

Prerequisiti:

- Conoscere e utilizzare le proprietà delle figure piane

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:

- realizzare costruzioni di solidi geometrici e descrivere lo sviluppo di qualche poliedro
- descrivere, anche solo a livello intuitivo, le sezioni piane di qualche solido geometrico
- individuare simmetrie in particolari solidi geometrici (cubo, tetraedro regolare, cilindro, cono, sfera)
- individuare i movimenti che mutano un poliedro regolare in sé

Questa unità è opzionale per i Licei (1° biennio), che avranno modo di sviluppare l'argomento nel 2° biennio (unità 47-48-49). Negli Istituti Tecnici e Professionali è sostituita invece con l'unità 32 – *Solidi geometrici: aree e volumi*, da svilupparsi nel 2° biennio.

Tuttavia, mentre a tutti consigliamo lo studio dei primi 4 paragrafi, i paragrafi 26.5 e 26.6 possono essere riservati a chi avesse particolare interesse all'argomento.

26.1 Cubo.

26.2 Solidi di rotazione.

26.3 Poliedri regolari.

26.4 Sviluppo, costruzione e sezioni piane di un solido. Laboratorio di matematica.

26.5 Simmetrie in un cubo. Laboratorio di matematica.

26.6 Movimenti che mutano un poliedro regolare in sé. Laboratorio di matematica.

Una breve sintesi per domande e risposte.

Geometria dello spazio: nozioni intuitive

Unità 26

26.1 CUBO

Il **cubo** è un solido geometrico delimitato da sei quadrati congruenti. Un modello di cubo è il “dado”. In figura 1 è rappresentato il disegno di un modello di cubo, ma tu puoi servirti di un modello materiale: se ti è possibile, prova a costruirlo o a reperirlo.

I 6 quadrati che delimitano un cubo si dicono **facce** del cubo.

I lati di questi quadrati sono gli **spigoli** del cubo. Sono in numero di 12 e, trattandosi di lati di quadrati congruenti, sono essi stessi congruenti.

I vertici delle facce di un cubo si dicono **vertici** del cubo. Sono in numero di 8 e si possono ripartire in 4 coppie, mettendo in ogni coppia due vertici non appartenenti alla stessa faccia (come, per esempio: A_1 ed A_7): i due vertici di una stessa coppia si dicono **vertici opposti**.

Anche le 6 facce del cubo si possono ripartire in coppie: 3 per la precisione. Basta mettere in ogni coppia due facce che non hanno vertici comuni (come, per esempio: $A_1A_2A_3A_4$ e $A_5A_6A_7A_8$): le due facce di una stessa coppia si dicono **facce opposte**.

Con riferimento al cubo di figura 1, individua:

- a) le 3 coppie di facce opposte; b) le 4 coppie di vertici opposti.

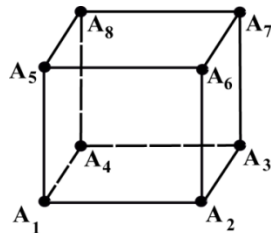


FIG. 1

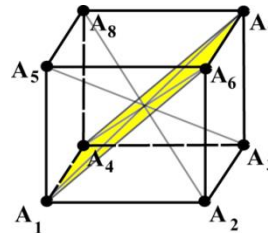


FIG. 2

Ogni segmento che unisce due vertici opposti di un cubo si chiama **diagonale** del cubo: in un cubo vi sono 4 diagonali. Con riferimento al nostro cubo, esse sono i segmenti A_1A_7 , A_2A_8 , A_3A_5 , A_4A_6 .

Vale la seguente proprietà che ci limitiamo ad enunciare, come tutte quelle con cui avremo a che fare in questa unità:

Le diagonali di un cubo (Fig. 2):

- passano tutte per uno stesso punto che biseca ciascuna di esse (si chiama **centro** del cubo);
- sono congruenti.

26.2 SOLIDI DI ROTAZIONE

Considerata una qualsiasi retta r ed una figura piana F , di area non nulla, disposta nello stesso piano con r ma senza attraversarla, la figura geometrica descritta da F in una rotazione di 360° intorno ad r si chiama **solido di rotazione**. La retta r si chiama **asse di rotazione**.

In questa nostra veloce carrellata ci limitiamo a prendere in esame solo alcuni elementari solidi di rotazione. Facciamo affidamento sui tuoi ricordi riguardo al cerchio, nel senso che supponiamo che ti sia noto di cosa si tratti.

- Il solido generato da un rettangolo in una rotazione di 360° intorno alla retta di uno dei suoi lati si chiama **cilindro circolare retto** (Fig. 3). I due lati perpendicolari a quello di rotazione generano, nella rotazione medesima, due cerchi che si dicono **basi** del cilindro, mentre il lato intorno a cui ruota il rettangolo si dice **altezza** del cilindro.

- Il solido generato da un triangolo rettangolo in una rotazione di 360° intorno alla retta di uno dei suoi cateti si chiama **cono circolare retto** (Fig. 4). Il cerchio generato dal cateto che ruota si dice **base** del cono. L'altro cateto si chiama **apotema** del cono.
- Il solido generato da un cerchio in una rotazione di 180° intorno ad una retta passante per il suo centro si chiama **sfera** (Fig. 5). Il centro del cerchio si chiama anche **centro** della sfera.

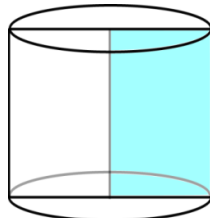


FIG. 3

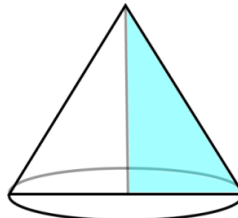


FIG. 4

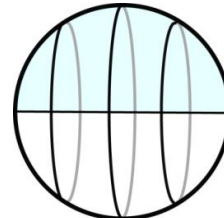


FIG. 5

26.3 POLIEDRI REGOLARI

Il cubo è un solido geometrico che rientra in una particolare categoria di solidi, che va sotto il nome di **poliedri regolari**. Come già specificato, esso ha 6 facce, 8 vertici e 12 spigoli (Fig. 6) ed è chiamato anche **esaedro regolare**.

Oltre al cubo vi sono soltanto altri quattro poliedri regolari: tre sono limitati da triangoli equilateri congruenti ed uno da pentagoni regolari congruenti.

I poliedri regolari delimitati da triangoli equilateri congruenti sono:

- il **tetraedro regolare**, avente 4 facce, 4 vertici e 6 spigoli (Fig. 7);
- l'**ottaedro regolare**, avente 8 facce, 6 vertici e 12 spigoli (Fig. 8);
- l'**icosaedro regolare**, avente 20 facce, 12 vertici e 30 spigoli (Fig. 9).

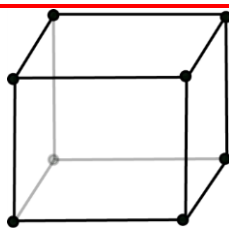


FIG. 6

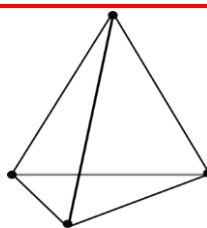


FIG. 7

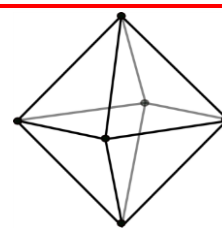


FIG. 8

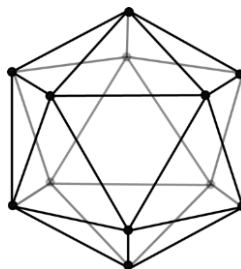


FIG. 9

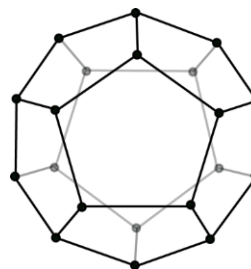


FIG. 10

L'unico poliedro regolare delimitato da pentagoni regolari congruenti è il **dodecaedro regolare**, avente 12 facce, 20 vertici e 30 spigoli (Fig. 10).

Si possono costruire poliedri aventi per facce poligoni regolari di diversi tipi. Hanno la forma particolare di

una “palla”. Per esempio si può costruire:

- un poliedro le cui facce sono in parte pentagoni regolari congruenti e in parte esagoni regolari congruenti: i lati delle facce sono ovviamente congruenti fra loro (detto per inciso, il pallone del gioco del calcio è, di norma, un solido siffatto);
- un poliedro le cui facce sono in parte quadrati congruenti e in parte esagoni regolari congruenti: i lati delle facce sono congruenti fra loro;
- un poliedro le cui facce sono in parte quadrati congruenti e in parte triangoli equilateri congruenti: i lati delle facce sono congruenti fra loro;

eccetera.

Ma questi poliedri non sono regolari.

La costruzione dei poliedri regolari, che costituisce la parte conclusiva del XIII libro degli *Elementi* di Euclide, era attribuita nell’antichità al filosofo ateniese Platone (per questa ragione ancor oggi i poliedri regolari sono detti talvolta *solidi platonici*), poiché costui ne tratta in un suo dialogo, il *Timeo*. In uno scolio ⁽¹⁾ al XIII libro degli *Elementi*, di datazione incerta, si dichiara però che la loro scoperta non deve essere attribuita a Platone (427-347 a.C.), poiché tre di essi (cubo, tetraedro e dodecaedro) erano noti ai Pitagorici (VI sec. a.C.) e gli altri due (ottaedro e icosaedro) erano dovuti a un matematico ateniese di nome **Teeteto** (circa 415-369 a.C.), seguace di **Teodoro** di Cirene, matematico di scuola pitagorica, attivo intorno al 390 a.C. Insomma, secondo lo scoliaste, i cinque poliedri regolari sono scoperte dei Pitagorici.

26.4 SVILUPPO, COSTRUZIONE E SEZIONI PIANE DI UN SOLIDO. LABORATORIO DI MATEMATICA.

26.4.1 Immaginiamo di avere un modello, per esempio in cartoncino, di un cubo, come quello di figura 11. Tagliamolo lungo gli spigoli AD, BC, AB, EF, EH, FG, AE e stendiamo sopra un piano come in figura 12, dove i vertici A', A'', E', E'', B' ed F' sono i punti che si sovrapponevano ad A, E, B ed F nel modello di figura 11.

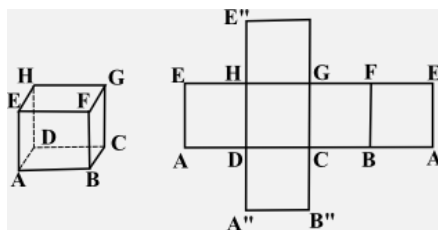


Fig. 11

Fig. 12

La figura ottenuta (Fig. 12) rappresenta lo **sviluppo della superficie** del cubo considerato.

Di ogni poliedro, rappresentato mediante un modello opportuno, si può ottenere lo sviluppo. In particolare si può ottenere lo sviluppo degli altri 4 poliedri regolari: tetraedro (Fig. 13), ottaedro (Fig. 14), icosaedro (Fig. 15) e dodecaedro (Fig. 16).

¹ Uno “scolio” è una nota critica ad un autore classico.

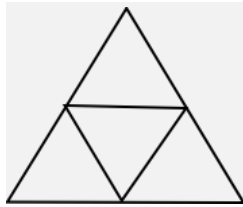


FIG. 13

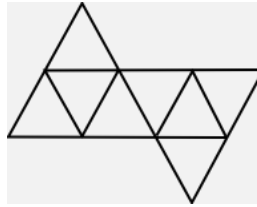


FIG. 14

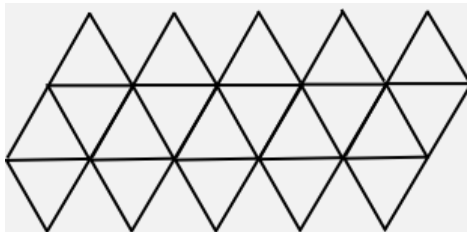


FIG. 15

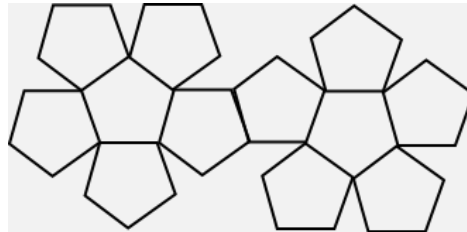


FIG. 16

I corpi rotondi, invece, non tutti sono sviluppabili. Lo sono, per esempio, il cilindro e il cono, ma non lo è la superficie sferica.

Le figure 17 e 18 rappresentano nell'ordine un cilindro (Fig. 17a) e il suo sviluppo (Fig. 17b) ed un cono (Fig. 18a) e il suo sviluppo (Fig. 18b). S'intende che il rettangolo di figura 17b ha un lato lungo quanto l'altezza del cilindro e l'altro lato lungo quanto la circonferenza di base. Ugualmente l'arco di circonferenza di figura 18b è lungo quanto la circonferenza di base del cono e il raggio è uguale all'apotema del cono.

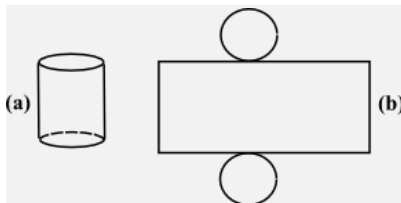


FIG. 17

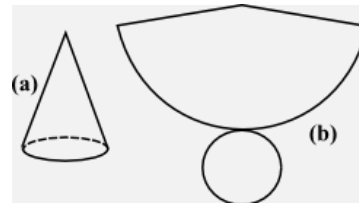


FIG. 18

26.4.2 La conoscenza dello sviluppo di un solido si rivela particolarmente utile quando si vuole costruire un modello di cartone del solido.

Ma modelli ugualmente interessanti dei poliedri, in particolare dei poliedri regolari, si possono costruire utilizzando bastoncini di uguale lunghezza, come cannuce, stecchini o altro. Per questo è però necessario avere presente la conformazione del poliedro piuttosto che il suo sviluppo, che in tal caso serve a poco.

Si tratta di costruzioni che puoi provare a fare da te, con la collaborazione dei tuoi compagni e l'aiuto del tuo professore. È un'ottima occasione per svolgere attività significative di "laboratorio di matematica".

26.4.3 Quando un solido geometrico è secato da un piano si ottiene evidentemente una figura piana.

Ti proponiamo – in particolare come attività di laboratorio da condurre assieme ai tuoi compagni di classe, utilizzando modelli materiali dei solidi o mediante software geometrici – di fare ipotesi sulle sezioni di un piano con i seguenti solidi: cubo, tetraedro regolare, ottaedro regolare, cilindro, cono, sfera.

Trovate un modo di controllare la validità o meno delle vostre congetture. Se però non ce la fate, non vi demoralizzate, giacché avrete modo di ritornare su questo argomento nel secondo biennio, quando le vostre conoscenze di geometria solida saranno più complete ed approfondite.

26.5 SIMMETRIE IN UN CUBO. LABORATORIO DI MATEMATICA.

26.5.1 Ci occupiamo delle simmetrie con riferimento alla rappresentazione $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ (Fig. 1).

Una particolare simmetria è la **simmetria centrale rispetto al suo centro O** (Fig. 19), individuata dalla seguente tabella di corrispondenza dei vertici, nella quale i numeri indicano gli indici dei vertici del cubo:

$$c = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 5 & 6 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Conviene chiarire una volta per tutte il significato della precedente tabella di corrispondenza dei vertici del cubo. Essa vuol significare che, ferma restando la configurazione del cubo:

- il vertice A_1 prende il posto del vertice A_7 ,
- il vertice A_2 prende il posto del vertice A_8 ,
- il vertice A_3 prende il posto del vertice A_5 ,

e così via (Fig. 20).

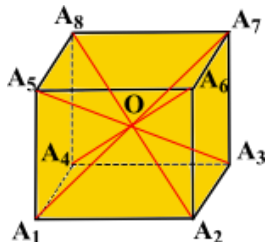


FIG. 19

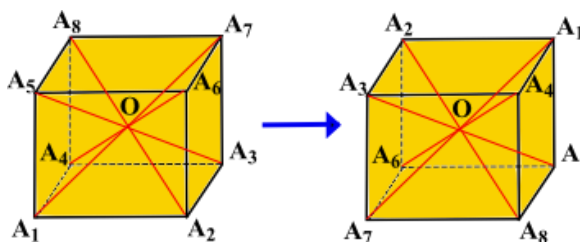


FIG. 20

26.5.2 Consideriamo, adesso, le *simmetrie rispetto ad un piano*.

- Il piano condotto per il centro O parallelamente ad una sua faccia è un piano di simmetria per il cubo (Fig. 21): si chiama *piano mediano*.

In un cubo vi sono evidentemente tre piani mediani, tante quante le coppie di facce opposte, e quindi abbiamo: **N° 3 simmetrie rispetto a ciascuno dei 3 piani mediani**. In particolare:

- la simmetria w_1 rispetto al piano mediano parallelo alla faccia $A_1A_2A_3A_4$;
- la simmetria w_2 rispetto al piano mediano parallelo alla faccia $A_1A_2A_6A_5$;
- la simmetria w_3 rispetto al piano mediano parallelo alla faccia $A_1A_4A_8A_5$.

Esse stabiliscono delle corrispondenze tra i vertici del cubo secondo le seguenti tabelle:

$$w_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad w_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{bmatrix} \quad w_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

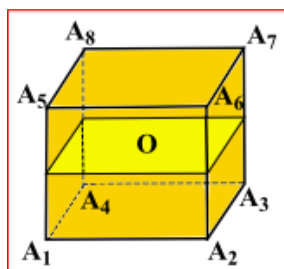


FIG. 21

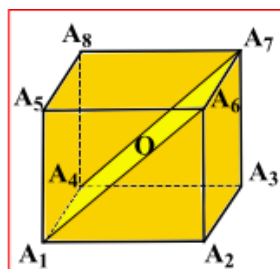


FIG. 22

- Oltre ai piani mediani vi sono altri piani di simmetria in un cubo.

Uno di essi è il piano di due diagonali, come per esempio il piano $A_1A_4A_7A_6$ (Fig. 22): si chiama *piano diagonale*. Poiché le 4 diagonali di un cubo si possono accoppiare in 6 modi diversi, vi sono 6 piani diagonali. Coticché risultano individuate altre simmetrie nel cubo: **N° 6 simmetrie rispetto a ciascuno dei 6 piani diagonali**. In particolare:

- la simmetria σ_1 rispetto al piano diagonale $A_1A_2A_7A_8$;
- la simmetria σ_2 rispetto al piano diagonale $A_1A_4A_7A_6$;
- la simmetria σ_3 rispetto al piano diagonale $A_1A_3A_7A_5$;
- la simmetria σ_4 rispetto al piano diagonale $A_2A_3A_8A_5$;
- la simmetria σ_5 rispetto al piano diagonale $A_2A_4A_8A_6$;
- la simmetria σ_6 rispetto al piano diagonale $A_3A_4A_5A_6$.

Esse stabiliscono tra i vertici del cubo delle corrispondenze secondo le seguenti tabelle:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 6 & 5 & 4 & 3 & 7 & 8 \end{bmatrix} & \sigma_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 8 & 4 & 2 & 6 & 7 & 3 \end{bmatrix} & \sigma_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 8 & 7 & 6 \end{bmatrix} \\ \sigma_4 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 3 & 7 & 5 & 1 & 4 & 8 \end{bmatrix} & \sigma_5 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 7 & 6 & 5 & 8 \end{bmatrix} & \sigma_6 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

26.5.3 Occupiamoci, ora, delle simmetrie assiali in un cubo.

□ Consideriamo le tre rette – a_1, a_2, a_3 – ciascuna delle quali unisce i centri di due facce opposte del cubo: si dicono *assi mediani* del cubo (Fig. 23).

Esse sono assi di simmetria del cubo e determinano perciò altre simmetrie: **N° 3 simmetrie assiali rispetto a ciascuno dei 3 assi mediani**. In particolare:

- la simmetria α_1 rispetto all’asse mediano a_1 ;
- la simmetria α_2 rispetto all’asse mediano a_2 ;
- la simmetria α_3 rispetto all’asse mediano a_3 .

Esse sono caratterizzate dalle seguenti tabelle di corrispondenza tra i vertici del cubo:

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 7 & 8 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 8 & 7 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

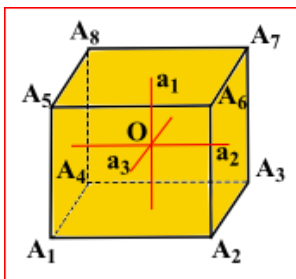


FIG. 23

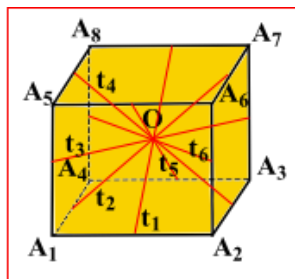


FIG. 24

- Consideriamo poi le rette – $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$ – ciascuna delle quali unisce i punti medi di due spigoli opposti: si dicono *assi trasversi* del cubo (Fig. 24).

Essi sono assi di simmetria per il cubo. Pertanto risultano individuate altre simmetrie assiali: **N° 6 simmetrie assiali rispetto a ciascuno dei 6 assi trasversi**. In particolare:

- la simmetria s_1 rispetto all’asse trasverso t_1 ;

- la simmetria s_2 rispetto all'asse trasverso t_2 ;
- la simmetria s_3 rispetto all'asse trasverso t_3 ;
- la simmetria s_4 rispetto all'asse trasverso t_4 ;
- la simmetria s_5 rispetto all'asse trasverso t_5 ;
- la simmetria s_6 rispetto all'asse trasverso t_6 .

Sono caratterizzate dalle seguenti tabelle di corrispondenza:

$$s_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 3 & 4 & 8 & 7 \end{bmatrix} \quad s_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 5 & 1 & 3 & 7 & 6 & 2 \end{bmatrix} \quad s_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 7 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$s_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 2 & 6 & 8 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad s_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 4 & 3 & 6 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad s_6 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 8 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

26.5.4 In conclusione vi sono 19 simmetrie in un cubo:

una simmetria centrale; 9 simmetrie piane; 9 simmetrie assiali.

Questo non significa, però, che non vi siano altre trasformazioni geometriche che mutano un cubo in sé. Tutt'altro. Riprenderemo il discorso tra breve per un approfondimento. Ma ancora per un momento vogliamo soffermarci sulle “simmetrie” in altri particolari solidi geometrici. Lo faremo chiedendoti una “forte” collaborazione.

26.5.5 Ti proponiamo, sulla falsariga di quanto hai potuto vedere a proposito del cubo, alcuni esercizi che riguardano altri solidi geometrici:

- Studiare le simmetrie che mutano un **tetraedro regolare** in sé. Discutine con i tuoi compagni e, se proprio necessario, chiedi aiuto al tuo professore.
- È evidente che ogni piano contenente l'asse di rotazione di un **cilindro circolare retto** è un piano di simmetria per lo stesso. Vi sono altri piani di simmetria? Vi sono assi di simmetria? Il cilindro ha un centro di simmetria?
- Un **cono circolare retto** ha piani di simmetria? Ha assi di simmetria?
- Una **sfera** ha evidentemente un centro di simmetria. Ha piani di simmetria? Ha assi di simmetria?

26.6 MOVIMENTI CHE MUTANO UN POLIEDRO REGOLARE IN SÉ. LABORATORIO DI MATEMATICA.

26.6.1 Se ritorniamo con la mente ai movimenti che mutano in sé un poligono regolare, per esempio un quadrato, ci rendiamo conto che alcuni di essi (precisamente le rotazioni) agiscono senza uscire dal piano della figura; altri invece (le simmetrie assiali) agiscono uscendo da piano, anche se poi vi rientrano.

Qualcosa del genere accade con i poliedri regolari, quantunque sembri difficile capire come possa avvenire che una figura solida esca dallo spazio in cui è immersa per poi rientrarvi.

In realtà, se si considerano le trasformazioni che mutano un cubo in sé e che sono state oggetto di studio nel precedente paragrafo, ci accorgiamo che alcune di esse sono movimenti che si svolgono nello spazio in cui il cubo è immerso (sono precisamente le simmetrie rispetto a particolari assi), altre sono movimenti che non possono svolgersi in quello spazio (le simmetrie rispetto a particolari piani o rispetto al centro del cubo).

Qui vogliamo però descrivere quei movimenti che trasformano un **cubo** in sé, ma senza uscire dallo spazio in cui il cubo è immerso: sono tutte rotazioni intorno a rette particolari.

Vedremo che parte di esse coincidono con alcune simmetrie già descritte.

- La prima trasformazione che possiamo prendere in considerazione è quel movimento che ... non cambia niente, cioè l'**identità i**. Essa, per ritornare al solito modo di indicare una trasformazione, è individuata dalla seguente tabella di corrispondenza dei vertici:

$$i = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

- Consideriamo ora una asse mediano del cubo, per esempio l'asse mediano a_1 (Fig. 23). Tre rotazioni (in senso antiorario) del cubo intorno a quest'asse lo mutano in sé. Precisamente:
 - la rotazione r_{11} di 90° ;
 - la rotazione r_{12} di 180° ;
 - la rotazione r_{13} di 270° .

Esse sono caratterizzate dalle seguenti tabelle di corrispondenza dei vertici:

$$r_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 8 & 5 \end{bmatrix} \quad r_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 7 & 8 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad r_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 8 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Ma poi vi sono altre tre rotazioni intorno all'asse mediano a_2 e tre rotazioni intorno all'asse mediano a_3 , sempre di 90° , 180° e 270° , caratterizzate dalle seguenti tabelle di corrispondenza:

$$r_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 7 & 8 & 1 & 2 & 6 & 5 \end{bmatrix} \quad r_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad r_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 2 & 1 & 8 & 7 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$r_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 7 & 3 & 1 & 5 & 8 & 4 \end{bmatrix} \quad r_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 8 & 7 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad r_{33} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 4 & 8 & 6 & 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

Facciamo notare come le rotazioni di 180° (r_{12} , r_{22} , r_{32}) coincidano con le simmetrie rispetto agli assi mediani α_1 , α_2 , α_3 , considerate in precedenza.

- Consideriamo quindi un asse traverso, per esempio l'asse traverso t_1 (Fig. 24). La rotazione di 180° intorno ad esso trasforma il cubo in sé. Così come le rotazioni di 180° intorno a ciascuno dei sei assi trasversi. Per cui ci sono altre 6 rotazioni da considerare:
 - la rotazione R_1 di 180° intorno all'asse traverso t_1 ;
 - la rotazione R_2 di 180° intorno all'asse traverso t_2 ;
 - la rotazione R_3 di 180° intorno all'asse traverso t_3 ;
 - la rotazione R_4 di 180° intorno all'asse traverso t_4 ;
 - la rotazione R_5 di 180° intorno all'asse traverso t_5 ;
 - la rotazione R_6 di 180° intorno all'asse traverso t_6 .

Sono caratterizzate dalle seguenti tabelle di corrispondenza:

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 3 & 4 & 8 & 7 \end{bmatrix} \quad R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 5 & 1 & 3 & 7 & 6 & 2 \end{bmatrix} \quad R_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 7 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$R_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 2 & 6 & 8 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad R_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 4 & 3 & 6 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad R_6 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 8 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

E sono esattamente le simmetrie rispetto ai medesimi assi trasversi s_1 , s_2 , s_3 , s_4 , s_5 , s_6 già descritte.

- Consideriamo, infine, una diagonale del cubo, per esempio la diagonale A_1A_7 (Fig. 2). Due rotazioni (in senso antiorario), una di 120° e una di 240° , intorno a questa diagonale mutano il cubo in sé. Ma questo vale per ciascuna delle 4 diagonali. Per cui sono da annoverare altre 8 rotazioni:
 - la rotazione ρ_{11} di 120° intorno alla diagonale A_1A_7 ;

- la rotazione ρ_{12} di 240° intorno alla diagonale A_1A_7 ;
- la rotazione ρ_{21} di 120° intorno alla diagonale A_2A_8 ;
- la rotazione ρ_{22} di 240° intorno alla diagonale A_2A_8 ;
- la rotazione ρ_{31} di 120° intorno alla diagonale A_3A_5 ;
- la rotazione ρ_{32} di 240° intorno alla diagonale A_3A_5 ;
- la rotazione ρ_{41} di 120° intorno alla diagonale A_4A_6 ;
- la rotazione ρ_{42} di 240° intorno alla diagonale A_4A_7 .

Queste rotazioni sono caratterizzate dalle seguenti tabelle di corrispondenza:

$$\begin{array}{ll} \rho_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 8 & 5 & 2 & 3 & 7 & 6 \end{bmatrix} & \rho_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 6 & 2 & 4 & 8 & 7 & 3 \end{bmatrix} \\ \rho_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 1 & 5 & 7 & 3 & 4 & 8 \end{bmatrix} & \rho_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 6 & 7 & 4 & 1 & 5 & 8 \end{bmatrix} \\ \rho_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 3 & 2 & 5 & 8 & 4 & 1 \end{bmatrix} & \rho_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 3 & 7 & 5 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \\ \rho_{41} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 1 & 4 & 7 & 6 & 2 & 3 \end{bmatrix} & \rho_{42} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 8 & 4 & 2 & 6 & 5 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

- In conclusione, compresa l'identità, ci sono 24 rotazioni che mutano un cubo in sé, ovviamente senza uscire dallo spazio in cui il cubo è immerso.

Ricordiamo che erano state considerate 19 simmetrie di vario tipo, ma che 9 di queste sono state ritrovate come particolari rotazioni; per cui le simmetrie già studiate, che, pur senza rimanere nello spazio che contiene il cubo, lo mutano in sé, sono 16. In totale, quindi, sembrerebbe che $24+10=34$ trasformazioni mutino un cubo in sé.

In realtà, se una qualsiasi delle 10 simmetrie che non si possono considerare rotazioni (sono: la simmetria centrale rispetto al centro del cubo, le 3 simmetrie rispetto ai piani mediani, le 6 simmetrie rispetto ai piani diagonali), si fa seguire da ciascuna delle 24 rotazioni, si ottengono tali 10 simmetrie più altri 14 movimenti che pure mutano il cubo in sé ma senza rimanere nello spazio in cui il cubo è immerso. Per la precisione:

- a) componendo la simmetria centrale c con l'identità i si ritrova c ;
- b) componendo la simmetria centrale c con le rotazioni r_{12} , r_{22} , r_{32} si ritrovano le simmetrie rispetto ai piani mediani w_1 , w_2 , w_3 ;
- c) componendo la simmetria centrale c con le rotazioni R_1 , R_2 , R_3 , R_4 , R_5 , R_6 si ritrovano, a parte l'ordine, le simmetrie rispetto ai piani diagonali σ_1 , σ_2 , σ_3 , σ_4 , σ_5 , σ_6 ;
- d) componendo la simmetria centrale c con le rotazioni r_{11} , r_{13} , r_{21} , r_{23} , r_{31} , r_{33} e le rotazioni ρ_{11} , ρ_{12} , ρ_{21} , ρ_{22} , ρ_{31} , ρ_{32} , ρ_{41} , ρ_{42} si trovano complessivamente 14 nuove simmetrie del cubo.

In definitiva, i movimenti che mutano un cubo in sé sono 48: esattamente 24 (le rotazioni) agiscono senza uscire dallo spazio in cui il cubo è immerso e 24 uscendo da tale spazio.

26.6.2 Considerato che il poliedro che ha per vertici i centri delle facce di cubo è un **ottaedro regolare** e, pertanto, i movimenti che mutano un cubo in sé mutano anche l'ottaedro regolare in sé, possiamo trarre per l'ottaedro le medesime conclusioni che abbiamo tratto per il cubo e che non riteniamo opportuno ripetere.

26.6.3 Per quanto attiene al **tetraedro regolare**, lasciamo a te la ricerca dei movimenti che lo mutano in sé, distinguendo in particolare tra movimenti che avvengono all'interno dello spazio in cui il solido è immerso

(rotazioni intorno a rette particolari) e movimenti che avvengono uscendo da tale spazio.

Se farai le cose per bene troverai esattamente 24 movimenti, di cui 12 rotazioni (compresa l'identità) e 12 movimenti che avvengono uscendo dallo spazio il cui il tetraedro è immerso.

26.6.4 Riguardo al **dodecaedro regolare** ci limitiamo a trarre le conclusioni, giusto a livello di semplice curiosità.

I movimenti che mutano questo solido in sé sono complessivamente 120, dei quali 60 avvengono senza uscire dallo spazio e 60 uscendo da esso.

In particolare i primi 60 movimenti (rotazioni intorno a rette) sono:

- l'identità;
- quattro rotazioni (una di 72° , una di 144° , una di 216° , l'ultima di 288°) intorno a ciascuna delle rette che uniscono i centri delle 6 coppie di facce opposte (*assi mediani*), per complessive 24 rotazioni;
- una rotazione di 180° intorno a ciascuna delle rette che uniscono i punti medi delle 15 coppie di spigoli opposti (*assi traversi*), per complessive 15 rotazioni;
- due rotazioni (una di 120° e una di 240°) intorno a ciascuna delle rette che uniscono le 10 coppie di vertici opposti (*assi diagonali*), per complessive 20 rotazioni.

Per quanto riguarda l'**icosaedro regolare**, considerato che si può concepire come il poliedro avente per vertici i centri delle facce di un dodecaedro, i movimenti che lo mutano in sé sono esattamente quelli che mutano in sé il dodecaedro.

NOTA BENE

Su questo argomento non sono predisposti altri esercizi e verifiche, oltre a quelli proposti passo dopo passo nello svolgimento dell'unità ed oltre all'attività di laboratorio che invece è fondamentale per sviluppare una forte intuizione spaziale. È invece predisposta la solita sezione conclusiva “una breve sintesi per domande e risposte”.

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

DOMANDE.

1. È vero che le diagonali di un cubo, propriamente dette, sono la metà del numero dei suoi vertici?
2. Sai dire perché i poliedri regolari si dicono anche solidi platonici?
3. Quanti sono i poliedri regolari? Quali sono i loro nomi? Quali e quanti poligoni formano le loro facce?
4. Quanti sono “i movimenti nello spazio” che mutano un cubo in sé? Quanti quelli “al di fuori dello spazio”?
5. Quanti sono “i movimenti nello spazio” che mutano un tetraedro regolare in sé? Quanti quelli “al di fuori dello spazio”?
6. Descrivi “i movimenti nello spazio” che mutano un tetraedro regolare in sé.
7. Quanti sono “i movimenti nello spazio” che mutano un dodecaedro regolare in sé? Quanti quelli “al di fuori dello spazio”?
8. Che tipo di poliedro è quello che ha per vertici i centri delle facce di un tetraedro regolare, di un esaedro regolare, di un ottaedro regolare, di un dodecaedro regolare, di un icosaedro regolare?
9. È corretto affermare che i movimenti (dentro e fuori dello spazio) che mutano un ottaedro regolare in sé sono esattamente uguali a quelle che mutano un esaedro regolare in sé?

10. È corretto affermare che i movimenti (dentro e fuori dello spazio) che mutano un icosaedro regolare in sé sono esattamente uguali a quelle che mutano un dodecaedro regolare in sé?

RISPOSTE.

1. Sì. Infatti una diagonale di un cubo è il segmento che congiunge due vertici opposti e quindi le diagonali sono tante quante le coppie di vertici opposti, vale a dire la metà del numero dei vertici del cubo.
2. Poiché il filosofo Platone ne parla diffusamente in uno dei suoi “dialoghi”: il *Timeo*.
3. Sono 5: tetraedro (4 triangoli), esaedro (6 quadrati), ottaedro (8 triangoli), dodecaedro (12 pentagoni), icosaedro (20 triangoli).
4. Sono 24 gli uni e 24 gli altri.
5. Sono 12 gli uni e 12 gli altri.
6. Sono 12: l'identità; due rotazioni (120° , 240°) intorno a ciascuna delle 4 altezze del tetraedro, per complessive 8 rotazioni; una rotazione (180°) intorno a ciascuno dei tre assi trasversi (congiungente i punti medi di due spigoli opposti, cioè non appartenenti alla stessa faccia) per complessive 3 rotazioni.
7. Sono 60 gli uni e 60 gli altri.
8. Sono tutti poliedri regolari. Precisamente, nell'ordine: tetraedro, ottaedro, esaedro, icosaedro, dodecaedro.
9. Sì. L'ottaedro regolare, infatti, si può pensare come generato dall'esaedro regolare considerando il poliedro che ha per vertici i centri delle sue facce.
10. Sì. L'icosaedro regolare, infatti, si può pensare come generato dal dodecaedro regolare considerando il poliedro che ha per vertici i centri delle sue facce.