

Prerequisiti:

- Conoscere e utilizzare le tecniche di calcolo algebrico numerico e letterale.
- Risoluzione consapevole di equazioni, disequazioni e sistemi di 1° grado.
- Risoluzione consapevole di un'equazione di 2° grado.
- Conoscere e rappresentare la funzione della proporzionalità quadratica diretta.
- Conoscere e utilizzare le equazioni della traslazione.

Per i Licei non scientifici lo studio di questa unità è previsto nel 2° biennio; per tutte le altre scuole nel 1° biennio

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:

- *studiare il segno di un trinomio di 2° grado con metodo grafico o algebrico*
- *risolvere una disequazione di 2° grado*
- *risolvere un sistema non lineare di disequazioni in una indeterminata*
- *impostare e risolvere problemi che si traducono in disequazioni di 2° grado*

- 25.1** La funzione quadratica.
- 25.2** Disequazioni di 2° grado in una indeterminata.
- 25.3** Sistemi di disequazioni in una indeterminata.

Verifiche.

Una breve sintesi per domande e risposte.

Complementi: disequazioni irrazionali quadratiche.

Disequazioni di 2° grado

Unità 25

25.1 LA FUNZIONE QUADRATICA

25.1.1 La risoluzione di una disequazione di 2° grado richiede che si sappia calcolare per quali valori dell'indeterminata x il trinomio ax^2+bx+c è positivo o negativo.

Questo studio può essere condotto con un metodo grafico, ma sono necessarie alcune considerazioni preliminari.

Ricordiamo, a tal proposito, che il grafico della funzione della proporzionalità quadratica diretta, $y=ax^2$, dove a è un qualsiasi numero reale non nullo, si chiama *parabola*. Osserviamo ora che se $x=0$ si ha $y=0$ per ogni $a \neq 0$, mentre:

- se $a > 0$, per ogni $x \neq 0$ risulta $ax^2 > 0$, per cui la parabola è situata tutta nel semipiano $y \geq 0$ (Fig. 1): si dice che essa ha la *concavità rivolta verso le y positive* (o *verso l'alto*);
- se $a < 0$, per ogni $x \neq 0$ risulta $ax^2 < 0$, per cui la parabola è situata tutta nel semipiano $y \leq 0$ (Fig. 2): si dice che essa ha la *concavità rivolta verso le y negative* (o *verso il basso*).

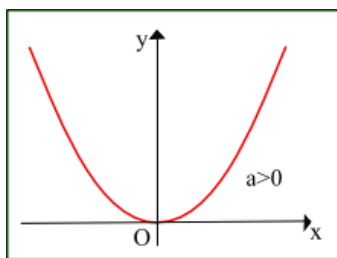


FIG. 1

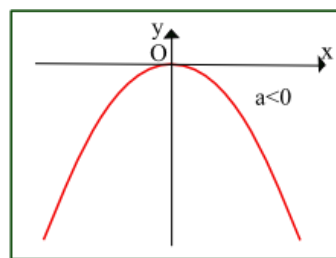


FIG. 2

25.1.2 Assegnata la parabola p di equazione $y=ax^2$, disegnata nel piano cartesiano ortogonale (Oxy) (Fig. 3), consideriamo la traslazione τ di componenti (x_0, y_0) , le cui equazioni sono, come noto:

$$[1] \quad x' - x = x_0, \quad y' - y = y_0.$$

Per mezzo di questa traslazione – che, come si sa, è una particolare congruenza – la parabola p viene trasformata in una curva congruente e quindi ancora in una parabola p' .

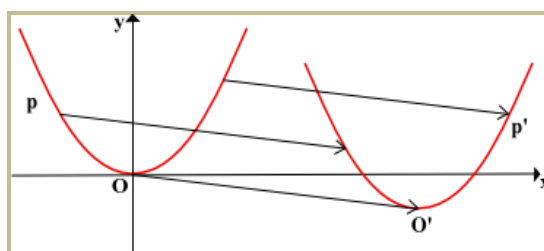


FIG. 3

L'equazione di questa nuova parabola si trova sostituendo in $y=ax^2$, al posto di x ed y , i valori seguenti, ricavati dalle equazioni della traslazione: $x = x' - x_0$, $y = y' - y_0$.

Si ottiene :

$$y' - y_0 = a(x' - x_0)^2,$$

da cui, dopo alcuni semplici passaggi, segue:

$$y' = ax'^2 - 2ax_0x' + (ax_0^2 + y_0),$$

o anche:

$$y' = a x'^2 + b x' + c,$$

avendo posto:

$$[2] \quad -2ax_0 = b, \quad ax_0^2 + y_0 = c.$$

Naturalmente l'equazione:

$$y' = a x'^2 + b x' + c,$$

dove per b, c valgono le [2], diventa:

$$y = a x^2$$

con la traslazione τ^{-1} di componenti $(-x_0, -y_0)$, inversa di τ .

Tutto questo basta per farci concludere quanto segue:

Ogni **parabola con asse parallelo all'asse y** ha un'equazione del tipo:

$$[3] \quad y = a x^2 + b x + c$$

dove $a \in \mathbb{R}_0$ e $b, c \in \mathbb{R}$.

Ogni equazione del tipo [3] rappresenta una parabola con asse parallelo all'asse y, con la concavità rivolta verso le y positive se $a > 0$ e verso le y negative se $a < 0$.

25.1.3 La funzione espressa dalla [3] si chiama **funzione quadratica**. La sua rappresentazione grafica permette di dare una interessante interpretazione geometrica delle soluzioni dell'equazione:

$$a x^2 + b x + c = 0,$$

dove $a \in \mathbb{R}_0$ e $b, c \in \mathbb{R}$.

È sufficiente considerare la funzione:

$$y = a x^2 + b x + c,$$

associata all'equazione e rappresentata, com'è stato detto, da una parabola avente l'asse parallelo all'asse y.

Le soluzioni dell'equazione suddetta si ottengono ponendo $y=0$ nell'equazione della parabola; per cui esse sono le ascisse dei punti in cui la parabola interseca l'asse x.

Indicato allora con Δ il discriminante del trinomio ax^2+bx+c e supposto $a > 0$, si possono presentare tre situazioni a seconda che la parabola intersechi l'asse x in due punti distinti ($\Delta > 0$ - Fig. 4), in due punti coincidenti ($\Delta = 0$ - Fig. 5), in nessun punto ($\Delta < 0$ - Fig. 6).

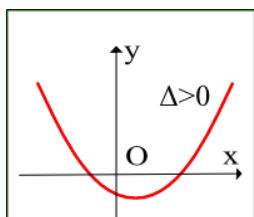


FIG. 4

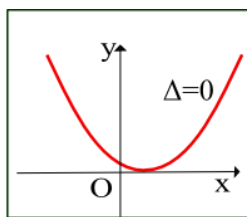


FIG. 5

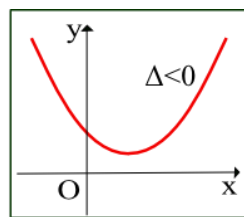


FIG. 6

A titolo di esempio:

- la parabola di equazione $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x$, in cui $a > 0$ e $\Delta > 0$, interseca l'asse x in due punti distinti;
- la parabola di equazione $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 2$, in cui $a > 0$ e $\Delta < 0$, non interseca l'asse x;
- la parabola $y = \frac{1}{4}x^2 - x + 1$, in cui $a > 0$ e $\Delta = 0$, ha in comune con l'asse x due punti coincidenti.

Quali situazioni si presentano quando $a < 0$? Lasciamo la risposta a te per esercizio.

25.2 DISEQUAZIONI DI 2° GRADO IN UNA INDETERMINATA

25.2.1 Abbiamo adesso tutti gli elementi per occuparci della risoluzione delle disequazioni di 2° grado.

Una disequazione di 2° grado nell'indeterminata x è ognuna delle seguenti proposizioni aperte:

$$[4] \quad \mathbf{a x^2 + b x + c > 0, \quad a x^2 + b x + c < 0, \quad a x^2 + b x + c \geq 0, \quad a x^2 + b x + c \leq 0,}$$

dove $a \in \mathbb{R}_0$ e $b, c \in \mathbb{R}$.

Ai fini della risoluzione associamo al trinomio ax^2+bx+c l'equazione:

$$[5] \quad y = a x^2 + b x + c$$

che, come detto più volte, in un piano cartesiano ortogonale (Oxy), rappresenta una parabola con l'asse parallelo all'asse y .

Poiché, in ultima analisi, la risoluzione delle disequazioni [4] consiste nello stabilire quand'è che il trinomio ax^2+bx+c è rispettivamente positivo, negativo, positivo o nullo, negativo o nullo, della parabola [5] non interessa il reale andamento bensì sapere solo com'è disposta rispetto all'asse x . E per questo è necessario e sufficiente conoscere il segno del discriminante $\Delta=b^2-4ac$ e del coefficiente a .

Potendo, ora, essere Δ positivo, negativo o nullo ed a positivo o negativo, i casi possibili sono evidentemente sei. Sono illustrati nelle figure 7-12, dove non abbiamo indicato l'asse y (che comunque è sottinteso ed è supposto orientato verso l'alto) poiché non serve per i nostri scopi.

In realtà, salvo situazioni eccezionali, nella pratica servono soltanto le prime tre configurazioni 7-9 per risolvere le disequazioni [4]. Infatti, in tali disequazioni possiamo supporre $a > 0$ giacché, se fosse $a < 0$, basterebbe moltiplicare per -1 entrambi i membri della disequazione e, dopo aver cambiato il senso della disequazione, trasformarla così in una disequazione equivalente con $a > 0$.

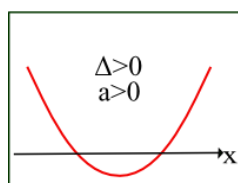


FIG. 7

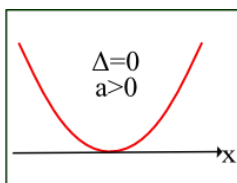


FIG. 8

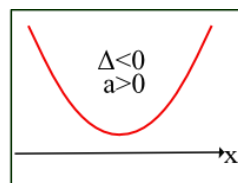


FIG. 9

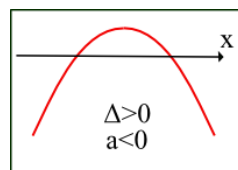


FIG. 10

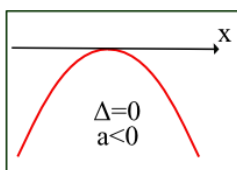


FIG. 11

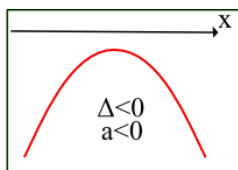


FIG. 12

In conclusione:

Risolvere la disequazione:

$$\mathbf{a x^2 + b x + c > 0}$$

significa determinare le ascisse dei punti della parabola di equazione $y=ax^2+bx+c$ (parabola associata al trinomio), le cui ordinate sono positive; in parole povere, le ascisse dei punti che stanno al di sopra dell'asse x .

Uguualmente, risolvere la disequazione:

$$a x^2 + b x + c < 0$$

significa determinare le ascisse dei punti della parabola che stanno al di sotto dell'asse x. Analogamente per gli altri due casi: $ax^2+bx+c \geq 0$ e $ax^2+bx+c \leq 0$.

25.2.2 Vediamo qualche esercizio sull'argomento, incominciando con un esercizio risolto.

ESERCIZIO RISOLTO. Risolvere le seguenti disequazioni:

$$(1) 2x^2 - 3x \geq 0; \quad (2) 3x^2 - x - 2 < 0.$$

RISOLUZIONE.

- Risolviamo la (1). La parabola p associata al trinomio di 2° grado (incompleto) $2x^2 - 3x$ ($\Delta > 0$, $a > 0$) è disposta come in figura 13 ed i punti di essa che hanno ordinata positiva o nulla sono quelli di ascissa $x \leq 0$ oppure $x \geq \frac{3}{2}$.



FIG. 13

Pertanto:

$$2x^2 - 3x \geq 0 \text{ per } x \leq 0 \text{ oppure } x \geq \frac{3}{2}.$$

- Riguardo alla (2), notiamo che la parabola p associata al trinomio $3x^2 - x + 2$ ($\Delta < 0$, $a > 0$) è disposta come in figura 9 e nessun punto di essa ha ordinata negativa. Pertanto:

$$3x^2 - x + 2 < 0 \text{ per nessun } x \in \mathbb{R}.$$

Come dire che la disequazione è impossibile.

Ti proponiamo adesso qualche esercizio da risolvere

1. Risolvere le seguenti disequazioni.

a) $2x^2 + 3 \geq 0$.

[R. ogni $x \in \mathbb{R}$]

b) $4x^2 - 1 < 0$.

[R. $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$]

c) $-x^2 - 2x + 8 \leq 0$.

[R. $x \leq -4$ o $x \geq 2$]

d) $4x^2 + 4x + 1 > 0$.

[R. ogni $x \in \mathbb{R}$ purché $x \neq -\frac{1}{2}$]

2. Per la risoluzione di ciascuna delle seguenti disequazioni disponi di non più di 10 secondi. Procedi.

a) $3x^2 + 425 > 0$. b) $28x^2 + 9 < 0$.

3. Calcola per quali valori del parametro reale a la seguente equazione in x ammette radici reali:

a) $x^2 - 2x - 1 = 0$. b) $(a - 1)x^2 + 3x + 1 - a = 0$. c) $(2a + 1)x^2 - (a - 2)x - 1 = 0$.

[R. a) $a \geq -1$; b) ogni a; c) ...]

25.2.3 Mentre per la risoluzione delle disequazioni di 1° grado riteniamo indifferente seguire il metodo grafico o il metodo algebrico, anche se nutriamo una leggera preferenza per il secondo, quando si risolve una disequazione di 2° grado in un'indeterminata ovvero quando si studia il segno di un trinomio di 2° grado in un'indeterminata, riteniamo invece consigliabile seguire il **metodo grafico**, vale a dire il procedimento che abbiamo descritto sopra, valutando di volta in volta la posizione della parabola associata al trinomio e traendo le debite conclusioni. Questo di norma. Esistono infatti situazioni talmente banali, la cui immediatezza non richiede tante elucubrazioni. Citiamo a titolo di esempio la disequazione $x^2 + 1 > 0$. Si conclude immediatamente che è soddisfatta per ogni x reale e non occorre l'uso della parabola per tale conclusione. Ciò non di meno, c'è anche un **metodo algebrico**, basato su regole (mnemoniche) che prescindono dalla parabola sia nella loro spiegazione sia nella formulazione: se ti fa piacere puoi anche cimentarti nella loro

dimostrazione. Ti serve allo scopo conoscere il modo in cui si fattorizza il trinomio ax^2+bx+c . Noi ci limitiamo ad enunciarle qui appresso:

Considerato il trinomio $f(x)=ax^2+bx+c$, dove a, b, c sono parametri reali con $a \neq 0$, e indicato con $\Delta=b^2-4ac$ il suo discriminante:

- se $\Delta < 0$ allora $f(x)$ assume lo stesso segno di a in ogni x reale;
- se $\Delta = 0$, indicato con x_0 lo zero (doppio) del trinomio, $f(x)$ assume lo stesso segno di a in ogni x reale ad eccezione del valore x_0 in cui $f(x)$ è nullo;
- se $\Delta > 0$, indicati con x_1 ed x_2 gli zeri del trinomio, con $x_1 < x_2$, $f(x)$ assume lo stesso segno di a negli x per i quali si ha $x < x_1$ oppure $x > x_2$, ed assume segno opposto a quello di a negli x per i quali si ha $x_1 < x < x_2$.

In conclusione, supponendo $a > 0$ per le medesime ragioni spiegate sopra, le soluzioni delle disequazioni $ax^2+bx+c > 0$ e $ax^2+bx+c < 0$ sono sintetizzate qui appresso, dove x_1 e x_2 (con $x_1 < x_2$) rappresentano gli zeri del trinomio ax^2+bx+c quando $\Delta > 0$, mentre $x_0 = -\frac{b}{2a}$ rappresenta lo zero (doppio) del medesimo trinomio quando $\Delta = 0$:

$\Delta = b^2 - 4ac$	$ax^2 + bx + c > 0$ (con $a > 0$)	$ax^2 + bx + c < 0$ (con $a > 0$)
$\Delta < 0$	l'insieme delle soluzioni è costituito da tutti gli x reali, vale a dire dall'insieme \mathbb{R}	l'insieme delle soluzioni è l'insieme vuoto: disequazione impossibile
$\Delta = 0$	l'insieme delle soluzioni è costituito dagli x reali tali che $x \neq x_0$, vale a dire dall'insieme $\mathbb{R} - \{x_0\}$	l'insieme delle soluzioni è l'insieme vuoto: disequazione impossibile
$\Delta > 0$	l'insieme delle soluzioni è costituito dagli x reali tali che $x < x_1$ e $x > x_2$, vale a dire dall'insieme $]-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[$	l'insieme delle soluzioni è costituito dagli x reali tali che $x_1 < x < x_2$, vale a dire dall'insieme $]x_1, x_2[$

25.3 SISTEMI DI DISEQUAZIONI IN UNA INDETERMINATA

25.3.1 Riguardo a questo argomento non c'è nulla da aggiungere a quanto già sai per averlo appreso a proposito dei sistemi di disequazioni di 1° grado in una indeterminata. L'unica novità è che adesso, oltre alle disequazioni di 1° grado vi sono anche disequazioni di 2° grado.

Ma basta un esempio per comprendere la nuova situazione.

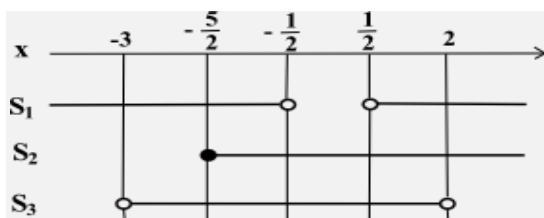
25.3.2 ESERCIZIO. Risolvere il seguente sistema di disequazioni in x :

$$\begin{cases} 4x^2 - 1 > 0 \\ 2x + 5 \geq 0 \\ x^2 + x - 6 < 0 \end{cases}$$

RISOLUZIONE (traccia). Chiamati S_1, S_2, S_3 gli insiemi delle soluzioni delle tre disequazioni prese nell'ordine in cui sono scritte nel sistema, si trova anzitutto:

$$S_1 =]-\infty, -\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, +\infty[; \quad S_2 = [-\frac{5}{2}, +\infty[; \quad S_3 =]-3, 2[.$$

Si rappresentano questi insiemi su una tabella (Tab. 1 – sulla retta orientata x non sono rispettate le distanze poiché il fatto è irrilevante per i nostri scopi; è rispettato invece l'ordine in cui i valori rappresentati crescono):



TAB. 1

Si deduce subito che l'insieme S delle soluzioni del sistema, vale a dire l'insieme $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ è:

$$S = \left[-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2} \right] \cup \left[\frac{1}{2}, 2 \right].$$

Come dire: il sistema è soddisfatto dagli x reali per cui risulta:

$$-\frac{5}{2} \leq x < -\frac{1}{2} \quad \text{oppure} \quad \frac{1}{2} < x < 2.$$

Ti proponiamo per esercizio di risolvere i seguenti sistemi di disequazioni nell'indeterminata x :

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} 2x+3 \leq 0 \\ x^2+6x+5 > 0 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 3x-2 > 0 \\ 3-4x^2 \leq 0 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x^2-4 < 0 \\ x^2+x-6 \leq 0 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} x(x-3) < 0 \\ (x-1)(x-2) > 0 \\ x(1-x) < 1 \end{cases} \end{array}$$

25.3.3 PROBLEMA RISOLTO. Considerato il seguente trinomio in x :

$$(2a-1)x^2 - 3ax + (a-1),$$

dove a è un parametro reale, determinare per quali valori di a esso è positivo per ogni x reale.

RISOLUZIONE. Affinché il trinomio sia positivo per ogni x reale occorre che la parabola p associata ad esso sia disposta come in figura 9. Il che accade se e solo se il coefficiente di x^2 è positivo e, nello stesso tempo, il discriminante Δ del trinomio è negativo.

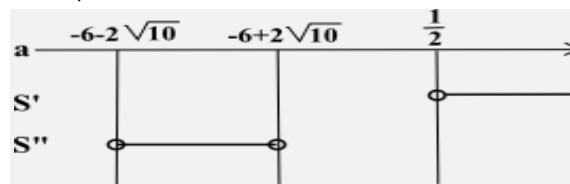
Poiché $\Delta = (3a)^2 - 4(2a-1)(a-1) = a^2 + 12a - 4$, i valori di a cercati sono quelli che risolvono il seguente sistema di disequazioni in a :

$$\begin{cases} 2a-1 > 0 \\ a^2+12a-4 < 0 \end{cases}$$

La prima disequazione di questo sistema è soddisfatta per $a > \frac{1}{2}$.

La seconda disequazione è soddisfatta per $-6-2\sqrt{10} < a < -6+2\sqrt{10}$.

Rappresentiamo gli insiemi S' ed S'' delle soluzioni delle due disequazioni su un'apposita tabella (Tab. 2). Si constata che $S' \cap S'' = \emptyset$. Il sistema è dunque impossibile. Dobbiamo concludere, perciò, che nessun valore di a rende sempre positivo il trinomio dato.



TAB. 2

Questo significa che, per ogni valore reale di a , il trinomio, oltre a valori positivi, assume anche valori non positivi, al variare di x in \mathbb{R} . In altri termini, la parabola che lo rappresenta non è mai (cioè per nessun valore di a) del tipo disegnato in figura 9.

Prova a verificare in qualche caso particolare.

ESERCIZI DA RISOLVERE.

Determinare per quali valori del parametro reale a il seguente trinomio è positivo per ogni x reale:

a) $(2-a)x^2 - x - 1$;
[R. nessuno]

b) $(2a+1)x^2 - 2x - (2a+1)$.
[R. nessuno]

c) $ax^2 - 2x + (a-1)$.
[R. $a > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$]

d) $(1-2a)x^2 - 3ax - 1$.
[R. nessuno]

e) $(a+3)x^2 - (a-1)x + (2a-1)$.

f) $(2-3a)x^2 + (2a+3)x - (1-a)$.

$[R. a > \frac{2\sqrt{53}-11}{7}]$

[R. nessuno]

25.3.4 Quanto hai appreso sulla risoluzione dei sistemi di disequazioni permette di risolvere disequazioni di questo tipo:

[8] $\frac{A(x)}{B(x)} > 0, \quad \frac{A(x)}{B(x)} < 0, \quad \frac{A(x)}{B(x)} \geq 0, \quad \frac{A(x)}{B(x)} \leq 0,$

dove $A(x)$ e $B(x)$ sono polinomi in x (che solo per semplicità supponiamo di 1° o di 2° grado): si chiamano **disequazioni razionali fratte**.

Basta ricordare che una frazione esprime, in ultima analisi, il rapporto di due numeri e che questo rapporto è positivo se i due numeri sono concordi ed è negativo se sono discordi.

Di modo che, per esempio, l'insieme S delle soluzioni della disequazione:

$$\frac{x^2-3x}{2x+1} \geq 0$$

è $S = S_1 \cup S_2$, dove S_1 ed S_2 sono rispettivamente gli insiemi delle soluzioni dei seguenti sistemi:

$$\begin{cases} x^2-3x \geq 0 \\ 2x+1 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-3x \leq 0 \\ 2x+1 < 0 \end{cases}$$

Poiché, dopo averli risolti si trova:

$$S_1 = \left] -\frac{1}{2}, 0 \right] \cup [3, +\infty[\quad \text{ed} \quad S_2 = \emptyset,$$

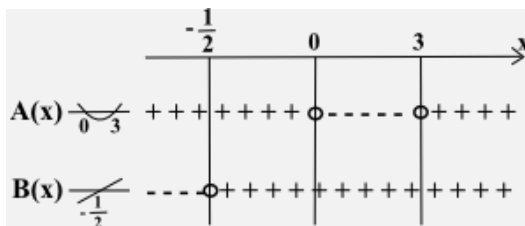
si può concludere che $S = S_1$. Per cui la disequazione assegnata è soddisfatta per $-\frac{1}{2} < x \leq 0$ oppure $x \geq 3$.

Occorre aggiungere che queste disequazioni si possono risolvere con un altro procedimento, che andiamo a descrivere.

Dapprima si studia il segno dei polinomi $A(x)$ e $B(x)$ e successivamente, dopo aver riportato i risultati su una apposita tabella, si vede quando i due polinomi sono, a seconda dei casi, concordi o discordi.

Per esempio, con riferimento alla disequazione precedente, si ottiene la tabella 3.

Ci pare che essa si spieghi da sé. Qualche chiarimento tuttavia non guasta.



TAB. 3

Sulla colonna di sinistra sono riportati, nell'ordine, il numeratore $A(x)$ e il denominatore $B(x)$ della frazione; a fianco di essi la loro rappresentazione grafica, finalizzata soltanto a stabilire quando la corrispondente funzione è positiva, negativa o nulla. Il segno delle due funzioni è esplicitato su due rette parallele all'asse x , sul quale sono riportati gli zeri delle funzioni, senza rispettare necessariamente le distanze, a condizione però che venga rispettato l'ordine. Si capisce che la successione di segni “+” indica che lì la corrispondente funzione è positiva e quella di segni “-” che lì la funzione è negativa; un “pallino” indica l'eventuale punto in cui la funzione si annulla.

Per stabilire quand'è che la frazione è positiva, è sufficiente individuare gli intervalli in cui numeratore e denominatore sono concordi, vale a dire entrambi positivi o entrambi negativi. Per stabilire quand'è che è nulla basta vedere i valori dell'indeterminata che annullano il numeratore. Ricordiamo, invece, che gli zeri del denominatore fanno perdere di significato alla frazione.

In definitiva, per la disequazione in esame, risulta:

$$\frac{x^2-3x}{2x+1} \geq 0 \text{ per } -\frac{1}{2} < x \leq 0 \text{ oppure } x \geq 3.$$

Naturalmente, se fosse servito, si sarebbero determinati gli intervalli in cui numeratore e denominatore sono discordi, nei quali intervalli la frazione considerata è ovviamente negativa.

Qualora la disequazione fratta non fosse in una delle forme [8], per prima cosa è necessario ricondurla.

Così, per esempio, posto di dover risolvere la disequazione:

$$\frac{x}{x^2-1} \geq 1,$$

bisogna dapprima trasformare questa disequazione in modo da ricondurla ad una delle forme [3]. Si ha precisamente, con passaggi successivi:

$$\frac{x}{x^2-1} \geq 1, \quad \frac{x-(x^2-1)}{x^2-1} \geq 0, \quad \frac{-x^2+x+1}{x^2-1} \geq 0.$$

A questo punto si può procedere come nell'esempio precedente. Il compito è lasciato a te. Noi ti forniamo il risultato:

$$\frac{x}{x^2-1} \geq 1 \text{ per } -1 < x \leq \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ oppure } 1 < x \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

NOTA BENE. Vi sono software matematici che permettono di ottenere immediatamente il risultato di una disequazione in una indeterminata. Se te ne servi, puoi verificare l'esattezza dei tuoi calcoli.

Risolvi per esercizio le seguenti disequazioni razionali fratte:

a) $\frac{x^2 - 6x + 9}{2x - 1} < 0$

b) $\frac{x + 2}{x^2 - 4x + 4} \geq 0$

c) $\frac{x^2 - x + 1}{2x^2 - x} > 0$

[R. $x < 0$ oppure $x > \frac{1}{2}$]

d) $\frac{2 - x^2}{2 + x^2} \leq 0$

e) $\frac{2x^2 - x - 1}{4 - x^2} \geq 0$

[R. $-2 < x \leq -\frac{1}{2}$ o $1 \leq x < 2$]

f) $\frac{x - 1}{2x - 1} \geq \frac{2x - 1}{x - 1}$

[R. $0 \leq x < \frac{1}{2}$ o $\frac{2}{3} \leq x < 1$]

VERIFICHE

1. Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le parabole aventi le seguenti equazioni:

a) $y = 2x^2 - 3x$; b) $y = -x^2 - x + 1$; c) $y = x^2 + 3$; d) $y = -3x^2 - x - 1$.

Di ciascuna di esse dire com'è disposta rispetto all'asse x.

Risolvere le seguenti disequazioni (nn. 2-16):

2. a) $x^2 - x - 2 > 0$;

b) $2x^2 + 3x + 1 \geq 0$.

[R. a) $x < -1$ o $x > 2$; b) ...]

3. a) $4x^2 - 12x + 9 > 0$;

b) $x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 \geq 0$.

[R. a) $x \neq 3/2$; b) ...]

4. a) $3x^2 - 2x + 1 < 0$;

b) $2x^2 + x + 2 \geq 0$.

[R. a) impossibile; b) ...]

5. a) $9x^2 - 24x + 16 < 0$; b) $9x^2 + 6x + 1 \geq 0$. [R. a) impossibile; b) ...]
6. a) $4x^2 - 3x + 1 < 0$; b) $3x^2 + 5x + 2 \leq 0$. [R. a) impossibile; b) ...]
7. a) $x^2 + x + 2 < 0$; b) $x^2 - x + 2 \leq 0$. [R. a) impossibile; b) ...]
8. a) $5x - 2x^2 > 0$; b) $4x + 5x^2 \leq 0$. [R. a) ... ; b) $-\frac{4}{5} \leq x \leq 0$]
9. a) $4 - 9x^2 > 0$; b) $2 + 3x^2 \leq 0$. [R. a) ... ; b) impossibile]
10. a) $(x + 1)^2 > x + 1$; b) $x^2 \leq x$. [R. a) $x \neq 0$; b) ...]
11. $(x - 2)(x + 2) \leq (2x + 1)^2$. [R. ogni x reale]
12. $ax^2 - 2x < 0$, dove $a \in \mathbb{R}$.
 [R. Disequazione soddisfatta per: $x > 0$ se $a = 0$, $0 < x < 2/a$ se $a > 0$, $x < 2/a$ o $x > 0$ se $a < 0$]
13. $2ax^2 - 3x > 0$, dove $a \in \mathbb{R}$.
14. $3ax^2 + 4x = 0$, dove $a \in \mathbb{R}$.
15. $x^2 + a > 0$, dove $a \in \mathbb{R}$. [R. $x \neq 0$ se $a = 0$, ogni x reale se $a > 0$, $x < -\sqrt{-a}$ o $x > \sqrt{-a}$ se $a < 0$]
16. $9a - 4x^2 = 0$, dove $a \in \mathbb{R}$.

Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni nell'indeterminata x (nn. 17-24):

17. $\begin{cases} 7x - 2 \leq 0 \\ 7x - 2x^2 < 0 \end{cases}$ [R. $x < 0$]
18. $\begin{cases} 2x + 5 > 0 \\ 3x^2 + 1 > 0 \end{cases}$ [R. $x > -\frac{5}{2}$]
19. $\begin{cases} x^2 - 6x + 9 > 0 \\ 4x^2 + 1 > 0 \\ x^2 - 5x < 0 \end{cases}$ [R. $0 < x < 5$ purché $x \neq 3$]
20. $\begin{cases} x^2 > 1 \\ x(x + 1) > 2 \\ 2x(1 - x) < 3 \end{cases}$ [R. $x < -2$ oppure $x > 1$]
21. $\begin{cases} (x - 2)(3 - x) > 0 \\ x(2 - x) > 2 \\ x^2 < 3 \end{cases}$ [R. impossibile]
22. $\begin{cases} x^2 \geq 2x \\ x^2 > 4 \\ x^2 - 3x \leq 4 \end{cases}$ [R. $2 < x \leq 4$]
23. $\begin{cases} 4x^2 - 28x + 49 > 0 \\ \frac{x^2}{9} - \frac{2x}{3} + 1 > 0 \\ 4x > x^2 \end{cases}$ [R. $0 < x < 4$ purché $x \neq 3$ ed $x \neq \frac{7}{2}$]
24. $\begin{cases} (x - 3)(2x - 7) \geq 0 \\ (x - 1)(2x - 5) > 0 \\ x(18 - 5x) \geq 0 \end{cases}$ [R. $0 \leq x < 1$ oppure $\frac{5}{2} < x \leq 3$ oppure $\frac{7}{2} \leq x \leq \frac{18}{5}$]

Risolvere le seguenti disequazioni razionali fratte nell'indeterminata x (nn. 25-30):

25. $\frac{3x^2 - 4x}{4x^2 - 1} < 0$

26. $\frac{3x^2 - 2x + 2}{2 - x^2} \leq 1$

[R. $x < -\sqrt{2}$ oppure $0 < x \leq \frac{1}{2}$ oppure $x > \sqrt{2}$]

27. $x - \frac{1}{x} > 2$

[R. $1 - \sqrt{2} < x < 0$ oppure $x > 1 + \sqrt{2}$]

28. $\frac{x-1}{x^2-1} - 2 \geq 0$

29. $\frac{2}{x} + \frac{1}{2} < \frac{x-1}{x+2}$

[R. $x < -2$ oppure $4 - 2\sqrt{6} < x < 0$ oppure $x > 4 + 2\sqrt{6}$]

30. $\frac{x}{x-1} - \frac{x}{2} \geq \frac{1}{3}(x+1)$

[R. $x \leq -\frac{1}{5}$ oppure $1 < x \leq 2$]

Questioni varie:

31. Studiare il segno del seguente trinomio in x:

1. $x^2 - 3x + 4$.

2. $-x^2 + x + 2$.

3. $4x^2 - 20x + 25$.

4. $-\frac{1}{4}x^2 + x - 1$.

5. $6x^2 + 2x + 1$.

6. $-3x^2 + x - 1$.

 [R. 1) positivo per ogni x; 2) nullo per $x = -1$ o $x = 2$,
positivo per $-1 < x < 2$, negativo per $x < -1$ o $x > 2$; ...]

32. Sia a un numero reale qualsiasi. È maggiore il suo doppio oppure il suo quadrato?

[R. Dipende. Da cosa?]

33. Disegnare i grafici delle seguenti funzioni:

a) $y = x^2 + |x| - 2$ b) $y = |x^2 - x| - 2$.

34. Calcolare per quali valori del parametro reale a la seguente equazione in x ha radici reali e positive, precisando quando una sola è positiva e quando sono positive entrambe:

1) $x^2 - (a-1)x + 2a = 0$. 2) $3x^2 - 2x + 2a - 3 = 0$. 3) $(a-1)x^2 - x + (a-1) = 0$.

 [R. 1) 1 sola positiva per $a < 0$, 2 positive per $a \geq 5 + 2\sqrt{6}$;

 2) 1 sola positiva per $a \leq \frac{3}{2}$, 2 positive per $\frac{3}{2} < a \leq \frac{5}{3}$;

 3) 1 sola positiva per nessun a, 2 positive per $1 < a \leq \frac{3}{2}$]

35. È data la seguente equazione in x:

$$x^2 + (m-1)x - (m+1) = 0,$$

 dove m è un parametro reale. Dopo aver spiegato perché ha almeno una radice reale positiva per ogni valore di m, trovare per quali valori di m la somma delle sue radici è positiva. [R. ... ; $m < 1$]

36. Nel rettangolo ABCD si ha: AB=10cm, BC=5cm. Si chiami P un punto del lato AB, Q un punto del lato BC, R un punto del lato CD ed S un punto del lato DA, tali che:

$$AP = BQ = CR = DS = x \text{ cm.}$$

Dopo aver spiegato perché l'area del triangolo APS è minore di quella del triangolo PQB, esprimere in funzione di x l'area y del quadrilatero generico PQRS e disegnare l'andamento di quest'area al variare di x. Infine, tra i quadrilateri PQRS determinare il perimetro di quello che ha area minima.

 37. Dire quale dei grafici sottostanti (rimarcati in rosso – Fig. 14) rappresenta la funzione $y = |x^2 - 2| - x^2$ e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

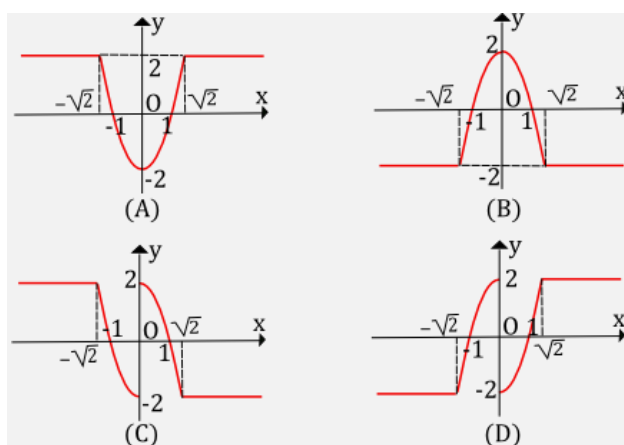


FIG. 14

38. Calcolare la probabilità che, attribuito ad a un valore intero scelto a caso nell'intervallo $[-4, +5]$, le radici della seguente equazione in x siano reali:

1. $x^2 - (a - 1)x + a^2 - 1 = 0$. [R. 30%]

2. $2x^2 - 3ax + 2a^2 - 9 = 0$. [R. 70%]

3. $ax^2 - 2(a + 1)x + a - 1 = 0$. [R. 60%]

39. PROBLEMA RISOLTO. Il numero che esprime la misura, in metri, dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo è 41, mentre quello che esprime, sempre in metri, la somma dei cateti è il quadrato di un numero naturale. Calcolare il perimetro e l'area del triangolo.

RISOLUZIONE. Naturalmente si può procedere per tentativi e, se va bene, si giunge pure ad UNA soluzione, ma non c'è la certezza che sia l'unica. Meglio un approccio razionale.

Intanto, indicate con x ed y le misure dei cateti del triangolo e chiamato n un numero naturale, deve essere soddisfatto il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 41^2 \\ x + y = n^2 \end{cases}$$

La sua risolvente è la seguente equazione:

$$2z^2 - 2n^2z + (n^4 - 41^2) = 0.$$

Per ragioni di simmetria deve ammettere due radici positive, per cui deve risultare soddisfatta la seguente condizione:

$$41 < n^2 \leq 41\sqrt{2}$$

e l'unico valore di n^2 che la soddisfa è 49. Per questo valore la risolvente suddetta diventa:

$$z^2 - 49z + 360 = 0$$

che fornisce le due soluzioni positive 9 e 40. Dunque i cateti del triangolo misurano 9 m e 40 m.

La prosecuzione è banale.

40. Un'urna contiene palline bianche e palline nere, ma queste ultime sono 2 in più delle prime. Si estraggono a caso due palline, senza reinserimento. Calcolare quante palline bianche devono trovarsi nell'urna affinché la probabilità che le due palline estratte abbiano colore diverso sia almeno $10/9$ di quella che abbiano lo stesso colore. [R. 5 soluzioni: 2, 3, 4, 5, 6]
41. Un'urna contiene 20 palline di colori diversi, fra cui il bianco. Si estraggono a caso due palline, senza reinserimento. Calcolare qual è il minimo numero di palline bianche contenute nell'urna perché sia almeno del 30% la probabilità che le due palline estratte siano entrambe bianche. [R. 12]
42. Un rettangolo è diviso dal segmento che unisce i punti medi dei due lati maggiori in due rettangoli simili ad esso. Calcolare a quali condizioni deve soddisfare la misura x della dimensione maggiore del rettangolo affinché la sua area non superi $25\sqrt{2}$ cm². [R. $0 \text{ cm} < x \leq 5\sqrt{2} \text{ cm}$]

43. Le diagonali di un rombo sono una i $\frac{3}{4}$ dell'altra. Calcolare a quali condizioni deve soddisfare la misura L del lato del rombo affinché la sua area sia compresa fra 6 cm^2 e 24 cm^2 , estremi inclusi.

[R. $2,5 \text{ cm} \leq L \leq 5 \text{ cm}$]

44. I cateti di un triangolo rettangolo differiscono di 6 cm. Calcolare entro quali valori deve essere compresa la misura a dell'ipotenusa affinché l'area del triangolo sia compresa fra 8 cm^2 e 20 cm^2 , estremi inclusi.

[R. $2\sqrt{17} \text{ cm} \leq a \leq 2\sqrt{29} \text{ cm}$]

45. Le lunghezze dei cateti di un triangolo rettangolo sono le radici della seguente equazione:

$$x^2 - 2kx + (2k - 1) = 0,$$

dove k è un parametro reale.

- a) Trovare a quali condizioni deve sottostare il parametro k .
 b) Esiste un valore di k per il quale il triangolo è anche isoscele?
 c) Calcolare per quali valori di k l'ipotenusa del triangolo è lunga almeno $\sqrt{10}$.

[R. a) $k > 1/2$; b) ... ; c) $k \geq 2$]

46. Dimostrare che **non esiste** alcun x reale che soddisfi alla seguente disequazione:

$$\frac{x}{\sqrt{x-2}} + x < \sqrt{x}.$$

47. Si consideri la seguente disequazione nell'indeterminata x :

$$(x+1)^2(x+2) > 0.$$

Spiegare perché le sue soluzioni sono gli x reali tali che $x > -2$ oppure, viceversa, spiegare perché non lo sono.

48. Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), disegnare la regione dei punti le cui coordinate (x,y) soddisfano alla seguente condizione:

$$\text{a) } x^2 - y^2 \geq 0. \quad \text{b) } 2x^2 - 5xy + 2y^2 \leq 0.$$

49. Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), disegnare la regione dei punti le cui coordinate (x,y) soddisfano alle seguenti condizioni:

$$\begin{cases} 4x^2 - y^2 \leq 0 \\ y(y-1) \leq 0 \end{cases}$$

Dopo aver controllato che tale regione è un triangolo, calcolarne il perimetro e l'area.

[R. $1 + \sqrt{5}, 1/2$]

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

DOMANDE.

- È vero che la disequazione $x^2 - x + 1 > 0$ è impossibile poiché il discriminante del trinomio al 1° membro è negativo?
- Si consideri il trinomio $P(x) = (m-2)x^2 - 2mx - 1$. Si chiede di stabilire se esistono valori del parametro reale m per i quali il trinomio risulti positivo per ogni x reale. Come si può procedere?
- I valori di x che soddisfano alla disequazione:

$$\frac{x^2 + 2}{x - 1} \geq 0$$
 sono gli x reali tali che $x \geq 1$. È vero o è falso?
- I valori di x che soddisfano alla disequazione:

$$\frac{x^2-2x}{x-1} > 1$$

sono quelli che contemporaneamente soddisfano alle due disequazioni $x^2-2x > 1$ e $x-1 > 1$. È vero o è falso?

5. In 5 secondi: quali valori di x soddisfano alla disequazione:

$$\frac{x^2+2}{x^2+1} < 0 ?$$

6. In 20 secondi: quali valori di x soddisfano alla disequazione:

$$\frac{x^2+2}{x^2+1} > 1 ?$$

7. In 40 secondi: quali valori di x soddisfano alla disequazione:

$$\frac{x^2+2}{x^2+1} > \frac{3}{2} ?$$

8. È vero che per gli x per i quali la relazione ha senso accade che:

$$\frac{1}{x} > x \rightarrow 1 > x^2 ?$$

RISPOSTE.

- No. È falsa la conclusione ed è errato il ragionamento. Il fatto che il discriminante del trinomio sia negativo implica semplicemente che la parabola associata al trinomio non seca l'asse delle ascisse. Siccome, poi, il coefficiente del termine di 2° grado è positivo, questa parabola volge la concavità verso le y positive e perciò è tutta contenuta nel semipiano $y > 0$. Di conseguenza risulta $x^2-x+1 > 0$ per ogni x reale. Non solo, dunque, è falso che la disequazione assegnata sia impossibile, ma addirittura è sempre soddisfatta.
- La parabola associata al trinomio, affinché esso risulti positivo per ogni x reale, deve essere totalmente contenuta nel semipiano $y > 0$. Questo accade se sono soddisfatte due condizioni:
 - risulta positivo il coefficiente del termine di 2° grado, $m-2$;
 - risulta negativo il discriminante del trinomio, $\Delta = 4m^2 + 4(m-1) = 4(m^2 + m - 1)$.
 I valori di m che soddisfano a queste due condizioni sono quelli cercati.

- È falso. I valori cercati sono quelli per cui si ha $x > 1$. Il valore $x=1$ deve essere scartato perché, annullando il denominatore della frazione al primo membro, la rende impossibile. In realtà la frazione al primo membro non è mai uguale a 0.
- È falso. Dapprima bisogna ricondurre la disequazione alla sua forma normale, attraverso qualche semplice elaborazione. Si trova:

$$\frac{x^2-3x+1}{x-1} > 0.$$

Quindi, con uno dei metodi conosciuti, si risolve questa disequazione: per esempio si studia il segno di numeratore e denominatore e si scelgono gli intervalli in cui essi risultano concordi, dal momento che il loro rapporto deve essere positivo.

- La disequazione non ammette soluzioni, dal momento che numeratore e denominatore sono positivi per ogni x reale e perciò il loro rapporto è sempre positivo.
- È evidente che $x^2+2 > x^2+1$ per ogni x reale. Come dire che l'espressione:

$$\frac{x^2+2}{x^2+1}$$

è maggiore di 1 per ogni x reale. La disequazione assegnata è perciò soddisfatta per ogni x reale.

7. La disequazione può essere scritta nella seguente forma equivalente:

$$\frac{2(x^2+2)-3(x^2+1)}{2(x^2+1)} > 0 \quad \text{ossia:} \quad \frac{-x^2+1}{2(x^2+1)} > 0;$$

la quale, essendo il denominatore positivo per ogni x reale, è soddisfatta quando il numeratore è positivo e ciò avviene per $-1 < x < 1$.

8. È falso, dal momento che x potrebbe essere negativo. In effetti l'implicazione corretta è la seguente:

$$\frac{1}{x} > x \rightarrow \frac{1-x^2}{x} > 0.$$

COMPLEMENTI: DISEQUAZIONI IRRAZIONALI QUADRATICHE

1. Le disequazioni irrazionali quadratiche delle quali intendiamo occuparci sono quelle che si presentano in una delle forme seguenti:

$$\sqrt{f(x)} > g(x), \quad \sqrt{f(x)} < g(x), \quad \sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)},$$

dove $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni di x .

- 1° CASO. Sia la seguente disequazione nell'indeterminata x : $\sqrt{f(x)} > g(x)$.

Intanto, affinché il radicale sia reale, deve essere: $f(x) \geq 0$.

Ora, se $g(x) < 0$ certamente risulta $\sqrt{f(x)} > g(x)$. Quindi l'insieme S_1 delle soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$$

è un sottoinsieme dell'insieme S delle soluzioni della disequazione in esame.

Se, invece, $g(x) \geq 0$ allora dalla disequazione presa in esame, elevando al quadrato entrambi i membri, segue: $f(x) > [g(x)]^2$. Quindi l'insieme S_2 delle soluzioni del seguente sistema ⁽¹⁾:

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > [g(x)]^2 \end{cases}$$

è ancora un sottoinsieme di S .

Non essendo possibili altre alternative oltre alle condizioni $g(x) < 0$ e $g(x) \geq 0$, i due sottoinsiemi S_1 ed S_2 coprono S . Vale a dire: $S = S_1 \cup S_2$.

- 2° CASO. Sia la seguente disequazione nell'indeterminata x : $\sqrt{f(x)} < g(x)$.

Come sopra, affinché il radicale sia reale, deve essere: $f(x) \geq 0$. D'altro canto, essendo non negativo il primo membro della disequazione in esame, il secondo membro, maggiore del primo, non può che essere positivo.

Pertanto: $g(x) > 0$. Sotto queste due condizioni, dall'equazione assegnata, elevando al quadrato entrambi i membri, segue: $f(x) < [g(x)]^2$. Non ci sono altre alternative. Pertanto l'insieme delle soluzioni della disequazione in esame è uguale all'insieme delle soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < [g(x)]^2 \end{cases}$$

- 3° CASO. Sia la seguente disequazione nell'indeterminata x : $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$.

¹ La condizione $f(x) \geq 0$ è superflua poiché risulta implicita nella seconda disequazione del sistema.

Affinché i due radicali siano reali deve essere: $f(x) \geq 0$ e $g(x) \geq 0$. Sotto tali condizioni, dall'equazione data, elevando al quadrato entrambi i membri, segue: $f(x) > g(x)$. Pertanto l'insieme delle soluzioni della disequazione assegnata è uguale all'insieme delle soluzioni del seguente sistema ⁽²⁾:

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$$

2. Tenendo presenti le conclusioni precedenti, risolvi le seguenti disequazioni nell'indeterminata x :

a) $\sqrt{x} > x$. [R. $0 < x < 1$]

b) $\sqrt{x} < x$. [R. $x > 1$]

c) $\sqrt{x-1} > x$. [R. impossibile]

d) $\sqrt{x^2-1} < 2x+1$. [R. $x \geq 1$]

e) $\sqrt{3x-2} > \sqrt{-x^2+5x-4}$. [R. $1 \leq x \leq 4$]

f) $\sqrt{x^2+1} \leq \sqrt{x+3}$. [R. $-1 \leq x \leq 2$]

g) $x+3 \geq \sqrt{x-2}$. [R. $x \geq 2$]

² N.B.: La condizione $f(x) \geq 0$ è superflua poiché risulta essere una conseguenza delle due disequazioni che formano il sistema