Prerequisiti:

- Conoscere e utilizzare le tecniche di calcolo algebrico numerico e letterale.
- Rappresentare punti e rette in un piano cartesiano.
- Conoscere i concetti fondamentali della geometria piana.
- Saper risolvere equazioni di 1° grado

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:

- *risolvere una disequazione di 1° grado in una indeterminata per via algebrica e grafica*
- *utilizzare il linguaggio degli insiemi e della logica*
- *distinguere tra verifica e dimostrazione*
- *impostare e risolvere problemi che si traducono in disequazioni di 1° grado*
- *rappresentare analiticamente sottoinsiemi del piano (in particolare semirette, segmenti)*
- *risolvere sistemi di disequazioni di 1° grado in una indeterminata*

L'unità è indirizzata agli studenti del primo biennio di tutte le scuole superiori.

Disequazioni di 1° grado

Unità 21

21.1 DISEQUAZIONI DI 1° GRADO

21.1.1 Oltre alle equazioni, si considerano pure queste altre proposizioni aperte:

[1] $$\mathbf{a\,x+b>0},\quad \mathbf{a\,x+b<0},\quad \mathbf{a\,x+b\geq 0},\quad \mathbf{a\,x+b\leq 0},$$

dove $a,b\in\mathbb{R}$. Il loro insieme di base è, di norma, l'insieme dei numeri reali.

Le chiamiamo **disequazioni di 1° grado** nell'indeterminata x.

Ogni numero reale che, sostituito al posto della x, rende vera una di esse, si chiama *soluzione* della stessa.

Per esempio, considerata la disequazione:

$$2x-1>0\,,$$

è evidente che 0 non è una sua soluzione, mentre 1 lo è. Anche $3/2,\ 2,\ \sqrt{2}$ sono soluzioni della disequazione, mentre non lo sono $1/2,\ 2/5,\ -1$.

Una disequazione, dunque, può avere molte soluzioni. Qual è allora il loro insieme?

Per trovarlo si può seguire un procedimento che non differisce molto da quello esposto a suo tempo per risolvere un'equazione di 1° grado. Ma procediamo con ordine.

Due disequazioni si dicono *equivalenti* se hanno lo stesso insieme di soluzioni.

Anche per le disequazioni ci sono due principi di equivalenza. Il primo principio è del tutto simile a quello delle equazioni ed anche la dimostrazione è la stessa. Per cui ci limitiamo ad enunciarlo.

♦ PRIMO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA (per le disequazioni): Se ad entrambi i membri di una disequazione si addiziona uno stesso numero reale o, più in generale, una stessa espressione algebrica, che non perda di significato per ogni soluzione della disequazione data, si ottiene una disequazione equivalente a quella data.

In simboli, se per esempio $A(x)>B(x)$ è la disequazione data e se $M(x)$ è una costante o, al più, un'espressione algebrica in x che non perda di significato quando ad x si sostituisce un valore scelto nell'insieme delle soluzioni della disequazione, si ha:

$$A(x)>B(x)\ \leftrightarrow\ A(x)+M(x)>B(x)+M(x).$$

Il secondo principio è un po' diverso da quello delle equazioni. Esso è basato sulla seguente proprietà delle disuguaglianze in $\mathbb{R}$:

Se m, A, B sono numeri reali allora:

- se $m>0,\ A>B\rightarrow mA>mB$ ed $A<B\rightarrow mA<mB$;
- se $m<0,\ A>B\rightarrow mA<mB$ ed $A<B\rightarrow mA>mB$.

♦ SECONDO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA (per le disequazioni): Se i due membri di una disequazione sono moltiplicati per uno stesso numero reale non nullo, si ottiene una disequazione equivalente a quella data, con il segno di disuguaglianza che rimane immutato se il numero è positivo e che invece viene invertito se il numero è negativo.

La sua dimostrazione non differisce molto da quella del secondo principio di equivalenza delle equazioni. Comunque la omettiamo.

Sulla base di questi due principi, ecco la risoluzione della disequazione precedente:

$2x-1>0\leftrightarrow$ [si somma 1 ad entrambi i membri della disuguaglianza]
$2x>1\leftrightarrow$ [si moltiplicano entrambi i membri per $1/2$]
$x>1/2$.

Concludiamo che la disequazione è soddisfatta per gli x reali per cui si ha $x>1/2$. In sintesi:

$$2x-1>0 \text{ per } x>\frac{1}{2}\,.$$

- ESERCIZIO. Risolvere la seguente disequazione:

$$\frac{1}{2}(x+1)^2-\frac{2}{3}(x-2)\le x\left(\frac{1}{2}x+2\right).$$

RISOLUZIONE. Elaboriamo dapprima i due membri della disequazione:

$$\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}\le\frac{1}{2}x^2+2x\,;$$

dopo aver effettuato le più immediate semplificazioni, trasportiamo tutto al primo membro (i termini che cambiano di membro cambiano anche di segno) e liberiamo dal denominatore:

$$6x+3-4x+8-12x\le 0\,;$$

riduciamo i termini simili:

$$-10x+11\le 0\,;$$

moltiplichiamo entrambi i membri per –1 (cambia il verso della disequazione):

$$10x-11\ge 0\,.$$

Da qui segue: $x\geq 11/10$.

In conclusione, la disequazione assegnata è soddisfatta dagli x reali per i quali risulta: $x\geq 11/10$.

- ESERCIZI. Risolvi le seguenti disequazioni nell'indeterminata x:

1. $3x-5>2-4x\,;\qquad 2x+3\le 3+3x\,.$
2. $\frac{1}{2}x+2\ge 1-\frac{1}{2}x\,;\qquad 2-\frac{1}{3}x<2x-\frac{1}{3}\,.$
3. $\frac{1}{2}(x-1)^2+1\le x\left(\frac{1}{2}x+3\right).$ $\left[\textbf{R.}\ x\geq\frac{3}{8}\right]$
4. $2x-\frac{3}{2}x\left(1-\frac{1}{3}x\right)+\frac{1}{2}>\frac{1}{2}(x-2)^2\,.$ $\left[\textbf{R.}\ x>\frac{3}{5}\right]$
5. $\frac{2}{5}-\frac{3}{4}\left(2-\frac{1}{2}x\right)^2+x\ge\frac{x}{2}\left(5-\frac{3}{8}x\right).$ [**R.** impossibile: nessun x reale]
6. $\frac{2}{5}x\left(2-\frac{5}{2}x\right)-\frac{3}{5}x+2<\frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}-x\right)+3\,.$ [**R.** ogni x reale]
7. $\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2+\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{11}{3}\left(\frac{1}{2}x-2\right)^2+\frac{3}{5}\left(\frac{1}{2}-x\right).$ $\left[\textbf{R.}\ x\leq\frac{207}{94}\right]$
8. $\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{3}-x\right)+\frac{1}{2}x\left(\frac{3}{2}x-1\right)>x-\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2\,.$ $\left[\textbf{R.}\ x<\frac{3}{4}\right]$
9. $\frac{1}{2}x\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2-\frac{1}{2}x^2\left(x-\frac{1}{2}\right)>\frac{2}{3}x-\frac{1}{4}x^2\left(\frac{3}{2}x+1\right)\,.$ [**R.** $x<0$]

21.1.2 Il metodo di risoluzione, al quale abbiamo fatto ricorso nella risoluzione delle precedenti disequazioni, è detto **metodo algebrico**.

Adesso proponiamo un altro procedimento risolutivo, detto **metodo grafico**, basato per l'appunto sulla rappresentazione grafica della funzione

$$y=a\,x+b,$$

ricordando che tale rappresentazione è una retta e tenendo presente che, ai nostri fini, ciò che interessa sono:

a) il punto in cui la retta interseca l'asse x, vale a dire lo *zero* della funzione,

b) sapere se la *pendenza* della retta è positiva o negativa.

Prima però dobbiamo sgombrare il campo dall'ipotesi che nelle [1] sia a=0. Ebbene, in tal caso (ci riferiamo alle sole disequazioni $ax+b>0$ e $ax+b<0$, ma un discorso analogo – che lasciamo a te – si può fare per le altre due) la disequazione diventa:

$0\,x + b > 0.$ || $0x + b < 0.$

Cosicché, se:

$b \le 0$ || $b \ge 0$

è evidente che il primo membro della disequazione è

non positivo; || non negativo;

dunque nessun $x \in \mathbb{R}$ soddisfa alla disequazione: essa è impossibile o, altrimenti detto, l'insieme delle sue soluzioni è l'insieme vuoto.

Se invece:

$b>0$ || $b<0$

ogni $x \in \mathbb{R}$ soddisfa alla disequazione: l'insieme delle sue soluzioni è dunque l'insieme $\mathbb{R}$ dei reali.

Occupiamoci adesso del caso in cui $a \neq 0$. Associamo all'espressione $ax+b$ la funzione $y=ax+b$ che, lo ricordiamo, in un piano riferito ad assi cartesiani (Oxy) è rappresentata da una retta che interseca l'asse x nel punto di ascissa $-b/a$. Questo valore è per l'appunto lo zero della funzione. In base al segno della pendenza a della retta, avviene che:

- se $a>0$, la retta r è del tipo indicato in figura 1;
- se $a<0$, essa è del tipo indicato in figura 2.

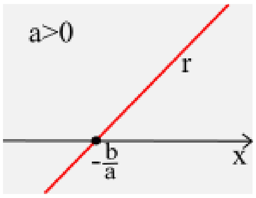

FIG. 1

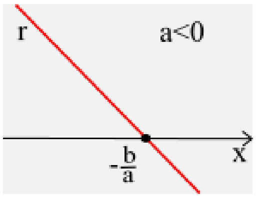

FIG. 2

Facciamo rilevare che in queste figure non disegniamo l'asse y (che, comunque, è sottinteso ed è supposto orientato verso l'alto) poiché esso non è necessario ai nostri scopi. A questo punto:

Risolvere la disequazione ax+b>0 significa determinare le ascisse dei punti della retta r le cui ordinate sono positive; in parole povere, le ascisse dei punti che stanno al di sopra dell'asse x.

Pertanto:

$$\text{se } a>0 \text{ (Fig.1): } ax+b>0 \text{ per } x>-\frac{b}{a}; \quad \text{se } a<0 \text{ (Fig.2): } ax+b>0 \text{ per } x<-\frac{b}{a}\,.$$

Analogo discorso si può fare per le altre disequazioni. Lasciamo a te la disamina di tutti i casi.

A titolo di esempio, riprendiamo la disequazione: $2x-1>0$.

La retta r che rappresenta la funzione $2x-1$ associata ad essa – prescindendo dalla sua effettiva inclinazione sull'asse x, che qui è irrilevante – è quella di figura 3. Per cui:

$$2x-1>0 \;\text{ per }\; x>1/2\,.$$

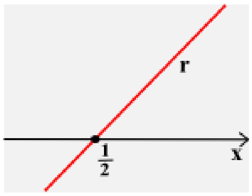

FIG. 3

- ESERCIZI. Risolvere le seguenti disequazioni sia col metodo algebrico sia col metodo grafico:

a) $3x+2>0$, $2x-3<0$;
b) $-4x-1>0$, $-3x+2<0$;
c) $2x+3\geq 0$, $-2x+3\leq 0$;
d) $-5x+4\geq 0$, $4x+5\leq 0$;
e) $ax-1>0$, con $a\in\mathbb{R}$ (attenzione!);
f) $2ax>0$, con $a\in\mathbb{R}$ (attenzione!).

21.2 SISTEMI DI DISEQUAZIONI DI 1° GRADO IN UNA INDETERMINATA

21.2.1 Si chiama **sistema di n disequazioni** (con $n\geq 2$) nella stessa indeterminata la loro congiunzione logica.

Per esempio, il sistema delle due disequazioni in x: $2x-3>0$ e $3x+1>0$, è la congiunzione:

$$2x-3>0 \quad \text{e} \quad 3x+1>0\,;$$

sottintendendo che $x\in\mathbb{R}$. Di solito esso si indica in questo modo:

$$\begin{cases} 2x-3>0 \\ 3x+1>0 \end{cases}$$

Se S_1 è l'insieme delle soluzioni in $\mathbb{R}$ della prima disequazione e S_2 è quello della seconda, l'insieme S delle soluzioni del sistema è:

$$S=S_1\cap S_2\,.$$

In generale, se le disequazioni sono in numero di n e gli insiemi delle loro soluzioni in $\mathbb{R}$ sono S_1, S_2, ... , S_n, l'insieme S delle soluzioni del sistema è:

$$S=S_1\cap S_2\cap\ldots\cap S_n\,.$$

Se $S=\varnothing$ il sistema si dice *impossibile*.

21.2.2 Per risolvere un sistema di disequazioni in una stessa indeterminata bisogna trovare, dunque, l'insieme delle soluzioni di ciascuna di esse e determinare quindi la loro intersezione. A questo riguardo torna utile la rappresentazione grafica dei cosiddetti ***intervalli reali***.

Dati due numeri reali a, b (a<b) si chiama ***intervallo reale*** l'insieme dei numeri reali x tali che $a\leq x\leq b$ (Fig. 4). Si indica con la scrittura **[a, b]** . Più esattamente questo si chiama ***intervallo chiuso***.

Si considerano, infatti, anche i seguenti intervalli reali:

- ***intervallo aperto*** **]a, b[**, formato dai numeri reali x tali che $a<x<b$ (Fig. 5);
- ***intervallo aperto a destra*** **[a, b[**, formato dai numeri reali x tali che $a\leq x<b$ (Fig. 6);
- ***intervallo aperto a sinistra*** **]a, b]**, formato dai numeri reali x tali che $a<x\leq b$ (Fig. 7).

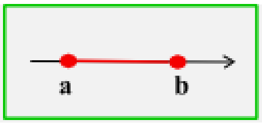

FIG. 4

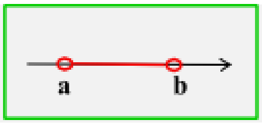

FIG. 5

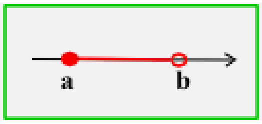

FIG. 6

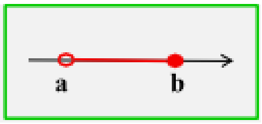

FIG. 7

Una precisazione forse superflua, poiché già fatta in altra circostanza: nelle varie figure considerate, un pallino "pieno", posto ad un estremo dell'intervallo considerato, indica che quell'estremo fa parte dell'intervallo; un pallino "vuoto" indica che non vi fa parte.

I precedenti intervalli si identificano con ***segmenti*** (inclusi o esclusi gli estremi) della retta reale.
Ma possono essere presi in considerazione anche intervalli che si identificano con *semirette*. Per poterli esprimere simbolicamente abbiamo però bisogno di introdurre due nuovi simboli, $+\infty$ e $-\infty$, i quali [1] si leggono rispettivamente "***più infinito***" e "***meno infinito***". Non si tratta di due nuovi numeri, ma solo di due simboli che tuttavia hanno la proprietà di essere: il primo, $+\infty$, maggiore di ogni numero reale; il secondo, $-\infty$, minore di ogni numero reale. In altri termini, per ogni numero reale x: $x<+\infty$ e $x>-\infty$.
Mediante questi due nuovi simboli possiamo definire 4 nuovi intervalli, i quali si identificano con ***semirette*** (inclusa o esclusa l'origine) della retta reale (Fig. 8).

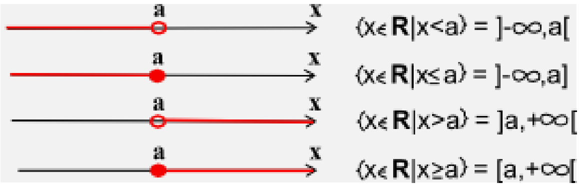

FIG. 8

Con l'uso di tali simboli anche l'intero insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali può essere scritto sotto forma di intervallo. Basta porre, infatti: $\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$.

AVVERTENZA. A volte i matematici prendono in considerazione l'insieme $\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$: lo chiamano **insieme dei numeri reali ampliato** e lo indicano col simbolo $\widehat{\mathbb{R}}$ o altri simboli. Noi non avremo occasione di servirci di questa notazione.

21.2.3 Vediamo un paio di esempi.

- ESERCIZIO 1. Risolvere il seguente sistema di disequazioni di 1° grado in x:

$$\begin{cases} 2x+3>0 \\ 3x-1\leq 0 \\ 4x-7<0 \end{cases}$$

RISOLUZIONE. Risolviamo separatamente le singole disequazioni che compongono il sistema:
- la disequazione $2x+3>0$ è soddisfatta per $x>-3/2$;
- la disequazione $3x-1\leq 0$ è soddisfatta per $x\leq 1/3$;
- la disequazione $4x-7<0$ è soddisfatta per $x<7/4$.

Chiamati allora S_1, S_2, S_3 gli insiemi delle soluzioni rispettivamente della 1ª, della 2ª e della 3ª disequazione, si ha:

$$S_1=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\, x>-\frac{3}{2}\right\};\quad S_2=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\, x\leq\frac{1}{3}\right\};\quad S_3=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\, x<\frac{7}{4}\right\}.$$

Si riportano su una retta orientata i numeri $-\frac{3}{2},\frac{1}{3},\frac{7}{4}$, rispettando l'ordine crescente (<u>ma non necessariamente le effettive distanze, che qui non interessano</u>), e si rappresentano gli insiemi suddetti su tre rette parallele alla retta orientata (Fig. 9).
Si deduce agevolmente che l'insieme S delle soluzioni del sistema, cioè l'insieme $S_1\cap S_2\cap S_3$, è il seguente:

$$S=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\, -\frac{3}{2}<x\leq\frac{1}{3}\right\}.$$

[1] Il simbolo ∞ di infinito fu introdotto dal matematico inglese **John Wallis** (1616-1703).

Come dire: il sistema assegnato è soddisfatto dagli x reali per cui si ha: $-\frac{3}{2}<x\leq\frac{1}{3}$.

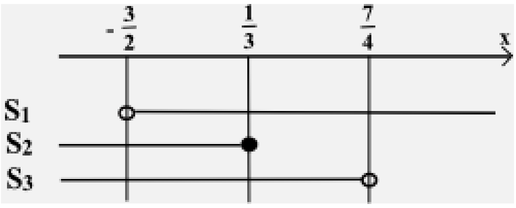

FIG. 9

- ESERCIZIO 2. Risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} 3x-4<2x+1 \\ 2x+3\geq 2-x \\ 3-2x\leq x+2 \\ 4x+1>3x-4 \end{cases}$$

RISOLUZIONE. Risolte separatamente le singole disequazioni che compongono il sistema e chiamati S_1, S_2, S_3, S_4 gli insiemi delle soluzioni rispettivamente della 1ª, della 2ª, della 3ª e della 4ª disequazione, si trova:

$$S_1=\{x\epsilon\mathbb{R}\mid x<5\};\quad S_2=\left\{x\epsilon\mathbb{R}\,\middle|\, x\geq -\frac{1}{3}\right\};\quad S_3=\left\{x\epsilon\mathbb{R}\,\middle|\, x\geq \frac{1}{3}\right\};\quad S_4=\{x\epsilon\mathbb{R}\mid x>-5\}.$$

Si riportano su una retta orientata i numeri $5,-\frac{1}{3},\frac{1}{3},-5$, in ordine crescente, vale a dire in quest'ordine: $-5,-\frac{1}{3},\frac{1}{3},5$. Si rappresentano quindi i 4 insiemi suddetti su altrettante rette parallele alla retta orientata (Fig. 10).

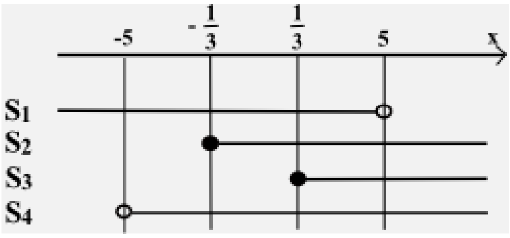

FIG. 10

Si desume agevolmente che l'insieme S delle soluzioni del sistema, ossia l'insieme intersezione dei quattro insiemi suddetti, è il seguente:

$$S=\left\{x\epsilon\mathbb{R}\,\middle|\,\frac{1}{3}\leq x<5\right\}.$$

In conclusione il sistema assegnato è soddisfatto per $\frac{1}{3}\leq x<5$.

- ESERCIZI. Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni nell'indeterminata x:

1. $\begin{cases} 2x-3>0 \\ 3x+1>0 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} 2x-3<0 \\ 3x+1<0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x-2>0 \\ 2x+5<0 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} 3x-2<0 \\ 2x+5>0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} \frac{1}{2}x+2\geq 1-2x \\ 2-\frac{1}{2}x<2x+\frac{1}{2} \\ x-\frac{1}{2}\leq \frac{1}{2}-x \end{cases}$ [**R.** impossibile]

4. $\begin{cases} 3x-\frac{2}{3}<x+\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}x+1>2-\frac{1}{2}x \\ x-\frac{1}{3}\geq 2-\frac{1}{3}x \end{cases}$ [**R.** impossibile]

5. $\begin{cases} 3x>2(x-1) \\ 2x<5 \\ x+1>1-x \\ 2x-1<3x+\frac{1}{2} \end{cases}$ $\left[\mathbf{R.}\ 0<x<\frac{5}{2}\right]$

6. $\begin{cases} \frac{1}{2}x(1-x)<\frac{1}{3}\left(2-\frac{3}{2}x^2\right) \\ 2x+5>0 \\ 2-\frac{1}{2}x>\frac{1}{2}-2x \\ (x+1)^2>x(x+2) \end{cases}$ $\left[\mathbf{R.}\ -1<x<\frac{4}{3}\right]$

® **LABORATORIO DI MATEMATICA.**

In ognuna delle caselle vuote di ciascuno dei quadrati "magici" sottostanti bisogna inserire un numero intero positivo in modo che la somma dei tre numeri situati su ogni riga, su ogni colonna e su ogni diagonale rimanga invariata. I numeri da inserire nelle caselle di uno stesso quadrato sono diversi fra loro e da quelli già inseriti. Come pensi di procedere?

2		6
	5	

8		
10		14

	16	
10		18

5	10	9

	16	
	14	

28		4

FIG. 11

VERIFICHE [2]

1. Trovare per quali x reali risulta:

1) $0 \le x-4 \le 1$. 2) $-2 < 2x-3 \le 2$. 3) $1 \le 2x+1 < 3$. 4) $-1 < 3x-2 < 1$.

[**R.** 1) $4 \le x \le 5$; ...]

2. Trovare per quali valori del parametro reale k la seguente espressione può essere considerata come la probabilità di un evento casuale:

1) $3k+4$. 2) $5k-2$. 3) $3-4k$. 4) $\frac{1}{2}(3k-2)+\frac{3}{2}$. 5) $\frac{2}{3}(1-4k)+\frac{1}{2}$.

$\left[\textbf{R.}\ 1)\ -\frac{4}{3} \le k \le -1\ ;...;5)\ \frac{1}{16} \le k \le \frac{7}{16}\right]$

3. Stabilire per quali valori della lunghezza a le seguenti lunghezze, espresse in centimetri, si possono assumere come lunghezze di due dei tre lati di un triangolo:

1) $2a+3,\ 3a+2$. 2) $2a-3,\ 3a+2$. 3) $2a+3,\ 3a-2$.
4) $2a-3,\ 3a-2$. 5) $3-2a\quad 3a-2$. 6) $2a-3,\ 2-3a$.

[**R** . 1) Ogni lunghezza a ; 2) $a>1{,}5$ cm ; 3) $a>2/3$ cm ; 4) $a>1{,}5$ cm ; …]

4. Stabilire per quali valori della lunghezza s le seguenti lunghezze, espresse in metri, si possono assumere come le lunghezze dei lati di un triangolo:

A) $s+1,\ s+2,\ s+4$. [**R.** $s>1$ m]
B) $2s-10,\ s+15,\ 3s-11$. [**R.** $s>9$ m]
C) $2s+9,\ 2s+10,\ 2s+11$. [**R.** Ogni lunghezza s]
D) $2s-7,\ 10-3s,\ 5s-2$. [**R.** Nessuna lunghezza s]
E) $5+s,\ 2s-3,\ 3s+4$. [**R.** Nessuna lunghezza s]

5. Considerata la seguente equazione letterale nell'incognita x, determinare per quali valori del parametro reale a è soddisfatta la condizione indicata a fianco dell'equazione stessa:

A) $2x-3a=0,\ \ x>1$. [**R.** $a>2/3$]
B) $\frac{1}{2}x-\left(2a+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-ax,\ \ x\le 1$.
[**R.** nessun valore di a]
C) $2x-\frac{1}{2}a=\frac{3}{2}a-x,\ \ 0<x<1$. $\left[\textbf{R.}\ 0<a<\frac{3}{2}\right]$
D) $\frac{1}{3}(a-x)+2=x-\frac{1}{2}(a+1),\ \ -1\le x<1$. $\left[\textbf{R.}\ -\frac{23}{5}\le a<-\frac{7}{5}\right]$

6. ® Degli angoli interni di un poligono convesso esattamente 3 sono ottusi. Determinare il massimo numero di lati di un tale poligono. [**R.** 6]

7. Risolvere e discutere come variano le soluzioni della seguente disequazione in x al variare del parametro reale a:

A) $a\,x > a-1$. [**R.** se a=0 ..., se a>0 ... ; se a<0 ...]
B) $(a-1)\,x < a$.
C) $(a+1)\,x \ge (a-1)$.

8. Siano α, β, γ le ampiezze degli angoli interni di un triangolo. Dimostrare che:

---

[2] I problemi (o gli esercizi) contrassegnati col simbolo ® sono risolti (totalmente o parzialmente) e la risoluzione è situata nella cartella "Integrazione 2", file "Matematica – Integrazione 2, unità 1-27", pubblicata in questo medesimo sito e scaricabile gratuitamente.

$$\alpha < \frac{\beta+\gamma}{2} \quad \text{se e solo se} \quad \alpha < 60°.$$

9. Una delle dimensioni di un rettangolo supera di 12 cm l'altra. Calcolare a quale condizione deve soddisfare la dimensione minore affinché il perimetro del rettangolo non si maggiore di 60 cm. [**R.** $0\text{ cm} < x \leq 9\text{ cm}$]

10. Una delle dimensioni di un rettangolo supera di 8 cm l'altra. Calcolare a quale condizione deve soddisfare la dimensione minore affinché il perimetro del rettangolo sia compreso fra 40 cm e 80 cm, estremi inclusi. [**R.** $6\text{ cm} \leq x \leq 16\text{ cm}$]

11. Un segmento AB è lungo la metà del segmento che si ottiene aumentando di 3 cm un dato segmento PQ. Si vuole che il segmento AB sia la base di un triangolo isoscele i cui lati uguali sono lunghi entrambi 4 cm. Calcolare per quali valori della lunghezza del segmento PQ ciò può accadere. [**R.** $0\text{ cm} < PQ < 5\text{ cm}$]

12. Le diagonali di un rombo sono una i 4/3 dell'altra. Sapendo che il lato del rombo ha una misura compresa fra 10 cm e 15 cm, estremi inclusi, entro quali valori è compresa la sua area A? [**R.** $24\text{ cm}^2 \leq A \leq 54\text{ cm}^2$]

13. L'altezza propriamente detta di un triangolo isoscele è i $2/3$ della base. Calcolare entro quali valori è compresa l'area A del triangolo sapendo che il perimetro è compreso fra 48 cm e 80 cm, estremi inclusi. [**R.** $108\text{ cm}^2 \leq A \leq 300\text{ cm}^2$]

14. Le misure di tre angoli, espresse in gradi sessagesimali, sono: $30,\ x+14,\ 2x-20$. Trovare per quali valori di x i tre angoli non possono essere assunti come angoli di un triangolo. [**R.** $x \neq 52$]

15. Le misure dei lati di un triangolo, espresse in metri, sono: $7,\ x-2,\ x+1$. Trovare per quali valori di x il perimetro del triangolo non supera 25 m. [**R.** $4\text{ m} < x \leq 9{,}5\text{ m}$]

16. Le lunghezze 10 cm, 12 cm e 24 cm non possono essere assunte come lati di un triangolo: perché? Se però una (ed una sola) di esse si allunga opportunamente, lo possono diventare. Quali, tra le lunghezze assegnate, possono essere aumentate? E di quanto?

17. Il padre di Aldo ha 40 anni. Tre anni fa l'età di Aldo era tale che il suo triplo superava i 6 anni ma era comunque inferiore all'età che allora aveva il padre. Trovare quale età (espressa in un numero intero di anni) può avere Aldo attualmente. [**R.** Tra 5 anni escluso e 15 anni incluso]

18. Un'automobile percorre un tratto di autostrada alla velocità media di 105 km/h. A quale velocità media deve percorre il tratto di ritorno affinché la velocità media sull'intero percorso di andata e ritorno sia di almeno 110 km/h? [**R.** almeno $115{,}5\text{ km/h}$]

19. «Se indovini quante figurine possiedo, te ne regalo la metà» - disse Paolo all'amico Giulio e continuò: «Ti voglio aiutare. Nella mano destra ho riunito i 3/7 del totale delle mie figurine, mentre nella sinistra ne ho riunite la metà di quelle riunite nella destra. Aggiungo che la somma delle figurine riunite nelle due mani supera 25 ma non raggiunge 30». Quale probabilità ha Giulio di aggiudicarsi le figurine promesse?

[**R.** Il numero delle figurine possedute da Paolo è un numero divisibile per 14. Di modo che, se Giulio sa far bene di conto, ha il 100% di probabilità di aggiudicarsi le figurine promesse da Paolo]

20. La media aritmetica dei punteggi ottenuti da Giacomo negli ultimi 3 compiti è 58. Quale punteggio dovrebbe realizzare nel 4° compito affinché la media aritmetica dei suoi punteggi aumenti di almeno 2 punti? [**R.** almeno 66 punti]

21. Negli ultimi tre compiti di matematica Aldo ha riportato i seguenti voti: 6, 6, 4.

a) Spiega perché è errato affermare che Aldo conseguirà la media del 6 se nel prossimo compito riporterà un bel 7.

b) Qual è invece il voto minimo che Aldo dovrebbe riportare nel prossimo compito per ottenere almeno la media del 6?

22. Nelle 34 partite già disputate, la Juventus ha fatto registrare una media di 1,9 gol a partita. La squadra vorrebbe raggiungere la media di almeno 2 gol a partita a fine campionato. Quanti gol dovrebbe segnare complessivamente nelle ultime 4 partite? [**R.** almeno 12 gol]

23. Un automobilista si accinge a fare un lungo viaggio. Nel primo giorno percorre la terza parte della distanza complessiva e nel secondo giorno percorre 350 km. Se nel terzo giorno percorre una distanza compresa fra 200 km e 250 km, entro quali valori è compresa la distanza complessiva?

[**R.** Fra 825 km e 900 km]

24. Dimostrare che esiste uno ed un solo numero naturale $n \geq 1$ tale che:

$$n \leq \frac{1+2+3+\ldots+n}{n} < n+1 .$$

25. Rappresentare in un piano cartesiano ortogonale (Oxy) l'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x-1| \leq 1\}$.

26. Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnato il quadrilatero di vertici O(0,0), A(1,0), B(1,1), C(0,1). Scrivere la relazione algebrica che rappresenta tutti e soli i suoi punti, interni o appartenenti al contorno.

27. Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnato il triangolo di vertici O(0,0), A(1,0), B(2,1). Scrivere la relazione algebrica che rappresenta tutti e soli i suoi punti, interni o appartenenti al contorno.

28. Le dimensioni di un rettangolo sono a ed a+20. Se la dimensione minore aumenta del 20% e la maggiore diminuisce del 10% cosa accade al perimetro del rettangolo?

[**R.** Aumenta se a>20, rimane invariato se a=20, …]

29. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), rappresentare graficamente le seguenti funzioni:

a) $y = |x+1|$ b) $y = 2 - |x-2|$ c) $y = |x-2| + x$.

30. Dire quale dei seguenti grafici (evidenziati in rosso - Fig. 12) rappresenta la funzione $y=|x+1|-|x-1|$ e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

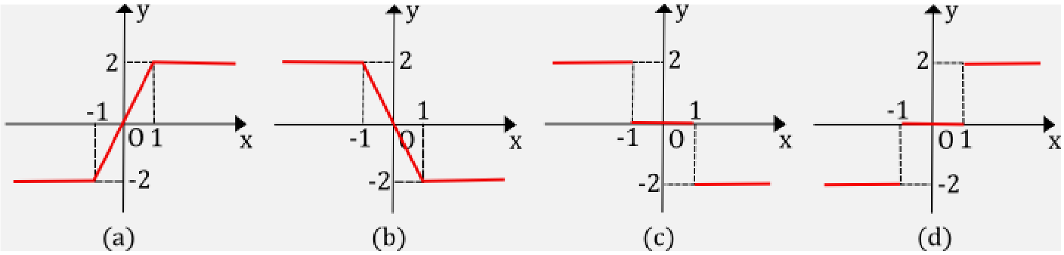

FIG. 12

31. Nella figura sottostante (Fig. 13) alcuni quadratini sono ombreggiati.

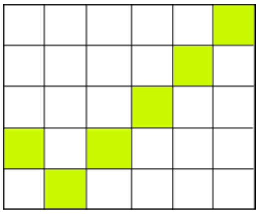

FIG. 13

a) Qual è la percentuale di quadratini non ombreggiati rispetto al totale dei quadratini che compongono la figura?

b) Calcolare quanti altri quadratini dovrebbero essere ombreggiati affinché la percentuale di quadratini ombreggiati sia almeno del 60% ma meno dell'80% rispetto al totale dei quadratini della figura.

c) Si supponga di non conoscere il numero di quadratini ombreggiati e si assuma questo numero uguale ad n. Si sa che, aumentandolo di n/2, la percentuale di quadratini ombreggiati, calcolata rispetto al totale dei quadratini che compongono la figura, aumenta del 20%. Qual è il valore di n?

[**R.** a) … ; b) un numero compreso fra 12 incluso e 18 escluso; c) n=12]

32. Siano dati i segmenti adiacenti AB, lungo 5 cm, e BC, lungo 3 cm. Si indichi con D un punto situato sul prolungamento di BC, dalla parte di C. Determinare quale deve essere la misura di CD affinché il rettangolo di lati AD e CD abbia area maggiore di quella del quadrato di lato BD. [BD > 4,5 cm]

33. Trovare tre numeri interi consecutivi, compresi fra 100 e 200, tali che la loro somma sia un numero di tre cifre uguali. [**R.** 3 sol.: 110, 111, 112; 147, 148, 149; 184, 185, 186]

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

DOMANDE.

1. Si consideri la seguente disequazione in x:

$$a\,x > 1,$$

dove a è un numero reale negativo. È vero che essa è risolta per $x<-\frac{1}{a}$?

2. I valori x, per cui risulta: $0<x-2<1$, sono quelli per cui si ha: $0<x<3$. È vero o falso?

3. Si considerino i seguenti sistemi di disequazioni nell'indeterminata x:

$$a)\ \begin{cases} x>-2 \\ x>-1 \\ x>\frac{1}{2} \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x<-2 \\ x<-1 \\ x<\frac{1}{2} \end{cases}$$

In 5 secondi: quali sono le loro soluzioni?

4. Si considerino le seguenti lunghezze, espresse in centimetri: $2,\ x+2,\ x-2$, con $x>0$. Per quali valori di x possono essere assunte come misure dei lati di un triangolo?

5. Nella seguente disequazione in x:

$$(p-2)\,x > 1,$$

il parametro p rappresenta la probabilità di un evento. Qual è la soluzione della disequazione?

6. È data la seguente equazione in x, dove k è un parametro reale:

$$(k-2)\,x = 2k-1\,.$$

Trovare per quali valori di k la radice dell'equazione risulta positiva.

7. Quale delle seguenti disuguaglianze è vera comunque si scelgano i numeri reali a, b purché $a>0$ e $b<0$?

[A] $ab=a+b$. [B] $ab>a+b$. [C] $ab<a+b$. [D] Nessuna di esse.

Una sola alternativa è corretta. Individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

RISPOSTE.

1. No. In realtà bisogna dividere entrambi i membri della disequazione per il numero negativo a: si ottiene $x<1/a$.

2. È falso. I valori cercati sono quelli per cui si ha: $2<x<3$, ottenuti sommando 2 a tutti e tre i membri della relazione considerata.

3. Le soluzioni dei due sistemi si trovano immediatamente: nel primo caso basta prendere i valori x maggiori del maggiore dei numeri in gioco, vale a dire $x>1/2$; nel secondo gli x minori del minore dei numeri in gioco, vale a dire $x<-2$.

4. Considerato che la lunghezza maggiore è evidentemente x+2, deve risultare $x+2<2+x-2$. E questo non accade per alcun x.

5. La disequazione, ove si tenga presente che è $0\le p\le 1$, è un caso particolare di quella considerata nella domanda 1: basta porre $a=p-2$. La sua soluzione è, perciò:

$$x<\frac{1}{p-2}.$$

6. Siccome la radice dell'equazione è:

$$x=\frac{2k-1}{k-2}$$

si tratta di cercare per quali valori di k risulta:

$$\frac{2k-1}{k-2}>0.$$

E questo accade quando numeratore e denominatore sono concordi, ovvero quando è:

$$(2k-1<0 \text{ e } k-2<0) \text{ oppure } (2k-1>0 \text{ e } k-2>0)$$

ossia, a conti fatti, per k<1/2 oppure per k>2.

7. [D] è l'alternativa corretta.

Si possono fare dei tentativi per scoprirlo, ma bisogna essere fortunati nella scelta dei valori particolari da sostituire ad a, b. Per esempio:

– se $a=\frac{1}{4}$ e $b=-\frac{1}{2}$ risulta $ab=-\frac{1}{8}$ e $a+b=-\frac{1}{4}$, perciò $ab>a+b$;

– se $a=1$ e $b=-\frac{1}{2}$ risulta $ab=-\frac{1}{2}$ e $a+b=\frac{1}{2}$, perciò $ab<a+b$;

– se $a=\frac{1}{3}$ e $b=-\frac{1}{2}$ risulta $ab=a+b=-\frac{1}{6}$.

Si può procedere però in modo più sistematico. Basta stabilire quale relazione sussiste fra i numeri a, b affinché risulti $ab \gtreqless a+b$, ossia $ab-(a+b) \gtreqless 0$. Si trova che deve essere rispettivamente $a \lesseqgtr \frac{b}{b-1}$. Perciò: a volte è ab>a+b, a volte è ab<a+b, a volte è ab=a+b, ma nessuna di tali relazioni è vera sempre.