprendiamo la definizione di derivata di una funzione f(x) in un punto x_0:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\,.$$

Quest'uguaglianza sul piano pratico vuol dire che, quando $x-x_0$ è "molto piccolo", oppure, detto in altro modo, quando x è "molto prossimo" ad x_0, si può scrivere:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \approx f'(x_0)$$

ossia:

[1] $$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0).$$

Questa relazione, una volta posto $x-x_0=\Delta x$, è in fondo un altro modo di scrivere la relazione:

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x\,.$$

Di essa ci siamo già occupati nella precedente unità (cfr.: unità 66, n. 66.6): rappresenta la cosiddetta ***approssimazione al 1° ordine*** di f(x) in x_0.

Vediamo alcuni esempi, nei quali supporremo x molto prossimo ad x_0 senza specificarlo ogni volta.

- ESEMPIO 1. Con riferimento alla funzione f(x)= sin x, osservato che $D_x \sin x = \cos x$, si ha:

  $$\sin x \approx \sin x_0 + \cos x_0 \cdot (x-x_0).$$

  In particolare, se $x_0=0$ (e quindi per piccoli valori di x), si ottiene un risultato già trovato in precedenza:

  $$\sin x \approx x.$$

- ESEMPIO 2. Con riferimento alla funzione $f(x)=\ln x$, osservato che $D_x \ln x=\frac{1}{x}$, si ha:
$$\ln x \approx \ln x_0 + \frac{1}{x_0}(x-x_0).$$
In particolare, se $x_0=1$ (e quindi per valori di x molto prossimi ad 1):
$$\ln x \approx x-1.$$
- ESEMPIO 3. Con riferimento alla funzione $f(x)=e^x$, osservato che $D_x e^x=e^x$, si ha:
$$e^x = e^{x_0} + e^{x_0}(x-x_0)$$
In particolare, se $x_0=0$ (e quindi per piccoli valori di x):
$$e^x \approx 1+x.$$

67.3.2 In virtù del fatto che $f'(x_0)$ rappresenta la pendenza della retta tangente al grafico di f(x) nel punto $(x_0, f(x_0))$, l'approssimazione al 1° ordine di f(x) in x_0 è chiamata anche ***approssimazione lineare*** di f(x) in x_0.
È possibile, a certe condizioni, migliorare tale approssimazione mediante un opportuno polinomio di grado n nell'indeterminata $x-x_0$. In altri termini è possibile ottenere:
$$f(x) \approx \alpha_0 + \alpha_1(x-x_0) + \alpha_2(x-x_0)^2 + \alpha_3(x-x_0)^3 + \ldots + \alpha_n(x-x_0)^n.$$
Si tratta di stabilire sotto quali condizioni ciò è possibile e di calcolare quali sono i valori dei coefficienti α_i (i=0,1,2,3,...,n).
Per giungere al risultato cercato prendiamo in considerazione il polinomio P(x) di grado n nell'indeterminata $x-x_0$:
$$P(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \ldots + a_n(x-x_0)^n,$$
dove ovviamente i coefficienti a_i (i = 0,1,2,3,...,n) sono numeri reali.
Derivando successivamente rispetto ad x, si ottiene:
$P'(x) = a_1 + 2\,a_2\,(x-x_0) + 3\,a_3\,(x-x_0)^2 + 4\,a_4\,(x-x_0)^3 + \ldots + n\,a_n\,(x-x_0)^{n-1}$,
$P''(x) = 2\,a_2 + 3\cdot 2\,a_3\,(x-x_0) + 4\cdot 3\,a_4\,(x-x_0)^2 + \ldots + n(n-1)\,a_n\,(x-x_0)^{n-2}$,
$P^{(3)}(x) = 3\cdot 2\,a_3 + 4\cdot 3\cdot 2\,a_4\,(x-x_0) + \ldots + n(n-1)(n-2)\,a_n\,(x-x_0)^{n-3}$,
.....,
$P^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\,a_n$.
Ponendo ora $x=x_0$ sia in P(x) sia nelle sue derivate successive, si ha:
$$P(x_0)=a_0,\ P'(x_0)=a_1,\ P''(x_0)=2a_2,\ P^{(3)}(x_0)=3\cdot 2\,a_3,\ \ldots,\ P^{(n)}(x_0)=n(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\,a_n.$$
Da qui si ricava:
$$a_0=P(x_0),\quad a_1=P'(x_0),\quad a_2=\frac{1}{2!}P''(x_0),\quad a_3=\frac{1}{3!}P^{(3)}(x_0),\quad \ldots,\quad a_n=\frac{1}{n!}P^{(n)}(x_0).$$
Di conseguenza possiamo scrivere:
$$P(x)=P(x_0)+P'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}P''(x_0)(x-x_0)^2+\frac{1}{3!}P^{(3)}(x_0)(x-x_0)^3+\ldots+\frac{1}{n!}P^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n.$$
Supponiamo, a questo punto, che la funzione f(x) sia derivabile fino all'ordine n in un intorno di x_0.
Ebbene, si dimostra che P(x) è l'unico polinomio per il quale risulta:
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-P(x)}{(x-x_0)^n}=0.$$
Questo ci consente di prendere in considerazione il seguente polinomio nell'indeterminata $x-x_0$, aven-

te grado n e la medesima struttura del precedente polinomio P(x):

$$T_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\frac{1}{3!}f^{(3)}(x_0)(x-x_0)^3+...+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n.$$

Questo polinomio $T_n(x)$ è detto **polinomio di Taylor** [7] di ordine n della funzione f(x), centrato in x_0. Si ha:

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-T_n(x)\right)=0.$$

Infatti:

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-T_n(x)\right)=\lim_{x\to x_0}f(x)-\lim_{x\to x_0}T_n(x)=f(x_0)-f(x_0)=0.$$

Questo significa che, quando $x-x_0$ è molto piccolo, ossia quando x è molto prossimo a x_0, si ha:

$$f(x)\approx T_n(x)$$

e perciò:

[2] $$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\frac{1}{3!}f^{(3)}(x_0)(x-x_0)^3+...+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n.$$

Questa formula fornisce un'approssimazione di f(x) in un intorno di x_0, migliore dell'approssimazione fornita dalla [1]. S'intende che può essere applicata a condizione che la funzione f(x) sia derivabile fino all'ordine n in x_0.

67.3.3 La quantità $f(x)-T_n(x)$ si chiama **resto** di ordine n e si indica con la scrittura $R_n(x)$. In base a ciò la [2] può essere scritta nel modo seguente:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\frac{1}{3!}f^{(3)}(x_0)(x-x_0)^3+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+$$
$$+R_n(x).$$

Supponiamo ora che f(x) sia derivabile infinite volte in x_0. Ha allora senso considerare un polinomio di Taylor di grado n qualunque ed è lecito domandarsi se, per $n\to+\infty$, tale polinomio tende ad f(x).

Si capisce che ciò accade se e solo se $\lim_{n\to+\infty}R_n(x)=0$. In questo caso, sottintendendo il resto $R_n(x)$, possiamo mettere f(x) nella forma seguente:

[3] $$\mathbf{f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\frac{1}{3!}f^{(3)}(x_0)(x-x_0)^3+\cdots+}$$
$$\mathbf{+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\cdots.}$$

In questo modo la funzione f(x) risulta sviluppata in una serie di potenze crescenti di $(x-x_0)$, chiamata **serie di Taylor**. Per questo la [3] è nota come formula dello **sviluppo in serie di Taylor**.

Questo modo di "sviluppare" la funzione f(x) richiede, lo ribadiamo, che la funzione sia derivabile infinite volte in x_0. Ma questa è solo una ***condizione necessaria*** (ma non sufficiente).

Esiste tuttavia una **condizione sufficiente** (ma non necessaria) per lo sviluppo di una funzione f(x) in serie di Taylor. Vale precisamente il seguente teorema.

TEOREMA. Condizione sufficiente affinché una funzione reale di variabile reale f(x) sia sviluppabile in serie di Taylor, secondo potenze di $x-x_0$, è che esista una costante positiva M tale che, per ogni ξ compreso fra x_0 ed x, risulti $\left|f^{(n)}(\xi)\right|\le M^n$.

[7] **Taylor**, Brook, matematico inglese, 1685-1731.

Si capisce facilmente che se la funzione f(x) è un polinomio allora il suo sviluppo in serie di Taylor coincide esattamente con il polinomio, qualunque sia il punto x_0 in un intorno del quale lo sviluppo è calcolato.

67.3.4 Un caso particolare della [3] si ottiene per $x_0=0$ ed è il seguente:

[4] $$\mathbf{f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{1}{2!}f''(0)\,x^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(0)\,x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)\,x^n + \cdots}.$$

Questo sviluppo di Taylor centrato nel punto 0 è in realtà uno ***sviluppo secondo potenze di* x:** è noto come **sviluppo in serie di McLaurin** [8]. È molto utilizzato nella pratica.
Ne vediamo subito alcune applicazioni.

- **Sviluppo di e^x**. Consideriamo la funzione $f(x)=e^x$. Per ogni intero positivo n risulta $f^{(n)}(x)=e^x$. Per ogni x dell'intervallo $]-a,a[$, qualunque sia il numero reale positivo a, risulta chiaramente $e^x<e^a$ giacché e^x è funzione crescente per ogni x reale ed $x<a$; quindi, evidentemente: $|e^x|<e^a$. Di conseguenza, per ogni $\xi\in]-a,a[$, si ha: $\left|f^{(n)}(\xi)\right|<e^a$ ed a più forte ragione $\left|f^{(n)}(\xi)\right|<(e^a)^n$.
  Dunque, per il teorema precedente (in cui adesso $x_0=0$ ed $M=e^a$), e^x è sviluppabile secondo potenze di x.
  Siccome $f(0)=f'(0)=f''(0)=...=f^{(n)}(0)=e^0=1$, lo sviluppo cercato è il seguente:
  $$\mathbf{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots}.$$
  Nel caso particolare x=1, si ha:
  $$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots.$$
  È un modo per calcolare un'approssimazione del numero "e". Già per n=7 si ottengono le prime 4 cifre decimali esatte. Un idoneo software matematico permette di verificarlo rapidamente.
- **Sviluppo di cos x e sin x.** Consideriamo la funzione $f(x)=\cos x$. Per ogni x reale si ha:
  $$f'(x) = -\sin x,\quad f''(x) = -\cos x,\quad f^{(3)}(x) = \sin x,\quad f^{(4)}(x) = \cos x;$$
  in generale:
  $$f^{(2n-1)}(x) = (-1)^n \sin x,\quad f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cos x.$$
  In ogni caso, per qualunque x reale risulta: $|f^{(n)}(x)|\le 1$.
  Dunque cos x è sviluppabile secondo potenze di x.
  Siccome $f(0)=1$ e, per ogni naturale $n>0$, $f^{(2n-1)}(0)=0$ ed $f^{(2n)}(0)=(-1)^n$, lo sviluppo cercato è il seguente:
  $$\mathbf{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots}.$$
  Ragionando in maniera analoga su $\sin x$ (cosa che puoi fare da solo), si trova:
  $$\mathbf{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots}.$$
  Può essere interessante e istruttivo rappresentare graficamente l'andamento, nell'intorno del punto 0, della funzione f(x) e dei suoi sviluppi in serie di potenze di x, arrestati al 1° termine, al 2°, al

[8] **McLaurin**, Colin, matematico scozzese, 1698-1746.

3° e così via. Lo facciamo per le funzioni $\cos x$ e $\sin x$. Nella figura 2 sono rappresentati l'andamento della funzione $f(x)=\cos x$ e quelli dei suoi sviluppi arrestati, il primo S_1, al termine di 2° grado, e il secondo S_2, al termine di 4° grado. Invece nella figura 3 sono rappresentati l'andamento della funzione $f(x)=\sin x$ e quelli dei suoi primi due sviluppi, S_1 ed S_2.

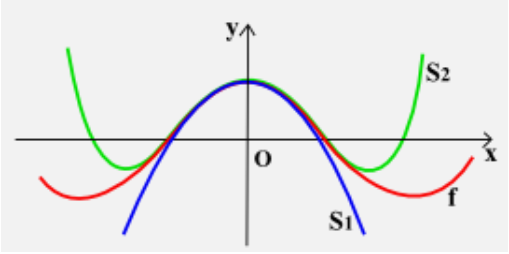

FIG. 2

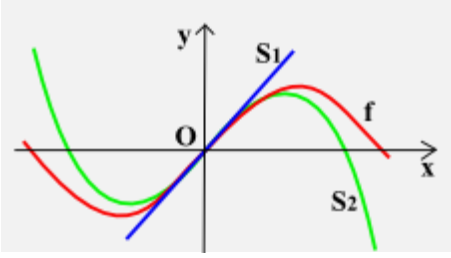

FIG. 3

- **Sviluppo di $\ln(1+x)$.** Per sviluppare secondo potenze di x la funzione $f(x)=\ln(1+x)$ si può seguire la solita procedura, che lasciamo a te per esercizio. Ti basti sapere che occorre far vedere preventivamente che:

$$f^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

E, per $-1<x<1$, otterrai:

$$\mathbf{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots}\ .$$

In realtà si può dimostrare che lo sviluppo vale anche per x=1, per cui si ha:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^n\frac{1}{n+1} + \ldots.$$

È una formula idonea a calcolare un valore approssimato di $\ln 2$, *anche se ci vogliono molti termini per ottenere un'approssimazione accettabile. Tanto per esemplificare, la seconda cifra decimale di* $\ln 2$ *si stabilizza prendendo almeno 159 termini (ossia per n≥158). Cosa che con un software matematico idoneo si può verificare agevolmente.*

- **Sviluppo di atan x.** Per $-1<x<1$ si trova:

$$\mathbf{\operatorname{atan} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots}\ .$$

Questo risultato è conosciuto come "serie di Gregory" [(9)].

In realtà si può dimostrare che lo sviluppo vale anche per x=1. Per cui, ricordando che $\operatorname{atan} 1 = \frac{\pi}{4}$, si ha:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots + (-1)^n\frac{1}{2n+1} + \ldots\ .$$

È un modo per calcolare un valore approssimato di π, *anche se ci vogliono molti termini per ottenere un'approssimazione accettabile. Tanto per dire, la seconda cifra decimale di* π *si stabilizza prendendo almeno 625 termini (ossia n≥624). Cosa che con un software matematico idoneo si può verificare agevolmente.*

Ti proponiamo per esercizio di ritrovare la formula dello sviluppo del binomio $(1+x)^n$, dove n è un qual-

[9] **Gregory**, James, matematico scozzese, 1638-1675.

siasi numero naturale, utilizzando questa volta lo sviluppo in serie di McLaurin. Vale a dire di far vedere che per $-1<x<1$ si ha:

$$(\mathbf{1}+\mathbf{x})^{\mathbf{n}} = \sum_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}^{\mathbf{n}} \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}} \mathbf{x}^{\mathbf{k}}.$$

67.3.5 Detto che lo sviluppo di e^x secondo potenze di x vale anche se l'argomento x è un numero complesso, confrontando gli sviluppi in serie delle funzioni e^{ix}, $\cos x$, $\sin x$, dove "i" è l'unità immaginaria, si trova la seguente relazione, che puoi verificare da solo:

[5] $$\mathbf{e^{ix} = \cos x + i \sin x}\ .$$

È nota come **formula di Eulero** [10] e figura nella sua opera *Introductio in Analysin Infinitorum* (1748).

Bisogna dire però che l'inglese **Roger Cotes** (1682-1716) aveva scoperto qualche anno prima di lui una formula equivalente, la seguente:

$$\ln(\cos x + i \sin x) = i\,x\ .$$

Sennonché, avendosi a che fare con una funzione (ln) di variabile complessa $(\cos x + i \sin x)$, nella dimostrazione di Cotes c'erano dei "buchi" logici, la cui spiegazione esce però dai nostri confini e solo in studi universitari può essere affrontata. Fu ad ogni buon conto Eulero che eliminò ogni dubbio.

Dalla formula [5] deriva poi, come caso particolare per $x=\pi$, quella che in altra circostanza [11] abbiamo presentato come *la più bella formula matematica*:

$$\mathbf{e^{\pi i} = -1\ .}$$

La formula di Eulero permette di scrivere un numero complesso in una forma diversa da quelle già note. Basta ricordare la forma trigonometrica del numero complesso z di modulo r e argomento α:

$$z = r\,(\cos\alpha + i \sin\alpha)$$

e, tenendo presente la formula [5], si ottiene immediatamente:

$$z = r\,e^{i\alpha}\ .$$

Si ottiene quella che si chiama ***forma esponenziale*** del numero complesso. Intendiamoci. Questa nuova forma non ci dà informazioni diverse da quelle che possiamo ottenere dalla forma trigonometrica. È solo un modo più compatto di scrivere un numero complesso.

67.3.6 In passato ci siamo occupati di altre formule che dovresti ricordare: parliamo delle formule di addizione e sottrazione di seno e coseno. Ecco, la formula di Eulero permette di ricavare rapidamente tali formule trigonometriche e ciò all'occorrenza può far comodo.

Orbene, noi ci occupiamo delle formule di addizione e lasciamo a te quelle di sottrazione.

Siano allora α e β due angoli qualsiasi, espressi in radianti. Si ha:

$$e^{i(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha+\beta) + i \sin(\alpha+\beta).$$

D'altro canto si ha pure:

$$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}\cdot e^{i\beta} = (\cos\alpha + i \sin\alpha)(\cos\beta + i \sin\beta) =$$
$$= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta).$$

Dal confronto fra i due numeri complessi si desumono le formule di addizione del coseno e del seno:

$$\cos(\alpha+\beta) = (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta), \quad \sin(\alpha+\beta) = (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta).$$

Si ragiona allo stesso modo per le formule di sottrazione.

---

[10] **Euler**, Leonhard, matematico svizzero, 1707-1783.

[11] Cfr.:Unità 59: Successioni e progressioni, N° 59.3.2,

VERIFICHE [12]

Risolvere le seguenti questioni relative alle proprietà delle funzioni derivabili, compreso il teorema di de L'Hôpital (nn. 1-8):

1. Determinare i punti di Lagrange relativi alla seguente funzione:

a) $f(x) = x^3 - 2x^2$, con $-1 \le x \le 2$. b) $f(x) = \sqrt{x^2+9}$, con $0 \le x \le 4$.

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, con $-1 \le x \le 1$. d) $f(x) = 2\sin x + 1$, con $0 \le x \le 2\pi$.

2. Fornire esempi di funzioni per le quali non esiste alcun punto di Lagrange se viene a cadere almeno una delle ipotesi previste dal teorema omonimo.

3. Fornire un'interpretazione geometrica del teorema di Rolle e qualche esempio di funzione per la quale non esiste alcun punto di Rolle se viene a cadere qualcuna delle ipotesi previste dal teorema.

4. Enunciare il teorema di Cauchy precisando quali sono le ipotesi e qual è la tesi. Fornire qualche esempio di funzioni f(x), g(x) che soddisfano alle ipotesi del teorema di Cauchy per $x \in [a,b]$ e determinare un punto $c \in]a,b[$ per il quale è soddisfatta la tesi.

5. Enunciare il teorema di de L'Hôpital (magari solo nel caso di una forma indeterminata del tipo $0/0$), precisando quali sono le ipotesi e qual è la tesi. Fornire qualche esempio che mostri come le ipotesi esprimano una condizione non necessaria per la tesi.

6. I limiti delle seguenti funzioni danno luogo ad indeterminazioni dei tipi $0/0$ o ∞/∞. Calcolarli ricorrendo al teorema di de L'Hôpital e verificare l'esattezza del risultato per mezzo di un software matematico.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{3x}$. b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x}$. c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$.

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(2x+1)}{x}$. e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{\ln x}$. f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^2}$.

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2-x^2-2\cos x}{2x^2}$. h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin x + \cos x - 1}{x^2}$. i) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{-x}+\ln x}{x}$.

l) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{5^x}{x^5}$. m) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x \ln x}{2x}$. n) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x\,(x-1)^2}{\ln^2 x}$.

o) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x^{25}}$. p) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1+\cos \pi x}{x^2-1}$. q) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-\cos 2\pi x}{(x-1)^2}$.

7. I limiti delle seguenti funzioni danno luogo ad indeterminazioni dei tipi $0\cdot\infty$ o $\infty-\infty$. Calcolarli ricorrendo al teorema di de L'Hôpital e verificare l'esattezza del risultato per mezzo di un software matematico.

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} (x\ln x)$. b) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^2 e^x)$. c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left((e^x-1)\ln x\right)$.

d) $\lim\limits_{x\to 0^+} (x\ln^2 x)$. e) $\lim\limits_{x\to +\infty} (e^x - x)$. f) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\ln x + \dfrac{1}{x}\right)$.

8. I limiti delle seguenti funzioni danno luogo ad indeterminazioni dei tipi 0^0, ∞^0 o 1^∞. Calcolarli e verificare l'esattezza del risultato per mezzo di un software matematico.

[12] I problemi (o gli esercizi) contrassegnati col simbolo ® sono risolti (totalmente o parzialmente) e la risoluzione è situata nella cartella "Integrazione 2", file "Matematica – Integrazione 2, unità 28-88", pubblicata in questo medesimo sito e scaricabile gratuitamente.

a) $\lim_{x\to 0^+} x^{\sqrt{x}}$. b) $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{e^x-1}$. c) $\lim_{x\to 0^+} (e^x-1)^x$.

d) $\lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^x$. e) $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{2}{x^2}}$. f) $\lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2-x}\right)^{2x}$.

Questioni varie (9-25).

9. La funzione reale di variabile reale f(x) è continua nell'intervallo chiuso e limitato [1,2] e derivabile nell'intervallo aperto]1,2[. Si sa che f(1)=1 e inoltre $0{,}5<f'(x)<1$ per ogni $x\in]1,2[$. Spiegare in maniera esauriente perché risulta $1{,}5<f(2)<2$.

10. Stabilire se alla funzione: $f(x)=\sqrt{|x|}+2$, $x\in[-1,2]$, è applicabile il teorema di Lagrange.

11. Si consideri la funzione:

$$f(x)=\frac{2x+3\sin x}{3x-2\sin x}.$$

1. A) È una forma indeterminata per $x\to 0$?
   B) Lo è per $x\to+\infty$ e per $x\to-\infty$: di che tipo?
2. A) Si calcoli con qualche artificio il limite di f(x) per $x\to 0$, per $x\to+\infty$ e per $x\to-\infty$.
   B) Si può applicare il teorema di de L'Hôpital per il calcolo di questi limiti?

12. Si consideri la funzione:

$$f(x)=\frac{4x+3\cos x}{2x+3\cos x}.$$

1. A) È una forma indeterminata per $x\to 0$?
   B) Lo è per $x\to+\infty$ e per $x\to-\infty$: di che tipo?
   C) Qual è il limite di f(x) per $x\to 0$?
2. A) Si calcoli con qualche artificio il limite di f(x) per $x\to+\infty$ e per $x\to-\infty$.
   B) Si può applicare il teorema di de L'Hôpital per il calcolo di questi due limiti?

13. Si considerino le seguenti funzioni:

$$f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}},\quad g(x)=(1-x)^{\frac{1}{x}}.$$

Di entrambe si può calcolare il limite: a) per $x\to+\infty$? b) per $x\to-\infty$? c) per $x\to 0$?
Dei limiti suddetti calcolare quelli che esistono.

14. È data la funzione:

$$f(x)=\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)^{x-1}.$$

Calcolarne, se e quando esistono, i limiti per $x\to 0$, $x\to 1$, $x\to -1$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$.

15. Dire, formalizzando la questione e utilizzando il teorema di Lagrange, se è vero che «se un automobilista compie un viaggio senza soste in cui la velocità media è 60 km/h, allora almeno una volta durante il viaggio il tachimetro dell'automobile deve indicare esattamente 60 km/h».
[Quesito tratto dall'esame di Stato 2001, indirizzo sperimentale, sessione ordinaria]

16. ESERCIZIO RISOLTO. Dimostrare, usando il teorema di Rolle, che se l'equazione:

$$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0$$

ammette radici reali, allora fra due di esse giace almeno una radice dell'equazione:

$$n\,x^{n-1}+(n-1)\,a_{n-1}\,x^{n-2}+\ldots+a_1=0.$$

[Quesito tratto dall'esame di Stato 2003, indirizzo sperimentale, sessione ordinaria.]
RISOLUZIONE. Posto: $p(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$, se x' ed x" (con $x'<x''$) sono zeri reali del po-

linomio $p(x)$, allora $p(x')=0$ e $p(x'')=0$. Constatato che $p(x)$ è una funzione continua nell'intervallo $[x',x'']$ e derivabile in $]x',x''[$, per il teorema di Rolle esiste un punto c, con $x'<c<x''$, tale che $p'(c)=0$. Siccome: $p'(x)=n\,x^{n-1}+(n-1)a_{n-1}\,x^{n-2}+...+a_1$, resta dimostrato quanto si voleva.

17. ESERCIZIO RISOLTO. Si consideri la seguente funzione reale di variabile reale:

$$f(x) = \operatorname{asin} x + \operatorname{acos} x.$$

Un idoneo software matematico mostra che si tratta di una funzione costante. Dimostrare analiticamente questo fatto, utilizzando le proprietà delle derivate. Calcolare, in particolare, il valore di tale costante.

RISOLUZIONE. La funzione è definita e continua nell'intervallo chiuso e limitato $-1\le x\le 1$. Calcoliamone la derivata:

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0.$$

La funzione, dunque, è derivabile nell'intervallo aperto $-1<x<1$. Essa, pertanto, in virtù del teorema di Lagrange, è costante nel suo dominio. D'altra parte, si trova facilmente che:

$$f(0)=\operatorname{asin} 0+\operatorname{acos} 0=\frac{\pi}{2}\,.$$

In conclusione, risulta: $f(x)=\pi/2$.

In realtà, quest'uguaglianza si può spiegare facilmente senza ricorrere alle derivate. Se, infatti, si pone $\operatorname{asin} x=t$, allora è $\sin t=x$. Analogamente, se si pone $\operatorname{acos} x=t'$, allora è $\cos t'=x$. Come dire che t e t' sono due angoli tali che il seno dell'uno è uguale al coseno dell'altro e, perciò, sono complementari, per cui $t+t'=\pi/2$. Si ha, dunque: $\operatorname{asin} x+\operatorname{acos} x=\pi/2$.

AVVERTENZA. Se si utilizza un software matematico per tracciare l'andamento della funzione, senza limitazioni per x, può capitare che il grafico si sviluppi da $-\infty$ a $+\infty$, invece che da -1 a $+1$. Ciò accade quando il software gestisce il calcolo simbolico e in particolare il calcolo con i numeri complessi. In effetti, i valori $\operatorname{asin} x$ e $\operatorname{acos} x$, per ogni x esterno all'intervallo $[-1,1]$ sono due numeri complessi, la cui somma è comunque $\pi/2$. Precisamente:

- se $x>1$ allora $\operatorname{asin} x=\frac{\pi}{2}-ai$ e $\operatorname{acos} x=ai$;
- se $x<-1$ allora $\operatorname{asin} x=-\frac{\pi}{2}+bi$ e $\operatorname{acos} x=\pi-bi$;

essendo a, b numeri reali, dipendenti dal valore che si attribuisce ad x.

18. ® Si consideri la seguente funzione reale di variabile reale:

$$f(x) = \operatorname{atan} x - \operatorname{atan}\frac{x-1}{x+1}\,.$$

Un idoneo software matematico mostra che si tratta di una funzione "costante a tratti". Dimostrare analiticamente questo fatto, utilizzando le proprietà delle derivate.

19. Qual è limite della funzione $f(x)=x-\ln x$, per $x\to+\infty$?

[A] 0; [B] un valore finito diverso da 0; [C] $+\infty$; [D] $-\infty$.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

[Quesito tratto dall'esame di Stato 2006, liceo scientifico, sessione straordinaria]

20. ® Utilizzando il teorema di Lagrange, dimostrare che, per ogni intervallo reale $[\alpha,\beta]$ si ha:

$$|\sin\beta-\sin\alpha|\le|\beta-\alpha| \quad\text{e}\quad |\cos\beta-\cos\alpha|\le|\beta-\alpha|.$$

21. Utilizzando il teorema di Lagrange, dimostrare che, per ogni $x>-1$, si ha:

$$\frac{x}{x+1}<\ln(x+1)<x\,.$$

Verificare, in particolare, che risulta: $0{,}047<\ln 1{,}05<0{,}050$.

[**R.** Suggeriamo di riflettere sulla funzione $\ln x$ nell'intervallo $[1, x+1]$].

22. Considerata la funzione:

$$f(x) = \frac{3^{3x} - a^x}{6^x - 5^x},$$

dove a è una costante reale positiva, si determini tale costante sapendo che $\lim_{x\to 0} f(x) = 2$. [**R.** $75/4$]

[Quesito tratto dall'esame di Stato 2010, liceo scientifico, sessione straordinaria]

23. Dimostrare le seguenti proprietà dei polinomi:

a) Se α è uno zero semplice (cioè contato una sola volta) di un polinomio $P(x)$ allora non è uno zero della derivata $P'(x)$.

b) Considerato un polinomio $P(x)$ di grado n, se α è un suo zero di molteplicità r (cioè contato r volte), con $r \le n$, allora è anche uno zero di $P'(x)$ ma con molteplicità $r-1$.

24. Si consideri la successione di termine generale:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}.$$

a) Dimostrare che è convergente. A quale valore converge?

b) Dimostrare che, per ogni intero positivo n, si ha $a_n > e$, dove "e" è il celebre numero di Nepero.

Si tratta di un interessante esercizio, almeno nella seconda parte, che vogliamo risolvere con la tua collaborazione.

RISOLUZIONE (traccia). Lasciamo a te la prima parte e andiamo ad occuparci della seconda. Utilizzando gli sviluppi di McLaurin, si dimostra in via preliminare che, per $0<x<1$, si ha:

$$\ln\frac{1+x}{1-x} > 2x.$$

Da qui, ponendo $x = \frac{1}{2n+1}$, segue: $\ln\frac{n+1}{n} > \frac{2}{2n+1}$.

La continuazione è semplice.

25. Determinare il numero reale *a* in modo che il valore di

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x^a}$$

sia un numero reale non nullo.

[Quesito tratto dall'esame di Stato 2017, liceo scientifico, sessione ordinaria]

[**R.** $a=3$, il limite è $-1/6$]

Trovare il polinomio di Taylor della seguente funzione, centrato in 0 ed almeno di ordine 4 (che è come dire: Sviluppare secondo potenze di x (serie di McLaurin) la seguente funzione almeno fino al termine di 4° grado – nn. 26-35):

26. e^{2x}; $e^{\frac{x}{2}}$. $\left[\textbf{R.}\ e^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + \cdots;\right]$

27. $\cos 2x$; $\cos\frac{x}{2}$. $\left[\textbf{R.}\ \cos 2x = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - \cdots;\right]$

28. $\sin 2x$; $\sin\frac{x}{2}$. $\left[\textbf{R.}\ \sin 2x = 2x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 - \cdots;\right]$

29. $\ln(1+2x)$; $\ln(1-x)$. $\left[\textbf{R.}\ \ln(1+2x) = 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 - 4x^4 + \cdots;\right]$

30. $\operatorname{atan}(x+1)\,;\operatorname{atan}(-2x)$. $\left[\mathbf{R}.\ \operatorname{atan}(x+1)=\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}-\frac{x^4}{40}+\cdots;\right]$

31. $\sqrt{1+x};\ \sqrt{1-x}$. $\left[\mathbf{R}.\ \sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}+\cdots;\right]$

32. $\frac{x^2-1}{x^2+1}$. $[\mathbf{R}.-1+2x^2-2x^4+\cdots-(-1)^n\cdot 2x^{2n}+\cdots]$

33. $\frac{x^3+2}{1-x}$. $[\mathbf{R}.\,2+2x+2x^2+3x^4+\cdots+3x^n+\cdots]$

34. $e^{\sin x}$. $\left[\mathbf{R}.\ 1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}-\frac{x^5}{15}-\cdots\right]$

35. $\cos\ln(1+x)$. $\left[\mathbf{R}.\ 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{5x^4}{12}+\cdots\right]$

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE.

DOMANDE.

1. La funzione reale di variabile reale f(x) è continua nell'intervallo chiuso e limitato [0,1] e derivabile nell'intervallo aperto]0,1[. Si sa che f(0)=0 e inoltre $0\le f'(x)\le 1$ per ogni $x\in]0,1[$. È vero che risulta $0\le f(1)\le 1$?
2. È vero che alla funzione $f(x)=\sqrt{x^2}$, con $x\in[-1,1]$, è applicabile il teorema di Rolle?
3. Se le funzioni f(x) e g(x), entrambe tendenti a 0 quando $x\to a$, non soddisfano alle condizioni previste dal teorema di de L'Hôpital, non è possibile calcolare il limite di f(x)/g(x) quando $x\to a$. È vero o falso?
4. Si consideri la funzione:
$$f(x)=\frac{2x-\cos x}{3x+2\cos x}.$$
Per $x\to\pm\infty$ è una forma indeterminata: di che tipo? Esiste il suo limite per $x\to\pm\infty$? Si può applicare il teorema di de L'Hôpital?
5. Sia D il dominio della funzione reale di variabile reale f(x). Per ogni $x\in D$ risulta $f'(x)=0$. È vero o è falso che f(x) è costante in D?
6. È vero che la funzione $f(x)=\operatorname{asin}x+\operatorname{acos}x$ è costante nell'intervallo]−1,1[?
7. Considerata la funzione $f(x)=\tan x$ e constatato che:
$$\frac{f\left(\frac{3}{4}\pi\right)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{3}{4}\pi-\frac{\pi}{4}}=-\frac{4}{\pi},$$
si può concludere che, in virtù del teorema di Lagrange, esiste un punto a, appartenente all'intervallo $\left]\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right[$ tale che $f'(a)=-\frac{4}{\pi}$?
8. Utilizzando il teorema di Lagrange, fornire un'esauriente spiegazione della ragione per cui 0,007 si può considerare un'approssimazione di $\ln\frac{129}{128}$ con tre cifre decimali esatte.

RISPOSTE.

1. Per rispondere basta ricorrere al teorema di Lagrange. Infatti, essendone soddisfatte le condizioni per applicarlo, esiste un punto u, interno all'intervallo $]0,1[$ tale che $\frac{f(1)-f(0)}{1-0} = f'(u)$; d'altra parte, come per ogni x dell'intervallo $]0,1[$, anche $f'(u)$ è compresa fra 0 ed 1. Dunque: $0 \le \frac{f(1)-f(0)}{1-0} \le 1$ e da qui, per le ipotesi fatte, segue $0 \le f(1) \le 1$. La risposta perciò è "sì".
2. No. Infatti, pur essendo f(x) continua in $[-1,1]$ e pur essendo $f(-1)=f(1)$, f(x) non è derivabile in ogni punto dell'intervallo $]-1,1[$: esattamente non è derivabile per $x=0$.
3. È falso, dal momento che il teorema di de L'Hôpital esprime una condizione sufficiente, ma non necessaria, per il calcolo del limite.
4. Si tratta evidentemente di una forma indeterminata del tipo ∞/∞. Non è possibile applicare il teorema di de L'Hôpital dal momento che le funzioni $N(x)=2x-\cos x$ e $D(x)=3x+2\cos x$ non ammettono limite per $x \to \pm\infty$. Si ha tuttavia:
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x-\cos x}{3x+2\cos x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2-\frac{\cos x}{x}}{3+\frac{2\cos x}{x}} = \frac{2}{3}.$$
5. È falso, dal momento che il dominio D potrebbe non essere un intervallo, come accade per esempio con la funzione: $f(x)=\begin{cases} -1 \text{ se } x<0 \\ 1 \text{ se } x>0 \end{cases}$. Essa ha come dominio $\mathbb{R}_0$, in tale dominio risulta $f'(x) = 0$ e tuttavia f(x) non è costante nel suo dominio (è però "costante a tratti"). Se, al contrario, D è un intervallo, allora certamente, in virtù del teorema di Lagrange, f(x) è costante in D.
6. È così. La cosa può essere dimostrata, oltre che direttamente (dovresti saperlo già), anche mediante il teorema di Lagrange. Constatato infatti che si ha:
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$
in ogni $x \in]-1,1[$, ne consegue che f(x) è costante in $]-1,1[$. Di più: siccome $f(0)=\pi/2$, si ha: $\operatorname{asin} x + \operatorname{acos} x = \pi/2$ per $x \in]-1,1[$.
7. No. La funzione non è continua nell'intervallo considerato: essa, infatti, non è definita in $\pi/2$, che è un punto dell'intervallo. Il teorema di Lagrange, pertanto, non può essere applicato e, di conseguenza, il punto potrebbe esistere o non esistere, ma per ragioni che nulla hanno a che fare con il teorema di Lagrange. Nel caso specifico un tale punto non esiste.
Se consideriamo, invece, la funzione $g(x)=\frac{1}{x^2-1}$, si può constatare che $\frac{g(2)-g(-2)}{2-(-2)}=0$, ma, di nuovo non si può affermare che, per il teorema di Lagrange, esiste un punto a, appartenente all'intervallo $]-2,2[$ tale che $g'(a) = 0$, giacché la funzione non è continua in tale intervallo. Un tale punto, pertanto, può esistere o non esistere, ma sempre per ragioni che nulla hanno a che fare con il teorema di Lagrange. In effetti, questa volta, il punto esiste: è il punto 0, come si può controllare facilmente.
8. Bisogna ricordare che per $x>0$ risulta: $\frac{1}{x+1} < \ln\frac{x+1}{x} < \frac{1}{x}$. Relazione che è possibile dimostrare utilizzando appunto il teorema di Lagrange. Nel nostro caso, in cui $x=128$, si ha dunque: $\frac{1}{129} < \ln\frac{129}{128} < \frac{1}{128}$. Essendo $\frac{1}{29}=0{,}0077\ldots$ e $\frac{1}{128}=0{,}0078\ldots$, segue: $0{,}0077 < \ln\frac{129}{128} < 0{,}0079$. Se ne desume che il valore del logaritmo è certamente esatto fino alla 3ª cifra decimale, per cui $\ln\frac{129}{128}=0{,}007\ldots$. Cosa che peraltro può essere controllata con una semplice calcolatrice scientifica.