Prerequisiti:
- Conoscere e utilizzare le tecniche di calcolo numerico e letterale.
- Avere consapevolezza dei concetti fondamentali della geometria piana (in particolare: punto medio di un segmento, bisettrice di un angolo, parallelismo, perpendicolarità, parallelogrammi, distanze, vettori piani, isometrie particolari, teoremi di Pitagora e di Euclide).
- Saper risolvere semplici equazioni di 1° grado

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:

- *determinare il punto medio e la lunghezza di un segmento, di dati estremi, contenuto in una retta cartesiana oppure in un piano cartesiano*
- *operare con i vettori nel piano cartesiano*
- *determinare le equazioni di una traslazione e delle simmetrie rispetto all'asse x, all'asse y, all'origine*
- *utilizzare con consapevolezza le equazioni di particolari isometrie piane*
- *risolvere semplici problemi di geometria sulla retta cartesiana*

L'unità è indirizzata agli studenti del primo biennio di tutte le scuole superiori.

18.1 Geometria sulla retta cartesiana.
18.2 Vettori e traslazioni nel piano cartesiano.
18.3 Punto medio di un segmento. Distanza di due punti.
18.4 Vettori e geometria.

Verifiche.
Una breve sintesi per domande e risposte.
Appendice.

N.B.: In qualche dimostrazione ed in qualche esercizio si presuppone di saper risolvere questioni del genere seguente: «Dati due numeri reali a, b, trovare un numero reale x tale che ax=b oppure a+x=b». Non occorre uno studio preventivo della teoria delle equazioni (che tuttavia non si esclude). Basta infatti il semplice ricorso alle proprietà delle operazioni con i numeri reali.

Retta cartesiana. Vettori e traslazioni nel piano cartesiano

Unità 18

18.1 GEOMETRIA SULLA RETTA CARTESIANA

18.1.1 Ci occupiamo in questo paragrafo della geometria su una ***retta cartesiana***, vale a dire, cosa che già sai [1], su una retta sulla quale sia stato stabilito un riferimento cartesiano (O,U).
Incominciamo col prendere in considerazione i segmenti orientati contenuti in una retta cartesiana, che sappiamo essere una particolare retta orientata.
Sappiamo intanto che il segmento orientato AB si indica con la scrittura (A,B) ed è diverso dal segmento orientato (B,A); anzi (A,B) e (B,A) sono due ***segmenti opposti***.
Si definisce ***misura del segmento orientato*** (A,B) il numero reale — che possiamo indicare con **(A,B)** – tale che, indicata con dist(A,B)), la distanza dei punti A e B, ovvero la lunghezza del segmento non orientato AB, risulti:

$$(A,B) = \text{dist}(A,B) \quad \text{oppure} \quad (A,B) = -\,\text{dist}(A,B)$$

secondo che, nell'ordine fissato sulla retta orientata che contiene il segmento, avvenga rispettivamente che A *precede o coincide* con B (si scrive: $A \preccurlyeq B$ – Fig. 1a) oppure A *segue* B (si scrive: $A \succ B$ – Fig. 1b). In ogni caso, si ha: $(A,B) = -\,(B,A)$.

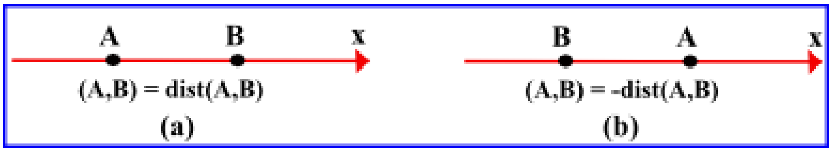

FIG. 1

Nel caso in cui dovessero crearsi equivoci indicheremo con la scrittura **mis(A,B)** la misura del segmento orientato (A,B)**.** Per quanto concerne invece la distanza dist(A,B) dei punti A, B, la indicheremo anche con d(A,B) o semplicemente con $\overline{AB}$ o addirittura con AB.

18.1.2 Le misure di un segmento orientato e di un segmento non orientato si possono esprimere per mezzo delle ascisse dei suoi estremi. Per stabilire in che modo ciò sia possibile, è necessario esaminare diverse situazioni.
Anzitutto possiamo osservare che, quali che siano i punti A e B della retta cartesiana, la loro distanza dist(A,B) risulta uguale al valore assoluto sia della misura del segmento orientato (A,B) sia della misura del segmento orientato (B,A). Vale a dire, scritto in simboli:

$$\text{dist}(A,B) = |(A,B)| = |(B,A)|\,.$$

Inoltre possiamo supporre che A non segua B nell'ordine prefissato sulla retta cartesiana, per cui (Fig. 1a): (A,B)=dist(A,B); se infatti A segue B (Fig. 1b) basta osservare che si ha: (B,A)=–(A,B).
Allora, considerati i punti A, B (con $A \preccurlyeq B$) sulla retta cartesiana x, di origine O, tralasciati i casi banali in cui almeno uno dei punti A, B coincide con O, esaminiamo tutte le possibili situazioni che si possono presentare. Vale a dire: $O \prec A \preccurlyeq B,\ A \prec O \prec B,\ A \preccurlyeq B \prec O$.

- Nel PRIMO CASO, nel quale il punto A cade tra O escluso e B incluso (Fig. 2a), risulta:

  $$\overline{OA}+\overline{AB}=\overline{OB},$$

  da cui, ricordando che $\overline{OA}=x_A$ e $\overline{OB}=x_B$, segue: $x_A+\overline{AB}=x_B$ e perciò:

  $$\overline{AB}=x_B-x_A.$$

[1] Cfr.: Unità 11: Funzioni e grafici, N° 11.2.2.

- Nel SECONDO CASO, nel quale il punto O cade tra A e B esclusi (Fig. 2b), risulta:

$$\overline{AO}+\overline{OB}=\overline{AB},$$

ossia, osservando che $\overline{AO}=-x_A$ e $\overline{OB}=x_B$, risulta: $-x_A+x_B=\overline{AB}$; ovvero:

$$\overline{AB}=x_B-x_A.$$

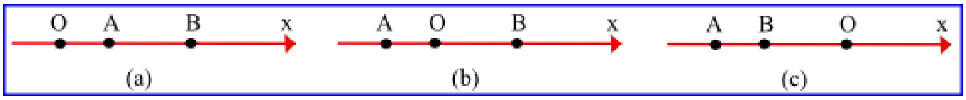

FIG. 2

- Nel TERZO CASO, nel quale B cade tra A incluso ed O escluso (Fig. 2c), risulta:

$$\overline{AB}+\overline{BO}=\overline{AO},$$

ossia, dal momento che $\overline{BO}=-x_B$ e $\overline{AO}=-x_A$, risulta: $\overline{AB}-x_B=-x_A$; e quindi:

$$\overline{AB}=x_B-x_A.$$

Dunque, in tutti e tre i casi (ma anche in quelli in cui uno dei punti A, B coincide con O) si ha:

$$\overline{AB}=x_B-x_A.$$

Pertanto: $(A,B)=x_B-x_A$. E poiché, come precisato, $(B,A)=-(A,B)$, risulta: $(B,A)=x_A-x_B$.

In conclusione:

Comunque vengano presi i punti P, Q su una retta cartesiana, risulta:

$$(\mathbf{P},\mathbf{Q})=\mathbf{x_Q}-\mathbf{x_P}$$

e, di conseguenza:

$$\mathbf{dist}(\mathbf{P},\mathbf{Q})=|\mathbf{x_Q}-\mathbf{x_P}|.$$

ESEMPI:

- Se A(5) e B(12), risulta (Fig. 3):

  $(A,B)=x_B-x_A=12-5=7$; $(B,A)=x_A-x_B=5-12=-7$; $\text{dist}(A,B)=|x_B-x_A|=|12-5|=7$.

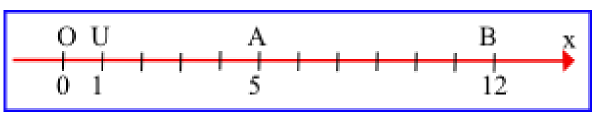

FIG. 3

- Se $A\left(\frac{1}{2}\right)$ e $B\left(-\frac{2}{3}\right)$ risulta (Fig.4):

  $(AB)=x_B-x_A=\left(-\frac{2}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{7}{6}$; $(BA)=x_A-x_B=\left(\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{7}{6}$; $\text{dist}(A,B)=|x_B-x_A|=\left|-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right|=\frac{7}{6}$.

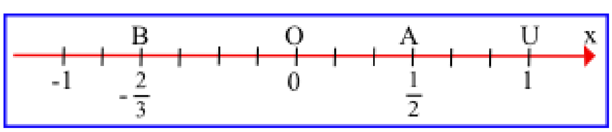

FIG. 4

Adesso alcuni esercizi per te.

1. Su una retta cartesiana sono presi, in maniera arbitraria, i punti A, B, C, D. Dimostrare che si ha:

$$(A,B)\cdot(C,D)+(A,D)\cdot(B,C)=(A,C)\cdot(B,D)\ .$$

2. Su una retta cartesiana rappresenta i punti A e B e determina (A,B), (B,A), d(A,B), sapendo che:

1) $A(-2),\ B(5)$; 2) $A(3),\ B(-1)$; 3) $A\left(-\frac{1}{2}\right),\ B(-4)$.

3. Fissato un riferimento cartesiano su una data retta, calcola le distanze dei punti A, B sapendo che:

a) $A(5),\ B(-3)$. b) $A\left(-\frac{3}{2}\right),\ B\left(-\frac{5}{2}\right)$. c) $A(-2.6),\ B(-5.1)$,

d) $A\left(\frac{7}{2}\right),\ B(-2)$. e) $A(5),\ B\left(-\frac{7}{3}\right)$ f) $A\left(-\frac{3}{5}\right),\ B\left(-\frac{15}{2}\right)$.

g) $A(3),\ B\left(\frac{1}{2}\right)$. h) $A\left(-\frac{3}{2}\right),\ B\left(-\frac{7}{2}\right)$ i) $A\left(\frac{5}{3}\right),\ B(-1)$.

18.1.3 Presi sulla retta cartesiana due punti $A(x_A)$ e $B(x_B)$, ci proponiamo adesso di determinare l'ascissa x_M del punto medio M del segmento AB (Fig. 5).

Prima di procedere, sei in grado di fare qualche congettura in proposito?
Per esempio, prova a stabilire qual è l'ascissa del punto medio M del segmento AB, sapendo che A e B hanno le ascisse indicate nella seguente tabella:

A	2	–2	3
B	8	–8	–4

Adesso segui il nostro ragionamento per controllare se hai proceduto correttamente e, se del caso, ritorna sulla richiesta precedente.
Osserviamo anzitutto che, comunque siano disposti i punti A, B, risulta: $(A,M)=(M,B)$. Siccome, poi, come abbiamo visto prima: $(A,M)=x_M-x_A$ e $(M,B)=x_B-x_M$, deve risultare:

$$x_M - x_A = x_B - x_M\ .$$

Da qui, sommando x_M+x_A ad entrambi i membri dell'uguaglianza, segue facilmente:

$$2\ x_M = x_A + x_B.$$

Infine, dividendo entrambi i membri per 2, si ottiene l'ascissa di M in funzione di quelle di A e B:

$$\mathbf{x_M = \frac{x_A + x_B}{2}}\ .$$

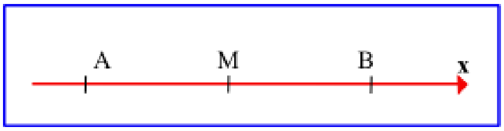

FIG. 5

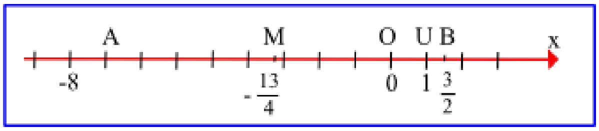

FIG. 6

Esempio. Dato il segmento di estremi $A(-8)$ e $B\left(\frac{3}{2}\right)$, il suo punto medio M ha ascissa x_M tale che (Fig. 6):

$$x_m=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{-8+\frac{3}{2}}{2}=-\frac{13}{4}.$$

ESERCIZIO. Fissato un riferimento cartesiano su una data retta, determina il punto medio del segmento AB, sapendo che:

a) $A(5),\ B(-3)$. b) $A\left(-\frac{3}{2}\right),\ B\left(-\frac{5}{2}\right)$. c) $A(-2.6),\ B(-5.1)$,

d) $A\left(\frac{7}{2}\right),\ B(-2)$. e) $A(5),\ B\left(-\frac{7}{3}\right)$ f) $A\left(-\frac{3}{5}\right),\ B\left(-\frac{15}{2}\right)$.

g) $A(3),\ B\left(\frac{1}{2}\right)$. h) $A\left(-\frac{3}{2}\right),\ B\left(-\frac{7}{2}\right)$ i) $A\left(\frac{5}{3}\right),\ B(-1)$.

18.2 VETTORI E TRASLAZIONI NEL PIANO CARTESIANO

18.2.1 Occupiamoci adesso di alcune proprietà di figure rappresentate in un piano cartesiano.
In un piano cartesiano ortogonale (Oxy) sia dato un vettore $\vec{v}$, rappresentato dal segmento orientato (A,B); sicché $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$ (Fig. 7).
Consideriamo le proiezioni ortogonali, supposte orientate, del vettore sugli assi coordinati: (A',B') sia la proiezione sull'asse x; (A",B") quella sull'asse y. I due numeri reali a, b rispettivamente uguali alle misure dei segmenti orientati (A',B'), (A",B") si chiamano ***le componenti*** di $\vec{v}$ secondo gli assi cartesiani. Si scrive:

$$\vec{\mathbf{v}}(\mathbf{a},\mathbf{b})$$

e si legge: «il vettore $\vec{v}$ di componenti (a,b)».

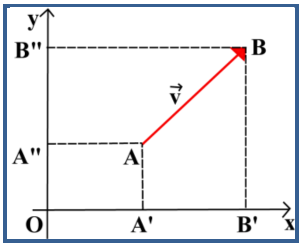

FIG. 7

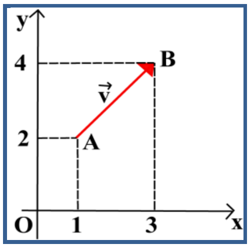

FIG. 8

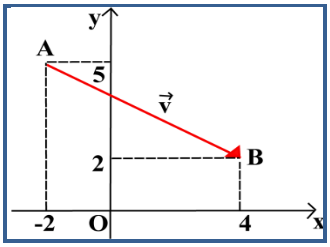

FIG. 9

Esempi:
1) Il vettore $\vec{v}$, rappresentato dal segmento orientato (A,B) di figura 8, ha come componenti secondo gli assi cartesiani la coppia ordinata (2, 2); dunque: $\vec{v}(2,2)$.
2) Il vettore $\vec{v}$, rappresentato dal segmento orientato (A,B) di figura 9, ha come componenti secondo gli assi cartesiani la coppia ordinata (6,–3); dunque: $\vec{v}(6,-3)$.

Non è difficile spiegare che:
Le componenti di un vettore non dipendono dal segmento orientato che è stato scelto per rappresentarlo, ma solo dal vettore e dal riferimento cartesiano prefissato.
Noi, comunque, omettiamo la spiegazione. Ad ogni modo, in virtù di questo fatto:
Ad ogni vettore, assegnato in un determinato piano cartesiano, resta associata una ed una sola coppia ordinata di numeri reali, quella formata dalle componenti del vettore secondo gli assi coordinati.
Viceversa, fissata una coppia ordinata (a,b) di numeri reali, è individuato il vettore che ha quei numeri come componenti secondo un sistema di assi cartesiani.
Basta prendere il punto A sull'asse x (Fig. 10) in modo che la misura del segmento orientato (O,A) sia a ed il punto B sull'asse y in modo che la misura del segmento orientato (O,B) sia b e costruire il punto P, quarto vertice del rettangolo BOAP. Il vettore $\overrightarrow{OP}$ è il vettore di componenti (a,b).

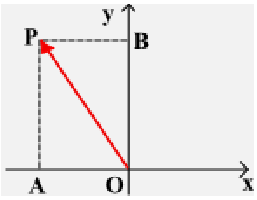

FIG. 10

Ti proponiamo, per esercizio, di disegnare – in un piano cartesiano ortogonale (Oxy) – un segmento orientato che rappresenti il vettore $\vec{v}$ di componenti a, b sapendo che:

$$1)\ a=2,\ b=3; \quad 2)\ a=-1,\ b=2; \quad 3)\ a=-\frac{3}{2},\ b=-2; \quad 4)\ a=\frac{2}{3},\ b=-\frac{5}{2}.$$

18.2.2 Ti proponiamo, ancora, di giustificare la seguente proposizione (puoi riferirti alla Fig. 7):

- TEOREMA. Se il vettore $\vec{v}$ è rappresentato dal segmento orientato (A,B) e se $A(x_A,y_A)$ e $B(x_B,y_B)$ allora le componenti del vettore secondo gli assi cartesiani prefissati sono:

$$x_B - x_A,\quad y_B - y_A.$$

Risolvi quindi il seguente esercizio.

Trova le componenti del vettore $\overrightarrow{AB}$ secondo gli assi cartesiani e rappresenta il vettore medesimo, sapendo che:

$$a)\ A(2,3),\ B(1,-1). \qquad b)\ A\left(-\frac{1}{3},\frac{3}{5}\right),\ B\left(\frac{1}{3},\frac{3}{5}\right).$$

Del teorema precedente vogliamo fornire un'interessante applicazione alla risoluzione di un problema.

- PROBLEMA. Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnati i punti: $A(2,-1)$, $B(1,3)$, $C(-3,-2)$. Determinare il punto D in modo che il quadrilatero ABCD sia un parallelogramma.

RISOLUZIONE. Deve essere evidentemente (Fig. 11): $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$; perciò, passando alle componenti dei due vettori uguali, risulta:

$$x_D - x_A = x_C - x_B\,,\quad y_D - y_A = y_C - y_B\,.$$

Da queste due relazioni si ricava facilmente:

$$x_D = x_A + x_C - x_B\,,\quad y_D = y_A + y_C - y_B\,.$$

Pertanto, dopo aver sostituito i valori numerici e dopo aver semplificato: $x_D=-2$, $y_D=-6$.

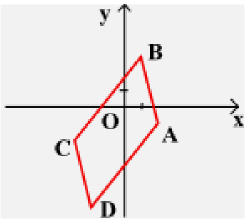

FIG. 11

ESERCIZI. Supposto che il piano sia riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy):

1. Sono dati i punti $A(5,2)$ e $B(1,4)$. Determinare graficamente e analiticamente il punto C tale che:

   a) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$ [**R.** $C(3,3)$]; b) $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}$ [**R.** ...]; c) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$ [**R.** impossibile].

2. Sono dati i punti $A(1,-2)$, $B(2,1)$ e $C(-2,0)$. Determinare graficamente e analiticamente il quarto vertice D del parallelogramma:

   a) ABCD [**R.** $D(-3,-3)$]; b) ABDC [**R.** $D(-1,3)$]; c) ADBC [**R.** $D(5,-1)$].

3. Determinare le coordinate del vertice D del parallelogramma ABCD, sapendo che:

   a) $A(2,3),\ B\left(-\frac{1}{2},-2\right),\ C(0,1)$. b) $A(1,1),\ B(2,2),\ C(3,0)$.

   c) $A(-2,1),\ B(1,-2),\ C\left(\frac{5}{3},1\right)$. d) $A\left(\frac{5}{3},0\right),\ B\left(0,\frac{7}{4}\right),\ C\left(-\frac{7}{5},-\frac{7}{4}\right)$.

18.2.3 Si chiama **prodotto di un numero reale α per un vettore $\vec{v}$** il vettore – indicato con $\boldsymbol{\alpha\vec{v}}$ – avente la stessa direzione di $\vec{v}$, lo stesso verso o verso opposto a seconda che sia $\alpha>0$ o $\alpha<0$, e modulo uguale a $|\alpha||\vec{v}|$, cioè uguale al valore assoluto di α per il modulo di $\vec{v}$.
Se $\alpha=0$ conveniamo che $\alpha\vec{v}$ sia il vettore nullo.

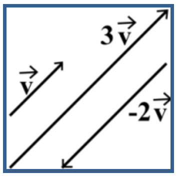

FIG. 12

In figura 12 sono rappresentati il vettore $\vec{v}$, il vettore $3\vec{v}$ e il vettore $-2\,\vec{v}$.
Vale un importante teorema sui vettori, la cui dimostrazione presuppone però una proprietà che per il momento ci limitiamo ad ammettere senza dimostrazione. Avremo modo di ritornare su di essa nel prosieguo degli studi. La proprietà è la seguente, enunciata con riferimento alla figura 13:

- PROPRIETÀ DEL RAPPORTO. Considerate due rette r ed r’, secanti in un punto O, siano R ed S due punti qualsiasi di r ed R’ ed S’ le loro proiezioni su r’. Risulta:

$$\frac{\overline{OR'}}{\overline{OS'}}=\frac{\overline{OR}}{\overline{OS}}.$$

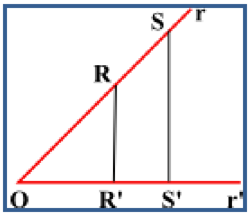

FIG. 13

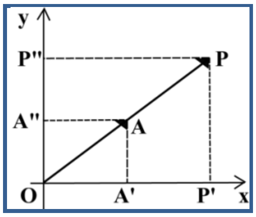

FIG. 14

Possiamo adesso enunciare e dimostrare il teorema sui vettori.

- TEOREMA. Se le componenti di un vettore $\vec{v}$ secondo gli assi coordinati prefissati sono (a,b), quelle del vettore $k\vec{v}$ sono (ka, kb).

DIMOSTRAZIONE. Sia (O,A) il segmento orientato rappresentativo del vettore $\vec{v}$ (Fig. 14).
Indicate con A’ ed A” le proiezioni di A rispettivamente sull’asse x e sull’asse y, le misure dei segmenti orientati (O,A’), (O,A”) sono rispettivamente a, b. Pertanto:

$$\overline{OA'}=|a|,\ \overline{OA''}=|b|.$$

Ammesso che sia $k\,\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OP}$, è evidentemente:

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OA}}=|k|\,.$$

Ora, in virtù della proprietà del rapporto, risulta:

$$\frac{\overline{OP'}}{\overline{OA'}}=\frac{\overline{OP}}{\overline{OA}}\quad\text{e}\quad\frac{\overline{OP''}}{\overline{OA''}}=\frac{\overline{OP}}{\overline{OA}}\,.$$

Per cui: $\dfrac{\overline{OP'}}{\overline{OA'}}=\dfrac{\overline{OP''}}{\overline{OA''}}=|k|$. Da qui segue poi: $\overline{OP'}=|k||a|,\ \overline{OP''}=|k||a|$.
D’altra parte, il prodotto dei valori assoluti di due numeri reali è uguale al valore assoluto del prodotto dei

due numeri; per questo: $|k||a|=|ka|$, $|k||b|=|kb|$. Dunque: $\overline{OP'}=|ka|$, $\overline{OP''}=|kb|$.
Ora consideriamo due casi, a seconda che sia $k>0$ oppure $k<0$ (il caso $k=0$ è banale).

Se $k>0$, il vettore $\overrightarrow{OP}$ ha lo stesso verso del vettore $\overrightarrow{OA}$, per cui anche i segmenti orientati (O,P') e (O,A') hanno lo stesso verso, così come hanno lo stesso verso i segmenti orientati (O,P") e (O,A"). Se ne desume che le misure dei segmenti orientati (O,P'), (O,P") sono rispettivamente ka, kb .

Se invece $k<0$, il vettore $\overrightarrow{OP}$ ha verso opposto a quello di $\overrightarrow{OA}$; per cui anche i segmenti orientati (O,P') e (O,A') hanno versi opposti, così come i segmenti orientati (O,P") e (O,A"). Ne deriva la stessa conclusione precedente.

In ogni caso le componenti del vettore $\overrightarrow{OP}=k\vec{v}$ sono (ka, kb). [c.v.d.]

ESERCIZIO. In un piano cartesiano ortogonale (Oxy) è assegnato il vettore $\vec{v}$, rappresentato dal segmento orientato (A,B). Determina le componenti del vettore $k\vec{v}$ e disegna un segmento orientato che lo rappresenti, sapendo che:

1) $A(0,0),\ \ B(2,3),\ \ k=2$; 2) $A(0,0),\ \ B(2,3),\ \ k=-\frac{3}{2}$;

3) $A(1,0),\ \ B(2,3),\ \ k=\frac{1}{2}$; 4) $A(1,0),\ \ B(2,3),\ \ k=-\frac{1}{2}$.

Come conseguenza del teorema precedente e ricorrendo appunto alle componenti dei vettori secondo un sistema di assi cartesiani ortogonali, si possono dimostrare (cosa che però non facciamo) le seguenti ***proprietà del prodotto di un numero reale per un vettore***:

- $1\,\vec{v}=\vec{v}$
- $\alpha(\beta\,\vec{v})=(\alpha\beta)\vec{v}$
- $(\alpha+\beta)\vec{v}=\alpha\vec{v}+\beta\vec{v}$
- $\alpha(\,\vec{v}+\vec{w})=\alpha\vec{v}+\alpha\vec{w}$

dove α, β sono numeri reali qualunque e $\vec{v},\vec{w}$ sono vettori qualunque.

18.2.4 Consideriamo, nel piano cartesiano ortogonale (Oxy) la traslazione di vettore $\vec{v}$ di componenti (a,b); o, come anche si dice più semplicemente, la ***traslazione di componenti*** (a,b).

Essa, come si sa, ad ogni punto P(x,y) del piano associa uno ed un sol punto dello stesso piano; precisamente il punto P'(x',y') tale che $\overrightarrow{PP'}=\vec{v}$.

Cosicché, passando alle componenti dei due vettori, che sono rispettivamente (x'–x, y'–y) e (a,b), deve risultare:

[1] $$\mathbf{x'-x=a}\,,\quad \mathbf{y'-y=b}\,.$$

Queste relazioni si dicono le **equazioni della traslazione** di componenti (a,b).

ESERCIZI. (Il piano s'intende riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy))

1) Disegna il triangolo di vertici: $A(1,0), B(-1,2), C(3,1)$ e rappresenta:
   a) il triangolo A'B'C' trasformato di ABC in base alla traslazione di componenti (1,–2);
   b) il triangolo A"B"C" trasformato di ABC in base alla traslazione di componenti (2,–2).
   Quali sono le componenti della traslazione che trasforma A'B'C' direttamente in A"B"C"?
   C'è una relazione tra queste componenti e quelle delle prime due traslazioni?
   Si può generalizzare?
2) Considerato il quadrilatero ABCD di vertici:

$$A(-3,2),\ \ B\left(\frac{1}{2},-1\right),\ \ C\left(\frac{5}{2},0\right),\ \ D\left(0,-\frac{17}{5}\right),$$

trova i vertici del quadrilatero in cui esso viene trasformato dalla traslazione di componenti $\left(\frac{1}{2},-2\right)$.

3) Determina i punti in cui viene trasformato il punto A$\left(-\frac{1}{2},-1\right)$ dalle traslazioni di componenti:

$$\left(\frac{1}{2},0\right);\ \ (0,1);\ \ \left(\frac{1}{2},1\right);\ \ \left(-1,\frac{1}{2}\right).$$

18.3 PUNTO MEDIO DI UN SEGMENTO. DISTANZA DI DUE PUNTI

18.3.1 Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani (Oxy), considera due qualsiasi punti A(x_A,y_A) e B(x_B,y_B). Chiamato M(x_M,y_M) il punto medio del segmento AB, risulta evidentemente $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$. Osservando ora che le componenti del vettore $\overrightarrow{AM}$ secondo gli assi coordinati sono $(x_M-x_A,\ y_M-y_A)$ e che quelle del vettore $\overrightarrow{MB}$ sono $(x_B-x_M,\ y_B-y_M)$, dall'uguaglianza dei due vettori seguono le due seguenti relazioni:

$$x_M-x_A=x_B-x_M\,,\quad y_M-y_A=y_B-y_M\,,$$

dalle quali, ragionando come nel caso analogo del segmento contenuto in una retta cartesiana, si trova:

$$\mathbf{x_M=\frac{x_A+x_B}{2}}\ ,\quad \mathbf{y_M=\frac{y_A+y_B}{2}}\ .$$

18.3.2 Applichiamo adesso il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo AHB (Fig. 15).

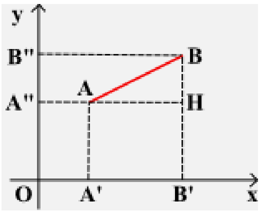

FIG. 15

Otteniamo: $\overline{AB}^2=\overline{AH}^2+\overline{HB}^2$ e perciò, dopo aver osservato che:

$$\overline{AH}=\overline{A'B'}=|x_B-x_A|\quad e\quad \overline{HB}=\overline{A"B"}=|y_B-y_A|\,,$$

si trova:

$$\mathbf{\overline{AB}=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}}\ .$$

In particolare:

- se i due punti si trovano su una retta parallela all'asse x, per cui si ha $y_A=y_B$, risulta:
$$\overline{AB}=|x_B-x_A|;$$
- se i due punti si trovano su una retta parallela all'asse y, per cui si ha $x_A=x_B$, risulta:
$$\overline{AB}=|y_B-y_A|.$$

18.3.3 ESERCIZIO. Riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), determinare il punto medio del segmento AB e la lunghezza del segmento stesso, sapendo che A$\left(\frac{3}{2},-4\right)$ e B$\left(-\frac{1}{2},2\right)$.

RISOLUZIONE. Invitandoti a disegnare la figura, indichiamo con M il punto medio del segmento AB. Si ha:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{2}\,,\quad y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{-4+2}{2}=-1\,.$$

Inoltre:

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right)^2+(2+4)^2}=\sqrt{40}\approx 6{,}3.$$

18.3.4 Alcuni esercizi da risolvere.

- Supposto che il piano sia riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), del segmento AB determinare il punto medio e la lunghezza, sapendo che:

  a) $A(2,3),\ B(2,5)$. b) $A(-1,4),\ B(4,4)$.

  c) $A(-2,3),\ B\left(\frac{3}{2},-\frac{2}{3}\right)$. d) $A\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right),\ B\left(-\frac{5}{2},\frac{3}{4}\right)$.
- Considerato il punto $P(2,-3)$, trovare le coordinate del suo simmetrico rispetto:

  a) all'asse x; b) all'asse y; c) all'origine O.
- Ammesso che siano (a,b) le componenti di un vettore rispetto ad un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali, calcolare il modulo del vettore.

LABORATORIO DI MATEMATICA

1. Hai visto come abbiamo fatto a determinare le equazioni di una traslazione. Sfruttando la stessa idea ti invitiamo a dimostrare che:
   a) le equazioni della simmetria rispetto all'asse x sono: **x' = x, y' = – y**;
   b) le equazioni della simmetria rispetto all'asse y sono: **x' = – x, y' = y**;
   c) le equazioni della simmetria rispetto all'origine O del sistema di riferimento sono: **x' = – x, y' = – y**.
   Dopo di ciò determina graficamente e analiticamente le coordinate dei punti A_1, A_2, A_3, A_4, trasformati del punto A in base rispettivamente: 1) alla traslazione di componenti (1,–1); 2) alla simmetria rispetto all'asse x; 3) alla simmetria rispetto all'asse y; 4) alla simmetria rispetto all'origine, sapendo che:

   a) $A\left(-1,\frac{1}{2}\right)$, b) $A\left(\frac{1}{3},-2\right)$, c) $A\left(\frac{2}{3},\frac{1}{4}\right)$.
2. Considera il triangolo di vertici:

   $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$, $C(x_C,y_C)$.

   Detto G_1 il punto della mediana AM tale che $AG_1=2G_1M$, trova le sue coordinate e controlla che sono le seguenti:

   [**1**] $$\left(\frac{\mathbf{x_A+x_B+x_C}}{\mathbf{3}},\ \frac{\mathbf{y+y_B+y_C}}{\mathbf{3}}\right).$$

   Prova che le coordinate del punto G_2 della mediana BN tale che $BG_2=2G_2N$ ed il punto G_3 della mediana CL tale che $CG_3=2G_3L$ hanno le stesse coordinate di G_1.
   Quale significato si deve attribuire a questo fatto? Cosa ne deduci?
   La conclusione, legittimata dal precedente ragionamento, è la seguente:
   Le tre mediane di un triangolo passano per uno stesso punto G (detto* baricentro *del triangolo), che divide ogni mediana in due parti, delle quali quella che contiene il vertice ha lunghezza doppia dell'altra, e le cui coordinate, in un riferimento cartesiano ortogonale (Oxy), sono espresse dalla [1].
3. Qualche esercizio da risolvere sulla base della precedente conclusione:
   A) Determinare graficamente e analiticamente le coordinate del baricentro del triangolo ABC, rappresentato in un piano cartesiano ortogonale (Oxy), sapendo che:

   a) $A(1,0),\ B(-3,0),\ C(0,5)$; b) $A(2,1),\ B(1,4),\ C(-2,1)$;

c) $A\left(\frac{1}{2},-\frac{2}{3}\right)$, $B\left(-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$, $C\left(0,\frac{7}{2}\right)$.

B) Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) sono assegnati il vertice A e il baricentro G del triangolo OAB. Determinare le coordinate del vertice B, sapendo che:

a) $A(2,3)$, $G\left(2,\frac{4}{3}\right)$; b) $A(-3,2)$, $G(1,3)$; c) $A(2,-1)$, $G\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$.

18.4 VETTORI E GEOMETRIA

18.4.1 L'uso dei vettori, oltre che in settori delle scienze naturali ed in particolare della Fisica, è comodo anche in Geometria per dimostrare proprietà delle figure, in ambito di geometria sia sintetica che analitica.

Una di tali proprietà, quale esempio in ambito di geometria sintetica, l'abbiamo evidenziata in una unità precedente: "Comunque si prendano i punti A, B, C, il vettore $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$ è il vettore nullo".

Altre due proprietà, quali esempi in ambito di geometria analitica, le abbiamo illustrate poco sopra e riguardano il punto medio di un segmento e il baricentro di un triangolo.

Qui vogliamo adesso occuparci di altre due proprietà: una relativa al triangolo ed una al trapezio.

18.4.2 La prima, relativa al triangolo, è in realtà una proprietà che abbiamo già avuto occasione di prendere in considerazione in una unità precedente, quando ne abbiamo fornito una dimostrazione che non coinvolgeva i vettori. Adesso la vogliamo riprendere per una dimostrazione che risulta immediata con l'uso dei vettori.

- PROPRIETÀ 1. Il segmento che unisce i punti medi di due lati di un qualunque triangolo è parallelo al terzo lato ed è lungo la metà di esso.

DIMOSTRAZIONE. Considerato il triangolo ABC e detti M ed N rispettivamente i punti medi dei lati AB e AC, risulta immediatamente:

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}.$$

Da qui, sommando membro a membro segue:

$$2\,\overrightarrow{MN}=\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}\right)+\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}\right).$$

D'altro canto, risulta: $\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{MB}$ e $\overrightarrow{AN}=-\overrightarrow{CN}$. Pertanto: $2\,\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BC}$, ovvero:

$$\overrightarrow{MA}=\frac{1}{2}\,\overrightarrow{BC}.$$

E questo conclude la nostra dimostrazione.

- PROPRIETÀ 2. Il segmento che unisce i punti medi dei lati obliqui di un trapezio è parallelo alle basi ed ha una lunghezza uguale alla semisomma delle basi stesse.

DIMOSTRAZIONE. Considerato il trapezio ABCD e detti M ed N rispettivamente i punti medi dei lati obliqui AD e BC, risulta immediatamente:

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CN}.$$

Da qui … si procede come nel caso precedente. Lasciamo la continuazione a chi legge.

18.4.3 Invitiamo adesso a risolvere qualche esercizio che utilizzi le proprietà appena dimostrate.

Esercizi.

1. Dal punto medio di un lato obliquo di un trapezio si conduce la parallela alle basi. Dimostrare che incontra l'altro lato obliquo nel punto medio del medesimo. [**R.** Conviene ragionare per assurdo]
2. Dimostrare che la corda che congiunge i punti medi di due lati di un triangolo lo divide in due parti, di cui la maggiore è 3 volte la minore.
3. La base maggiore di un trapezio è uguale ai 3/2 della base minore. La corda che congiunge i punti medi dei due lati obliqui divide il trapezio in due parti. Calcolare il rapporto fra la maggiore e la minore di esse. [**R.** 11/9]
4. Nel trapezio ABCD la base maggiore AB è il triplo della base minore che, a sua volta, è uguale all'altezza del trapezio. Sulla base minore, da parte opposta del trapezio, si costruisce il triangolo equilatero DCE. Indicati con M e N i punti medi dei lati obliqui del trapezio AD e BC nell'ordine e con P e Q i punti medi rispettivamente dei lati DE e CE del triangolo, due delle proposizioni appresso formulate sono vere e due sono false. Individuare le une e le altre e fornire un'esauriente spiegazione delle scelte operate:
   [A] Il quadrilatero ABNM è certamente un trapezio rettangolo.
   [B] Il quadrilatero MNQP è certamente un trapezio isoscele.
   [C] Il rapporto fra il quadrilatero MNCD e il quadrilatero DCQP è uguale al doppio del rapporto fra il lato e l'altezza del triangolo DCE.
   [D] La differenza fra il perimetro del quadrilatero MNCD e quello del triangolo DCE è uguale alla somma dei lati opposti MD e CN del quadrilatero.

VERIFICHE

Stabilito un riferimento cartesiano (O,U) su una data retta, risolvere le seguenti questioni (nn. 1-6):

1. Considerati tre qualsiasi punti A, B, C dimostrare che vale la cosiddetta relazione di Chasles:
$$(A,B)+(B,C)=(A,C)\ .$$
2. Determinare i simmetrici, rispetto ad O, dei seguenti punti:
$$A(-4)\quad B\left(-\frac{3}{2}\right)\quad C\left(\frac{5}{3}\right)\quad D(a)\ .$$
[**R.** ..., D'(–a)]
3. Determinare i simmetrici, rispetto al punto P di ascissa h, dei seguenti punti:
$$A(-4)\quad B\left(-\frac{3}{2}\right)\quad C\left(\frac{5}{3}\right)\quad D(a)\ .$$
[**R.** ... , D'(2h–a)]
4. Sono dati i punti A(3) e B(–2). Il punto B divide il segmento AC in due parti che, a partire da A, sono direttamente proporzionali ai numeri 2 e 3. Trovare l'ascissa di C.
$$\left[\textbf{R.}\ \text{Deve essere } \frac{(A,B)}{2}=\frac{(B,C)}{3}\text{ , per cui ... } x_C=-\frac{19}{2}\right]$$
5. Determinare il punto P che divide internamente il segmento AB, a partire da A, in parti direttamente proporzionali ai numeri 2 e 1/2, sapendo che A(–1), B(5).
6. Sapendo che A(2), B(−1/3), C(–1), determinare il punto D tale che:
a) (A,B) = (C,D) ; b) (A,C) = (B,D) ; c) (A,D) = (B,C).

Riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), risolvere le seguenti questioni (nn. 7-15):

7. Considerato il triangolo di vertici $A\left(\frac{5}{2},-\frac{2}{3}\right), B\left(-\frac{1}{2},0\right), C\left(0,\frac{3}{5}\right)$, una traslazione porta A in O. Determinare i punti in cui vengono trasformati B e C.

8. È assegnato il triangolo di vertici $A(-1,3)$, $B(-4,1)$, $C(-2,1)$. La traslazione t lo trasforma nel triangolo A'B'C' e questo viene trasformato nel triangolo A"B"C" dalla simmetria s rispetto all'asse x. Sapendo che $A''\left(\frac{5}{2},-\frac{11}{3}\right)$, determinare:

a) le equazioni della simmetria assiale s e quelle della traslazione t;
b) le coordinate dei punti B" e C".

[**R.** s: (x'=x, y'=–y), t: $\left(x'=x+\frac{7}{2},\ y'=y+\frac{2}{3}\right)$; … .]

9. È assegnato il triangolo di vertici $A(2,-1)$, $B(1,2)$, $C(0,1)$. La traslazione t lo trasforma nel triangolo A'B'C' e la simmetria assiale s rispetto all'asse y trasforma A'B'C' in A"B"C". Sapendo che A"(–3,–2), determinare:

a) le equazioni della simmetria assiale s e quelle della traslazione t;
b) le coordinate dei punti B" e C".

10. È dato il quadrilatero ABCD, di vertici $A(0,2), B\left(\frac{8}{3},\frac{10}{3}\right), C\left(\frac{13}{3},0\right), D\left(\frac{5}{3},-\frac{4}{3}\right)$. Dopo aver verificato che si tratta di un rettangolo, calcolarne l'area e il perimetro. [**R.** … ; area=100/9, perimetro=$6\sqrt{5}$]

11. È dato il quadrilatero ABCD, di vertici $A(-2,1), B\left(-\frac{2}{3},-3\right), C\left(\frac{10}{3},-\frac{5}{3}\right), D\left(2,\frac{7}{3}\right)$. Dopo aver verificato che si tratta di un quadrato, calcolarne l'area e il perimetro.

12. Determinare il punto A' simmetrico di A rispetto ad M sapendo che:

a) $M(2,-1), A(1,2)$. b) $M(x_M,y_M), A(1,3)$.
c) $M(1,-2), A(x_A,y_A)$. d) $M(x_M,y_M), A(x_A,y_A)$.

[**R.** … ; 4. $A'(2x_M-x_A,\ 2y_M-y_A)$]

13. Assegnati i punti A(–2,3) e B(2,4), determinare il punto P che divide internamente il segmento AB in due parti che, a partire da A, sono direttamente proporzionali ai numeri 2 e 3.

$\left[\textbf{R.}\ \text{Siccome}\ \frac{\overrightarrow{AP}}{2}=\frac{\overrightarrow{PB}}{3}\ \text{allora}\ \frac{1}{2}(x_P-x_A)=\frac{1}{3}(x_B-x_P)\ \text{e … ; per cui …}\right]$

14. Sono assegnati i punti A(4,3), B(0,3), C(1,2) e sia O l'origine del sistema di riferimento.

a) Si ponga l'attenzione sull'angolo convesso $A\hat{C}B$: è vero che misura quanto la somma degli angoli interni del quadrilatero concavo OACB, aventi i vertici nei punti O, A, B?
b) Calcolare il perimetro di questo quadrilatero.

15. Del triangolo ABC si conoscono le coordinate dei vertici: $A(2,3), B(-2,0), C(5,-1)$.

a) Verificare che si tratta di un triangolo isoscele.
b) Calcolarne l'area e il perimetro.

16. Del triangolo ABC si conoscono le coordinate dei vertici: $A(1,2), B\left(-\frac{1}{2},-1\right), C\left(2,-\frac{9}{4}\right)$.
Verificare che si tratta di un triangolo rettangolo. Calcolarne l'area e il perimetro.

Questioni varie:

17. Come forse sai già, nella graduazione di un termometro a mercurio, si usano solitamente due scale: la scala Celsius e la scala Fahrenheit: entrambe assumono come punti di riferimento la temperatura del ghiaccio fondente e quella dell'acqua bollente, alla pressione di 1 atmosfera. Però, la scala Celsius se-

gna 0 alla prima temperatura e 100 alla seconda, mentre la scala Fahrenheit segna 32 alla prima e 212 alla seconda. Nella scala Celsius l'intervallo tra 0 e 100 è suddiviso in 100 parti uguali; nella scala Fahrenheit l'intervallo tra 32 e 212 è suddiviso in 180 parti uguali. Considerata una qualunque temperatura, la cui misura in gradi Celsius sia C ed in gradi Fahrenheit sia F, determinare quale relazione lega C ed F.
Successivamente calcolare:
1) quanti gradi Celsius corrispondono nell'ordine a $0, 50, 100$ gradi Fahrenheit;
2) quanti gradi Fahrenheit corrispondono nell'ordine a $-15, 25, 37$ gradi Celsius;
3) se esiste una temperatura la cui misura nelle due scale è espressa dallo stesso numero.

18. Il triangolo ABC è rettangolo in C ed è isoscele. Si indichino con M ed N i punti medi dei cateti BC e AC rispettivamente e con D il punto in cui si intersecano AM e BN. Sapendo che l'ipotenusa del triangolo ABC ha lunghezza unitaria, calcolare l'area del triangolo ABD.
[**R.** Bisogna osservare che il punto D è il baricentro … . $A(ABD)=1/12$]

19. Considerato il rettangolo disegnato in figura (Fig. 16), dove a è un qualsiasi numero reale minore di -1, calcolarne il perimetro, l'area e le coordinate del centro.

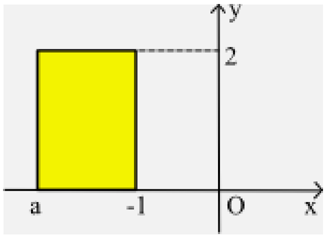

FIG. 16

20. Su una retta r sono fissati, nell'ordine, i punti $A,\ B,\ C,\ D$ in modo che risulti: $\overline{AB}=\overline{CD}=a$ e $\overline{BC}=2$. Dalla stessa parte, rispetto ad r, si costruiscono i due quadrati ABEF e CDGH. Dopo aver riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di assi cartesiani, trovare le coordinate dei vertici dei due quadrati e dei loro centri.

21. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnati i punti:
$$A(6,0),\ B(0,7),\ C(7,13).$$
1) Determinare il punto D, quarto vertice del parallelogramma ABCD.
2) Verificare che ABCD è un quadrato.
3) Considerato il quadrato A'B'C'D', trasformato di ABCD in base alla traslazione che muta il punto D nel punto $D'(20,6)$, determinare le coordinate del suo centro.
4) Calcolare la distanza dei centri dei due quadrati ABCD e A'B'C'D'.

$\left[\textbf{R.}\ 1)\ (13,6);\ 2)\ldots;\ 3)\ \left(\frac{27}{2},\frac{13}{2}\right);\ \ 4)\ 7\right]$

22. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) è assegnato il triangolo di vertici O(0,0), A(4,0), B(3,4). Si prendano il punto P sul lato OA, il punto Q sul lato AB e il punto R sul lato BO in modo che risulti:
$$OA=3\ OP,\ AB=3\ AQ,\ BO=3\ BR.$$
Trovare le coordinate dei punti P, Q, R e verificare che i due triangoli OAB e PQR hanno lo stesso baricentro.

23. Si consideri il quadrilatero ABCD disegnato in figura (Fig. 17). Calcolarne l'area e la lunghezza delle diagonali supponendo che il riferimento cartesiano sia monometrico e l'unità di misura delle lunghezze fissate sugli assi coordinati rappresenti 10 cm.

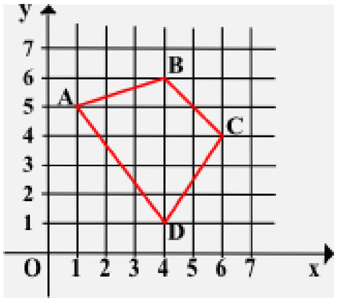

FIG. 17

24. Dato il parallelogramma ABCD, tracciare le bisettrici dei suoi angoli interni e, nell'ipotesi che esso non sia un rombo, dimostrare che i punti in cui tali bisettrici s'intersecano sono vertici di un rettangolo.

Ammesso poi che sia $\overline{AB}=12$ cm, $\overline{AD}=8$ cm, $B\widehat{A}D=60°$, e riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), trovare le coordinate dei vertici del rettangolo suddetto e verificare che è tutto interno al parallelogramma.

25. Dati due qualsiasi numeri reali a, b tali che $0<a<1$ e $0<b<1$, risulta: $a+b-2ab<1$. Di questa relazione fornire una spiegazione utilizzando convenientemente una rappresentazione grafica.

[**R**. In seguito a qualche semplice elaborazione, la disuguaglianza può essere scritta nel modo seguente: $a(1-b)+b(1-a)<1$, per cui, considerati i punti U(1,0), V(0,1), A(a,0), B(0,b) e tracciate per essi le rette parallele agli assi coordinati, …]

26. In figura (Fig. 18) sono disegnati i grafici delle funzioni f(x) e g(x), entrambe definite nello stesso intervallo [1,4]. Sono poi assegnate le seguenti relazioni:

[A] $g(x)=-f(x)-2$. [B] $g(x)=-f(x)-1$. [C] $g(x)=-f(x)$. [D] $g(x)=f(-x)-1$.

Una di esse si adatta alla rappresentazione suddetta. Individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

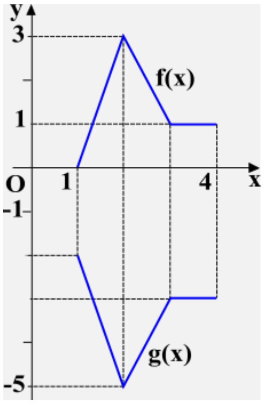

FIG. 18

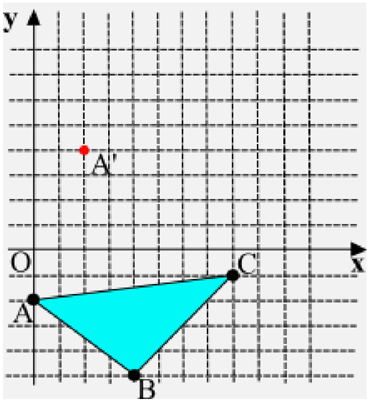

FIG. 19

27. In figura (Fig. 19) ogni quadratino ha lato unitario. La traslazione che muta il punto A in A' trasforma il triangolo ABC nel triangolo A'B'C'. Scrivere le coordinate di A, B, C ed A' e determinare quelle di B' e C'.

28. Con riferimento alla medesima figura 19, determinare le coordinate del triangolo simmetrico di ABC:

a) rispetto all'asse x; b) rispetto all'asse y; c) rispetto all'origine.

29. Con riferimento alla figura 20, scrivere le equazioni della trasformazione geometrica che muta il triangolo ABC nel triangolo A'B'C' e quella che muta il triangolo A'B'C' nel triangolo ABC.

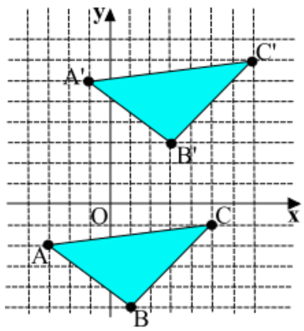

FIG. 20

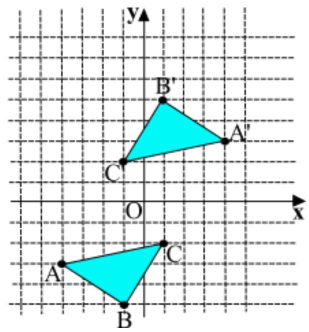

FIG. 21

30. Con riferimento alla figura 21, scrivere le equazioni della trasformazione geometrica che muta il triangolo ABC nel triangolo A'B'C' e quella che muta il triangolo A'B'C' nel triangolo ABC.

31. Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnato il triangolo ABC di mediane $\mathrm{AM},\ \mathrm{BN},\ \mathrm{CP}$. Sapendo che $\mathrm{M}(4,2),\ \mathrm{N}(5,3),\ \mathrm{P}(2,3)$, trovare le coordinate dei vertici del triangolo ABC.

32. Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnati i punti A(2,0) e B(2,1). Si costruiscono i punti P, Q, R tali che:

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\overrightarrow{\mathrm{OB}},\ \ \overrightarrow{\mathrm{AQ}}=2\,\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \ \overrightarrow{\mathrm{BR}}=3\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}.$$

Dopo aver determinato le coordinate dei punti P, Q, R, verificare che il baricentro del triangolo PQR coincide col punto B.

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

DOMANDE.

1. Su una retta cartesiana (O,U) sono assegnati i punti A(a) e B(b). Il punto simmetrico di A rispetto a B ha ascissa $2b-a$. È vero o falso?

2. In un piano cartesiano (Oxy) sono assegnati i punti A(a',a") e B(b',b"). Quali sono le coordinate del punto simmetrico di A rispetto a B?

3. È vero che il modulo del vettore avente componenti (a,b) secondo gli assi cartesiani prefissati, supposti ortogonali, è $\sqrt{a^2+b^2}$?

4. Considerato il punto P(a,b), assegnato in un piano cartesiano ortogonale (Oxy), quali sono le coordinate del punto medio del segmento OP?

5. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnati i punti $A(x_A,y_A)$ e $B(x_B,y_A)$. È vero che si ha $\mathrm{dist}(A,B)=x_A-x_B$?

6. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnati i punti $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$, $C(x_C,y_C)$. Quali sono le coordinate del baricentro del triangolo ABC?

7. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy): a) Quali sono le equazioni della simmetria rispetto all'asse x? b) Quali quelle della simmetria rispetto all'asse y? c) Quali sono le equazioni della simmetria rispetto all'origine O?

RISPOSTE.

1. È vero. Infatti, indicata con x l'ascissa del simmetrico, deve essere $x-b=b-a$, e perciò $x=2b-a$.
2. Sono $2b'-a'$ e $2b''-a''$. Basta generalizzare il ragionamento precedente. Oppure, indicato con P(x,y) il punto simmetrico di A rispetto a B, osservare che deve essere $\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{BA}$ e da qui passare alle componenti e risolvere rispetto ad x ed y.
3. Sì.
4. $\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)$.
5. $\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3},\ \frac{y+y_B+y_C}{3}\right)$
6. No. Il valore corretto è $dist(A,B)=|x_A-x_B|$, che coincide con $dist(A,B)=x_A-x_B$ solo se $x_A\geq x_B$.
7. Le equazioni della simmetria rispetto all'asse x, si ottengono imponendo che i punti corrispondenti P(x,y) e P'(x',y') si trovino sulla stessa perpendicolare all'asse x e siano equidistanti da esso. Si trova: $x'=x,\ y'=-y$. Analogamente si trovano le equazioni della simmetria rispetto all'asse y: $x'=-x,\ y'=y$; e della simmetria rispetto all'origine O: $x'=-x,\ y'=-y$.

APPENDICE

Distanza e metrica.

1. Quando in un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), si fissa una formula per il calcolo della *distanza* d(A,B) di due punti A, B, si definisce in ultima analisi una funzione che, a due dati punti A, B del piano, associa il numero reale d(A,B). Questa funzione si dice **metrica**. E soddisfa ad alcune condizioni:

$$d(A,B)\begin{cases}=0 & \text{se } A=B\\ >0 & \text{se } A\neq B\end{cases},\quad d(A,B)=d(B,A),\quad d(A,B)\leq d(A,C)+d(C,B).$$

Tali proprietà si denominano nell'ordine: *assioma di identità*, *assioma di simmetria* e *disuguaglianza triangolare*.

Un insieme di oggetti, in cui è definita la funzione "metrica" con le proprietà suddette, si definisce **spazio metrico**.

Ritornando alla distanza dei due punti A, B, possiamo dire che la funzione d(A,B) esprime, in fin dei conti, il "minimo percorso" per andare da A a B.

Quando ciò può avvenire muovendosi a piacere in tutte le direzioni possibili, vale a dire quando si può andare dalla posizione A alla posizione B seguendo il percorso che si vuole, senza vincoli od ostacoli, allora il percorso più breve è quello effettuato seguendo il segmento AB (Fig. 22). In questo caso, la distanza d(A,B) dei due punti $A(x_A,y_A)$ e $B(x_B,y_B)$, assegnati in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è espressa dalla nota formula:

$$\mathbf{d(A,B)=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}}.$$

Si chiama **distanza euclidea** e la funzione che ai due punti A, B associa tale distanza si chiama **metrica euclidea**. A volte è chiamata **metrica pitagorica** poiché basata sul teorema di Pitagora.

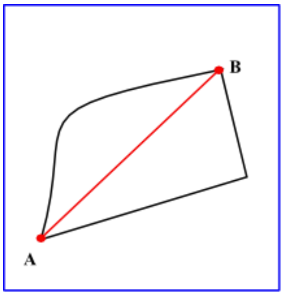

FIG. 22

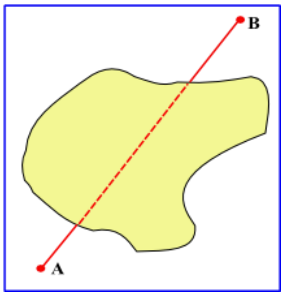

FIG. 23

2. Se si mettono dei vincoli che impongono percorsi obbligati o degli ostacoli che costringono a fare delle deviazioni, per cui non è più possibile spostarsi da A a B in linea retta, è evidente che il cammino più breve non può essere più quello effettuato seguendo il segmento AB (Fig. 23). Sarà un'altra cosa. Questo "minimo percorso" si chiama ancora *distanza* dei punti A, B ma la forma della sua espressione analitica e la relativa metrica sono tutte da scoprire e certamente sono differenti dalla distanza e dalla metrica euclidee.
Ora, di situazioni possibili ce ne sono diverse, ma noi ne descriveremo due soltanto.

- La prima distanza, diversa da quella euclidea, che prendiamo in considerazione riguarda i percorsi che si possono seguire su una griglia a maglie rettangolari, come quelli che effettua la Torre nel gioco degli Scacchi [2] (Fig. 24) oppure un taxi che si sposta lungo le strade di una città perfettamente squadrata come può essere Manhattan. Per questo motivo si parla di **distanza del taxi** (o **distanza Manhattan**). La relativa metrica si chiama **metrica del taxi**.

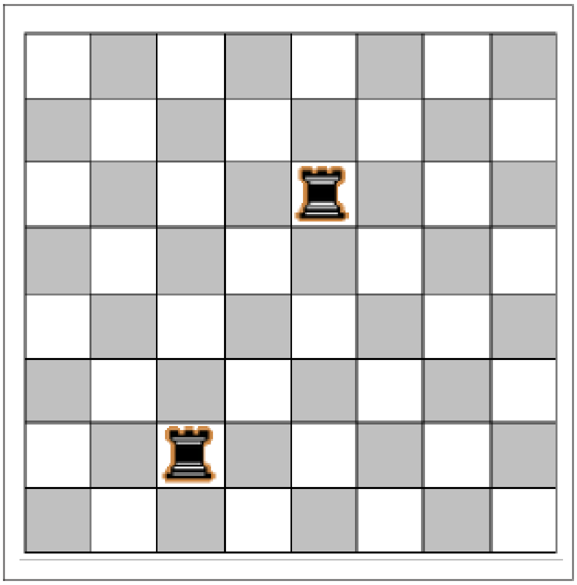

FIG. 24

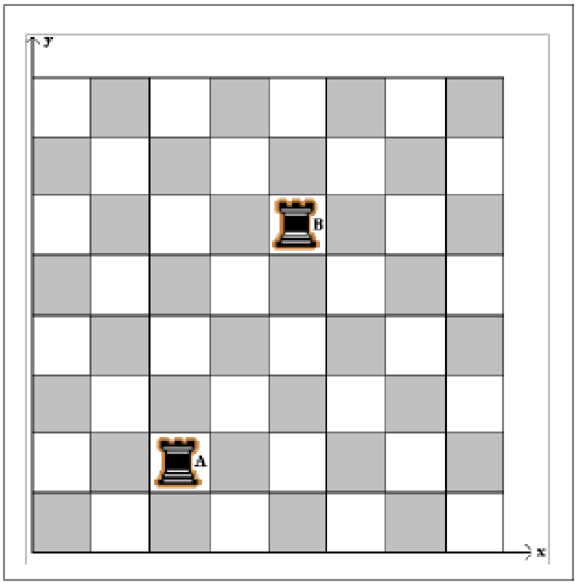

FIG. 25

Ebbene, è facile convincersi che in questo caso, indicate con A, B due posizioni nel piano (ad esempio,

[2] Nel gioco degli Scacchi la Torre si muove in verticale o in orizzontale di un numero arbitrario di caselle. Il Re si può spostare in una qualsiasi casella adiacente a quella di partenza. La Regina può andare dalla casella in cui si trova ad una qualsiasi altra casella purché con movimenti in orizzontale, in verticale o in diagonale.

due posizioni della Torre sulla scacchiera – Fig. 25), opportunamente riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), la distanza d(A,B) dei due punti è la seguente:

$$\mathbf{d(A,B) = |x_B - x_A| + |y_B - y_A|.}$$

S'intuisce che si può andare da A a B in diversi modi, ma quelli che realizzano il percorso più breve hanno tutti hanno la stessa distanza. Nell'esempio di figura 23 la Torre va da A in B se si sposta: 1) di 2 caselle a destra e 4 in alto; 2) di 4 caselle in alto e 2 a destra; 3) di una casella a destra, 3 in alto, ancora una a destra, infine una in alto; eccetera. In ogni caso:

$$d(A,B)=(5-3)+(6-2)=2+4=6.$$

- Se, invece della Torre, si considerano i movimenti del Re [3] (o anche della Regina [4]) sulla scacchiera, il percorso più breve per andare da una posizione ad un'altra (Fig. 26) si chiama **distanza di Chebyshev**[5].

La relativa metrica si chiama **metrica di Chebyshev**. Anche in questo caso è facile convincersi che la distanza d(A,B) dei due punti (Fig. 27) è la seguente:

$$\mathbf{d(A,B) = max(|x_B - x_A|, |y_B - y_A|),}$$

vale a dire il massimo valore dei numeri $|x_B - x_A|$, $|y_B - y_A|$.

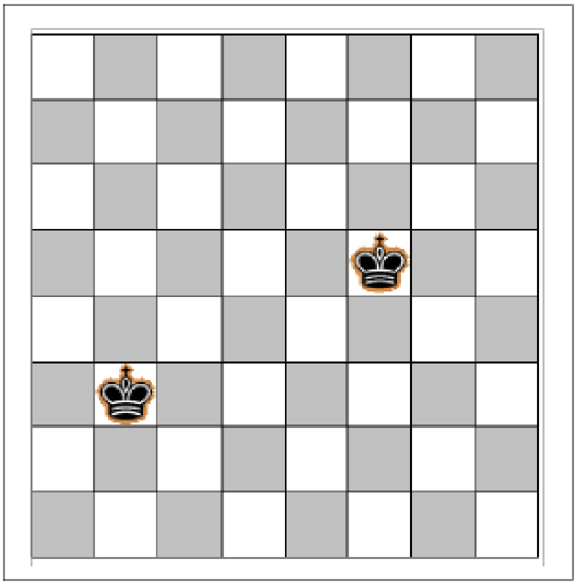

FIG. 26

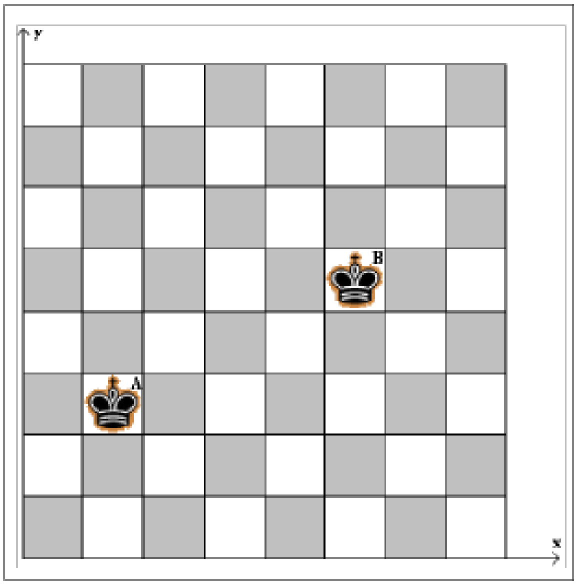

FIG. 27

Anche adesso si capisce che si può andare da A a B in vari modi, ma anche adesso quelli che realizzano il percorso più breve hanno la medesima distanza. Nell'esempio di figura 25 il Re va da A in B se si sposta: 1) di 2 caselle a destra in orizzontale e 2 in alto verso destra in diagonale; 2) di 2 caselle in alto verso destra in diagonale e di 2 caselle a destra in orizzontale; 3) di una casella a destra in orizzontale, 2 in alto verso destra in diagonale e infine una a destra in orizzontale; eccetera. In ogni caso:

$$d(A,B)=max(6-2, 5-3)=max(4, 2)=4.$$

---

3 Vedere nota 1.
4 Vedere nota 1
5 **Chebyshev**, Pafnutiy L., matematico russo, 1821-1894.

3. Concludiamo questa lettura proponendo un paio di esercizi sui contenuti che essa sviluppa.

a) Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnati i punti A e B. Calcolare le loro distanze euclidea, del taxi e di Chebyshev, sapendo che:

$$1)\ \mathrm{A}(1,2),\ \ \mathrm{B}(4,6);\quad 2)\ \mathrm{A}\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right),\ \ \mathrm{B}\left(\frac{2}{3},\frac{1}{4}\right);\quad 3)\ \mathrm{A}\left(2,\frac{1}{3}\right),\ \ \mathrm{B}\left(\frac{1}{4},1\right).$$

b) Dopo aver riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), disegnare il luogo dei punti che dal punto O hanno uguale ad 1 la seguente distanza: a) euclidea, b) del taxi, c) di Chebyshev.