Prerequisiti:

- Conoscenza dei primi elementi di geometria piana (congruenze dei triangoli, poligoni, teoremi di Pitagora e di Euclide, aree dei poligoni, isometrie).

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:

- *definire un poligono inscrivibile o circoscrivibile ad una circonferenza*
- *enunciare e dimostrare le condizioni affinché un quadrilatero sia inscrivibile in un cerchio o circoscrivibile ad un cerchio*
- *analizzare e risolvere problemi*

L'unità è indirizzata agli studenti del primo biennio di tutte le scuole superiori.

Poligoni inscrivibili e circoscrivibili

Unità 29

29.1 DEFINIZIONI

29.1.1 Un poligono si dice:

a) ***inscritto*** in una circonferenza se i suoi vertici appartengono alla circonferenza (Fig. 1); un poligono inscritto in una circonferenza si dice anche ***ciclico***:

b) ***circoscritto*** ad una circonferenza se i suoi lati sono tangenti alla circonferenza (Fig. 2).

Reciprocamente, nel primo caso si dice che la circonferenza è *circoscritta* al poligono e nel secondo che è *inscritta* in esso.

Nel primo caso si dice anche che il poligono è inscritto nel cerchio o che questo è circoscritto al poligono e nel secondo caso che il poligono è circoscritto al cerchio o che questo è inscritto nel poligono.

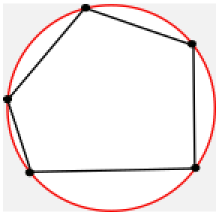

FIG. 1

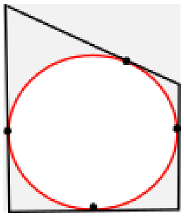

FIG. 2

Prendi in considerazione un triangolo qualsiasi: sei in grado di spiegare se e perché esso è inscrivibile e/o circoscrivibile ad una circonferenza? Rifletti bene prima di procedere nello studio.

Se ce l'hai fatta, bene; in caso contrario, pazienza: troverai subito qui appresso la risposta.

Si può stabilire facilmente che, considerato un qualsiasi triangolo, esiste sia la circonferenza ad esso circoscritta sia quella in esso inscritta: il centro della prima è il *circocentro* del triangolo, quello della seconda è l'*incentro*. (Ricordi che hai avuto a che fare con questi due punti? Come si costruiscono?)

Si dice che *il triangolo è un poligono inscrivibile e circoscrivibile*.

Ti proponiamo qualche esercizio.

1. Se il triangolo è un triangolo rettangolo, dove è situato il suo circocentro? Se il triangolo è isoscele, quale caratteristica contraddistingue il circocentro e l'incentro? Quale se il triangolo è equilatero?
2. Un angolo acuto di un triangolo rettangolo misura 40°. Si consideri il triangolo avente per vertici i punti in cui i lati del triangolo dato toccano la circonferenza inscritta in esso. Calcolare le misure degli angoli interni di questo nuovo triangolo.
3. In un triangolo ABC, rettangolo in C, è inscritto il cerchio di centro O. È determinata la misura dell'angolo convesso $A\widehat{O}B$? Lo sono quelle degli angoli convessi $A\widehat{O}C$ e $C\widehat{O}B$?
4. Il triangolo avente per vertici i punti in cui i lati di un triangolo assegnato toccano la circonferenza inscritta in esso è in ogni caso un triangolo acutangolo. È vero o è falso?

   [**R.** Indicate con α, β, γ le ampiezze degli angoli interni del triangolo dato, si può ipotizzare, senza che la questione perda di generalità, che sia $\alpha \geq \beta \geq \gamma$, ragion per cui il maggiore degli angoli dell'altro triangolo ha ampiezza $\frac{\alpha+\beta}{2}$; se ne desume che …]

29.1.2 A differenza di quanto accade per il triangolo, non è vero che un qualsiasi poligono è inscrivibile in una circonferenza o circoscrivibile ad una circonferenza.

Vale tuttavia il seguente criterio generale, facilmente spiegabile, per stabilire se un poligono qualunque è inscrivibile o circoscrivibile ad una circonferenza:

Un poligono è inscrivibile in una circonferenza se e solo se gli assi dei suoi lati passano per uno stesso punto (il centro della circonferenza circoscritta).
Un poligono è circoscrivibile ad una circonferenza se e solo se le bisettrici dei suoi angoli interni passano per uno stesso punto (il centro della circonferenza inscritta).

A parte questa, non vi sono regole speciali per stabilire se un poligono generico è inscrivibile in una circonferenza o circoscrivibile ad una circonferenza. Fanno però eccezione i quadrilateri, per i quali queste regole ci sono. Lo vedremo fra breve.

29.1.3 Un poligono avente i lati congruenti fra loro (vale a dire *equilatero*) e gli angoli congruenti fra loro (vale a dire *equiangolo*) si dice, come noto, **poligono regolare**.
Si dimostra agevolmente che in ogni poligono regolare esiste un punto, chiamato ***centro*** del poligono, che ha la stessa distanza dai lati del poligono e la stessa distanza dai suoi vertici.
La prima distanza si chiama ***apotema*** del poligono, la seconda ***raggio***.
Questo significa che:

Ogni poligono regolare è circoscrivibile e inscrivibile e le due circonferenze, quella inscritta e quella circoscritta, sono concentriche.
Inoltre, il raggio della prima è l'apotema del poligono e quello della seconda è il raggio del poligono.

In realtà, si parla di apotema del poligono anche se questo non è regolare, a condizione però che sia circoscrivibile ad una circonferenza. Ebbene ancora il raggio della circonferenza inscritta nel poligono si chiama ***apotema*** del poligono.

Ti proponiamo per esercizio di dimostrare le seguenti proprietà:
1. L'area A di un poligono circoscrivibile ad una circonferenza è data dalla formula seguente:
$$\mathbf{A = p\ a},$$
dove p è il semiperimetro del poligono ed a è il suo apotema, ovvero il raggio della circonferenza.
2. È dato un poligono regolare di n lati e un qualunque punto interno ad esso o appartenente ad uno qualunque dei lati: la somma delle distanze di tale punto dai lati del poligono è uguale ad n volte l'apotema del poligono.
3. Il pentagono ABCDE è circoscritto ad un cerchio di centro O. I lati AE e BC sono perpendicolari al lato AB e inoltre gli angoli $A\hat{O}E$ e $D\hat{O}E$ misurano entrambi 60°. Trovare le misure degli angoli interni del pentagono.

29.2 QUADRILATERI INSCRIVIBILI E CIRCOSCRIVIBILI

29.2.1 TEOREMA. Condizione necessaria e sufficiente affinché un quadrilatero sia inscrivibile in una circonferenza è che gli angoli opposti siano supplementari.
DIMOSTRAZIONE.
- <u>La condizione è necessaria</u>: se un quadrilatero è inscrivibile in una circonferenza allora i suoi angoli opposti sono supplementari.

Considerato, infatti, il quadrilatero ABCD inscritto in una circonferenza (Fig. 3), si ha:
$$B\hat{A}D+B\hat{C}D=180°$$
poiché i corrispondenti angoli al centro hanno per somma 360°.

D’altronde la somma degli angoli interni del quadrilatero è 360°; perciò anche:

$$A\hat{B}C+A\hat{D}C=180°$$

- <u>La condizione è sufficiente</u>: se gli angoli opposti di un quadrilatero sono supplementari allora il quadrilatero è inscrivibile in una circonferenza.

Per dimostrare la proposizione occorre provare che la circonferenza passante per tre vertici del quadrilatero – mettiamo A, B, C – passa pure per il quarto vertice D.
Ora, se tale circonferenza non passasse per D, intersecherebbe il segmento AD (Fig. 4a) o il suo prolungamento (Fig. 4b) in un punto E. In entrambi i casi, gli angoli $A\hat{E}C$ e $A\hat{D}C$ sarebbero congruenti perché entrambi supplementari dell’angolo $A\hat{B}C$. Il che è assurdo poiché i due angoli suddetti sono un angolo interno e un angolo esterno non adiacente del triangolo DEC.
Concludiamo che la circonferenza passante per A, B, C passa pure per D.

Conosci dei quadrilateri particolari inscrivibili in una circonferenza? Conosci dei quadrilateri particolari non inscrivibili?

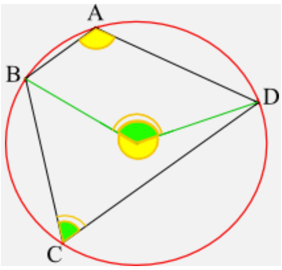

FIG. 3

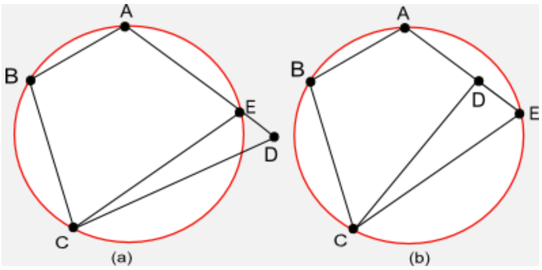

FIG. 4

ESERCIZIO. Un dato quadrilatero convesso è diviso da una sua diagonale in due triangoli rettangoli. Può essere inscritto in una circonferenza?

29.2.2 TEOREMA. Condizione necessaria e sufficiente affinché un quadrilatero sia circoscrivibile ad una circonferenza è che la somma di due lati opposti sia uguale a quella degli altri due.

DIMOSTRAZIONE.

- <u>La condizione è necessaria</u>: se un quadrilatero è circoscrivibile ad una circonferenza allora la somma di due lati opposti è uguale a quella degli altri due.

Considerato, infatti, il quadrilatero ABCD circoscritto ad una circonferenza (Fig. 5) e detti E, F, G, H i punti di contatto dei lati AB, BC, CD, DA ordinatamente con la circonferenza stessa, per una nota proprietà delle tangenti si ha:

$$AE=AH,\quad EB=BF,\quad DG=HD,\quad GC=FC,$$

da cui, sommando membro a membro e notando che:

$$AE+EB=AB,\ DG+GC=DC,\ AH+HD=AD,\ BF+FC=BC,$$

segue:

$$AB+DC=AD+BC. \qquad \text{[c.v.d.]}$$

- <u>La condizione è sufficiente</u>: se la somma di due lati opposti di un quadrilatero è uguale a quella degli altri due allora il quadrilatero è circoscrivibile ad una circonferenza.

Per dimostrare l’implicazione occorre provare che la circonferenza tangente a tre lati del quadrilatero – mettiamo AB, BC, CD – è pure tangente al quarto lato DA.
Ora, se tale circonferenza non fosse tangente a DA, sarebbe o secante o esterna alla retta di tale lato.

Nel primo caso (Fig. 6) conduciamo per A la seconda tangente, oltre AB, alla circonferenza e diciamo E il punto in cui essa interseca la retta CD. Allora per la prima parte del teorema si ha:

$$\mathrm{AB} + \mathrm{CE} = \mathrm{AE} + \mathrm{BC};$$

per ipotesi si ha:

$$\mathrm{AB} + \mathrm{CD} = \mathrm{AD} + \mathrm{BC};$$

per cui, sottraendo membro a membro segue:

$$\mathrm{CE} - \mathrm{CD} = \mathrm{AE} - \mathrm{AD},$$

cioè:

$$\mathrm{DE} = \mathrm{AE} - \mathrm{AD} \text{ o anche } \mathrm{AE} = \mathrm{AD} + \mathrm{DE}.$$

Conclusione assurda poiché nel triangolo ADE ogni lato è minore della somma degli altri due. Quindi AD non seca la circonferenza.
Con analogo ragionamento si dimostra che non è neppure esterna.
Si conclude che AD è tangente alla circonferenza.

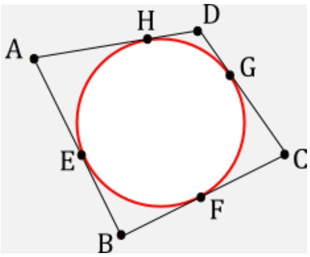

FIG. 5

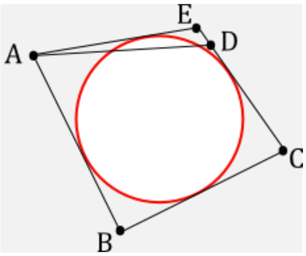

FIG. 6

Conosci dei quadrilateri particolari circoscrivibili ad una circonferenza? Conosci dei quadrilateri particolari non circoscrivibili? Conosci infine qualche quadrilatero inscrivibile e circoscrivibile?

ESERCIZIO. Le misure dei lati AB, BC, CD, DA del quadrilatero convesso ABCD, riferite alla stessa unità di misura, sono espresse, nell'ordine, dai seguenti binomi: $4x+5$, $25-2x$, $22-x$, $5x+3$, dove x è una misura variabile. Esiste una misura x per la quale il quadrilatero è circoscrivibile ad un cerchio?

29.2.3 Terminiamo con alcune questioni di cui ti proponiamo la risoluzione.

1. Indicate con L_3, L_4, L_6 rispettivamente le lunghezze dei lati del triangolo equilatero, del quadrato, dell'esagono regolare inscritti in una circonferenza di raggio assegnato R, dimostrare [1] che risulta:
$$L_3 = R\sqrt{3}\,, \quad L_4 = R\sqrt{2}\,, \quad L_6 = R\,.$$
2. Dimostrare che la mediana di un triangolo rettangolo, relativa all'ipotenusa, è lunga la metà dell'ipotenusa stessa [2].
3. Dimostrare che, se un parallelogramma è inscrivibile in una circonferenza, è un rettangolo.
4. Dimostrare che, se un parallelogramma è circoscrivibile ad una circonferenza, è un rombo.
5. Dimostrare che, se un trapezio è inscrivibile in una circonferenza, è isoscele.
6. Dimostrare che il perimetro di un trapezio isoscele circoscritto ad un cerchio è 4 volte la lunghezza del lato obliquo.
7. Due triangoli rettangoli hanno la stessa ipotenusa. Dimostrare che il quadrilatero avente per vertici gli estremi dell'ipotenusa ed i vertici dei due angoli retti è inscrivibile in un cerchio e determinare il cen-

[1] Questi risultati sono utilizzati spesso. Ti suggeriamo di memorizzarli.
[2] Hai avuto modo probabilmente di dimostrare in passato questa proprietà del triangolo rettangolo. Adesso lo puoi rifare con un procedimento diverso e più rapido di quello seguito a suo tempo.

tro di tale cerchio.

8. Considerato un triangolo ABC, non rettangolo, si chiami D la proiezione di A sulla retta BC ed E quella di B sulla retta AC. Indicato con F il punto in cui si secano le rette AD e BE, dimostrare che il quadrilatero convesso avente per vertici i punti C, E, F, D è inscrivibile in un cerchio. Dimostrare che anche il quadrilatero convesso avente per vertici i punti A, B, D, E è inscrivibile in un cerchio.
9. Dato un triangolo qualunque ABC, si considerino le sue altezze AD e BE. Dimostrare che l'asse del segmento ED passa per il punto medio del lato AB.
10. Supposto che una circonferenza sia divisa in n (n≥3) parti congruenti, dimostrare che il poligono avente per vertici i punti di divisione ed il poligono che si ottiene conducendo le tangenti nei punti di divisione sono poligoni regolari, il primo inscritto e il secondo circoscritto alla circonferenza.
11. Il trapezio ABCD, di basi AB e DC, è circoscritto ad un cerchio di centro O. Dimostrare che i due triangoli AOD e BOC sono entrambi rettangoli in O.
12. Il trapezio ABCD è circoscritto ad un cerchio di centro O. Siano AB e CD le sue basi e siano 20° e 60° le misure rispettivamente degli angoli $\mathrm{O\widehat{A}B}$ e $\mathrm{C\widehat{O}D}$. Calcolare le misure degli angoli interni del trapezio.
13. Dimostrare che il raggio r del cerchio inscritto in un triangolo di area A e semiperimetro p è dato dalla formula [(3)]: $\mathrm{r = A/p}$.
14. Dimostrare che il raggio del cerchio circoscritto ad un triangolo equilatero è il doppio di quello inscritto.
15. Stabilire se il triangolo equilatero inscritto in un cerchio e quello circoscritto sono superfici commensurabili o incommensurabili.
16. Dimostrare che un poligono equilatero, inscritto in un cerchio, è equiangolo (e quindi è regolare).
17. Gli assi dei lati di un trapezio passano per uno stesso punto. Si può concludere che il trapezio è isoscele?
18. Un trapezio di area 336 cm^2 è circoscritto ad un cerchio di raggio 8 cm. I dati sono sufficienti per calcolare la somma dei suoi lati obliqui? Sono sufficienti per calcolare le misure dei lati del trapezio? E se il trapezio fosse isoscele?
19. Un trapezio rettangolo è circoscritto ad una circonferenza. Siano A, B, C, D i punti in cui toccano la circonferenza nell'ordine la base maggiore del trapezio, il lato obliquo, la base minore e il lato perpendicolare alle basi. Sia inoltre E il punto d'intersezione delle corde AC e BD. Dimostrare che sono uguali gli angoli $\mathrm{D\widehat{A}B}$ e $\mathrm{C\widehat{E}B}$.

VERIFICHE [(4)] [(5)]

1. Sommando a tre a tre, in tutti i modi possibili, le lunghezze dei lati di un quadrilatero, si ottengono i seguenti valori: $9\ a,\ 10\ a,\ 11\ a,\ 12\ a$, dove a è una lunghezza assegnata. Calcolare il perimetro del

[3] Vedi la precedente nota 1.
[4] **NOTA BENE**. Qualche problema ha come risolvente un'equazione di 2° grado o un'equazione in cui l'incognita figura sotto il segno di radice quadrata. In tal caso ci sono due possibilità: a) l'argomento è già stato studiato e la risoluzione del problema non presenta difficoltà; b) l'argomento non è stato ancora studiato e perciò la risoluzione, una volta ottenuta l'equazione risolvente, deve essere provvisoriamente accantonata.
[5] I problemi (o gli esercizi) contrassegnati col simbolo ® sono risolti (totalmente o parzialmente) e la risoluzione è situata nella cartella "Integrazione 2", file "Matematica – Integrazione 2, unità 28-88", pubblicata in questo medesimo sito e scaricabile gratuitamente.

quadrilatero. Stabilire, inoltre, se, disponendo in un ordine opportuno i lati del quadrilatero, esso risulta circoscrivibile ad un cerchio. [**R.** 14 a ; ...]

2. Nel quadrilatero ABCD, circoscrivibile ad un cerchio, si ha:

$$\mathrm{DA}-\mathrm{AB}=20\ \mathrm{cm}\,,\ \mathrm{DA}+\mathrm{AB}=\mathrm{BC}+\mathrm{CD}=40\ \mathrm{cm}\,.$$

Determinare il perimetro del quadrilatero ed i suoi lati. [**R.** 80 cm, …]

3. Le lunghezze dei lati AB, BC, CD, DA del quadrilatero ABCD sono nell'ordine: $6x-4a$, $4x-a$, $2x+a$, $3x+2a$, dove a è una lunghezza assegnata. Determinare per quale lunghezza x il quadrilatero è circoscrivibile ad un cerchio. [**R.** $x=4a$]

4. Sommando ad un angolo di un quadrilatero inscritto in un cerchio uno dei due angoli adiacenti ad esso si ottiene 110°, sommandogli invece l'altro angolo adiacente si ottiene 190°. Determinare gli angoli del quadrilatero. [**R.** 60°, 50°, 120°, 130°]

5. La somma dei due angoli adiacenti ad uno dei lati di un quadrilatero misura 170°; quella degli angoli adiacenti ad uno dei lati consecutivi al precedente misura 210°; infine, quella degli angoli adiacenti all'altro dei due lati consecutivi al primo misura 150°. Stabilire se il quadrilatero è inscrivibile in un cerchio. [**R.** Lo è solo a condizione che uno dei suoi angoli misuri 100°]

6. In un trapezio rettangolo circoscrivibile ad un cerchio, la somma del lato obliquo e dell'altezza è 90a e la differenza delle basi è 30a, dove a è una lunghezza data. Calcolare il perimetro e l'area del trapezio. [**R.** ... ; 1800 a^2]

7. Un trapezio rettangolo ABCD è diviso dalla sua diagonale minore AC in due triangoli, uno dei quali è equilatero. Il vertice A dell'angolo retto adiacente alla base maggiore AB dista dalla diagonale maggiore del trapezio di una lunghezza pari a $2b\sqrt{21}$, dove b è una lunghezza nota. Considerata la circonferenza circoscritta al triangolo equilatero e chiamato E il punto in cui essa seca la retta AD, oltre che in A, calcolare il perimetro e l'area del quadrilatero ABCE.

[**R.** La risoluzione richiede molta attenzione. Indicata con x la base maggiore, si trova la distanza di A dalla diagonale maggiore in funzione di x; per cui … $x=14b$. Constatato poi che EB è il diametro della circonferenza …]

8. In un trapezio isoscele circoscritto ad un cerchio di raggio r la base maggiore supera la minore di un segmento lungo 3r. Calcolare il perimetro e l'area del quadrilatero avente per vertici i punti di contatto dei lati del trapezio col cerchio. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{12}{5}r\sqrt{5},\ \frac{8}{5}r^2\right]$

9. Ciascuno dei lati obliqui di un trapezio isoscele ha lunghezza nota a e gli angoli adiacenti alla base maggiore hanno ampiezza 30°. Determinare le basi del trapezio sapendo che il suo perimetro è 4a. Dopo aver stabilito che il trapezio è circoscrivibile ad un cerchio, determinare il raggio del cerchio e le lunghezze delle parti in cui uno dei lati obliqui è diviso dal punto di tangenza.

$\left[\mathbf{R.}\ a-\frac{a}{2}\sqrt{3},\ \ a+\frac{a}{2}\sqrt{3};\ \frac{a}{4};...\right]$

10. La base maggiore di un trapezio isoscele coincide col diametro di un semicerchio e la base minore è una corda dello stesso semicerchio (si dice che il trapezio è *inscritto* nel semicerchio). Sapendo che il perimetro del trapezio è 5r, dove r è il raggio del semicerchio, calcolare l'area del trapezio.

11. La base maggiore di un trapezio rettangolo contiene il diametro di una semicirconferenza e gli altri tre lati sono tangenti ad essa (si dice che il trapezio è *circoscritto* alla semicirconferenza). Calcolare l'area del trapezio sapendo che il suo perimetro è 20 cm ed il raggio della semicirconferenza è 3 cm. [**R.** attenzione: equazione di 2° grado. 18 cm²]

12. Due circonferenze di raggi r ed r/2 sono tangenti internamente. Parallelamente alla loro tangente comune condurre una secante comune in modo che la somma dei quadrati delle corde intercettate su di essa dalle due circonferenze sia equivalente ad un quadrato di lato 2r.

13. In un trapezio rettangolo il lato perpendicolare alle basi coincide col diametro di una semicirconferenza e gli altri tre lati sono tangenti ad essa. Dopo aver dimostrato che il triangolo avente per vertici il centro della semicirconferenza e gli estremi del lato obliquo del trapezio è rettangolo, calcolare l'area del trapezio sapendo che il suo perimetro è $\frac{26}{3}$ r, dove r è il raggio della semicirconferenza.

14. Considerata una semicirconferenza di diametro 2r, si conducano per gli estremi del diametro le tangenti ad essa. Tracciata inoltre una terza tangente alla semicirconferenza, la quale, con le altre due e col diametro, formi un quadrilatero di area $\frac{5}{2}r^2$, si calcoli il perimetro di tale quadrilatero.

15. Considerata una semicirconferenza di diametro AB lungo 2r e di centro O, si dica P un suo punto e sia M la proiezione ortogonale di O su AP. Posto $\overline{AP}=x$, si esprima, in funzione di r e di x, l'area del triangolo AOM. Quindi si determini x in modo che tale area sia uguale a $\frac{3}{32}r^2\sqrt{7}$.

16. Considerata una semicirconferenza di centro O e di diametro AB lungo 2r, si dica C il punto situato sulla tangente ad essa in B dalla stessa parte della semicirconferenza, tale che $AC=OC\sqrt{2}$. Si calcoli l'area del triangolo AOC e la distanza di O dalla retta AC. Successivamente, detto D l'ulteriore punto in cui la retta AC interseca la semicirconferenza, si calcoli l'area del triangolo DOC.

17. Due circonferenze si intersecano in modo che la tangente a ciascuna di esse in uno dei punti comuni passi per il centro dell'altra. La distanza dei loro centri è 5a e la lunghezza della loro corda comune è $\frac{24}{5}a$, dove a è una lunghezza assegnata. Calcolare il perimetro e l'area del quadrilatero convesso avente per vertici i punti comuni alle due circonferenze ed i punti in cui esse sono intersecate dal segmento che unisce i loro centri. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{4}{5}a\left(2\sqrt{10}+3\sqrt{5}\right),\ \frac{24}{5}a^2\right]$

18. I lati di un trapezio sono tangenti ad una circonferenza. Sapendo che i lati obliqui sono lunghi 20a e 13a, dove a è una lunghezza assegnata, e che la base maggiore è uguale ai 9/2 della minore, calcolare l'area del trapezio e le distanze dei suoi vertici dal centro della circonferenza.

$\left[\mathbf{R.}\ 198a^2;\ 6a\sqrt{10},\ \ 3a\sqrt{13},\ \ 2a\sqrt{10},\ \ 2a\sqrt{13}\right]$

19. Siano O e C i centri di due circonferenze di rispettivi raggi r e 2r, tangenti esternamente. Una delle tangenti comuni alle circonferenze, distinta da quella che le tocca nello stesso punto, tocca la prima circonferenza in A e la seconda in B. Sul segmento AB determinare un punto P tale che: $OP=CP\sqrt{2}$.

20. Sull'arco]AB[, quarta parte di una circonferenza di centro O e raggio r, è fissato un punto P in modo che, detto C il punto medio del segmento OA, il quadrilatero OBPC sia equivalente al triangolo OAB. Calcolare il perimetro di tale quadrilatero.

21. Un trapezio rettangolo è circoscritto ad un semicerchio in modo che la sua base maggiore ne contenga il diametro. Sapendo che l'area del trapezio è $a^2\left(1+2\sqrt{2}\right)$, essendo a una lunghezza assegnata, e sapendo inoltre che la sua base minore è congruente al lato obliquo, calcolarne il perimetro. Calcolare infine la lunghezza della corda che congiunge i punti di contatto del semicerchio con la base minore e col lato obliquo del trapezio.

22. ® Sia ABC un qualsiasi triangolo e siano P, Q, R tre punti arbitrari presi internamente ai lati BC, CA, AB nell'ordine. Dimostrare che le tre circonferenze passanti per i punti (A,R,Q), (B,P,R), (C,Q,P) hanno un punto in comune. [Problema ad elevato coefficiente di difficoltà]

23. Nel triangolo ABC l'angolo in A è acuto ed i lati AB ed AC non sono congruenti. Indicata con m la retta contenente la mediana del triangolo uscente da A, indicare con D ed E le proiezioni ortogonali rispettivamente di B e C su m. Dopo aver dimostrato che il quadrilatero ADCE è un parallelogramma, rispondere alle seguenti domande, fornendo un'esauriente spiegazione delle risposte:

a) È possibile che tale parallelogramma sia un rettangolo? È possibile che sia un rombo?
b) È possibile che il quadrilatero ADCE sia inscrivibile in una circonferenza? È possibile che sia circoscrivibile ad una circonferenza?

24. Il rettangolo ABCD (Fig. 7) è inscritto nel quadrante di cerchio di centro A. Rispetto ad una medesima unità di misura, i segmenti AB e BE misurano rispettivamente 3 e 2.
La misura di BD è:

$$[A]\ \sqrt{15}\,; \quad [B]\ 4\,; \quad [C]\ 5\,; \quad [D]\ 6\,.$$

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata. (Tempo per la risposta: 10 secondi)

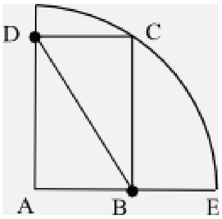

FIG. 7

25. Un trapezio rettangolo è circoscritto ad una circonferenza di raggio assegnato r. Siano A, B, C, D i punti in cui toccano la circonferenza nell'ordine la base maggiore del trapezio, il lato obliquo, la base minore e il lato perpendicolare alle basi. Sia inoltre E il punto d'intersezione delle corde AC e BD. Sapendo che l'angolo $B\widehat{E}C$ misura 75°, calcolare il perimetro e l'area del trapezio.

$$\left[\mathbf{R.}\ \frac{4}{3}r\left(3+2\sqrt{3}\right),\ \frac{2}{3}r^2\left(3+2\sqrt{3}\right)\right]$$

26. PROBLEMA RISOLTO. Considerato un triangolo ABC, sulla circonferenza circoscritta ad esso si prenda un punto P e si dicano L, H, K rispettivamente le sue proiezioni ortogonali sulle rette BC, CA, AB. Si dimostri che i punti L, H, K sono allineati (la retta che li contiene è chiamata **retta di Simson** [6] anche se in realtà la dimostrazione del teorema fu fatta dal suo connazionale Wallace, tant'è che qualcuno chiama quella retta **retta di Simson-Wallace** [7]).
RISOLUZIONE. Con riferimento alla figura 8, consideriamo anzitutto i tre quadrilateri convessi aventi per vertici i punti:

A, P, H, K ; P, L, B, K; P, L, C, H.

Nel primo quadrilatero i triangoli PHA e PKA sono entrambi rettangoli con ipotenusa AP: se ne desume che i vertici del quadrilatero sono situati sulla circonferenza di diametro AP. In altri termini il quadrilatero è inscritto in una circonferenza.
Lo stesso si dimostra per gli altri due quadrilateri.

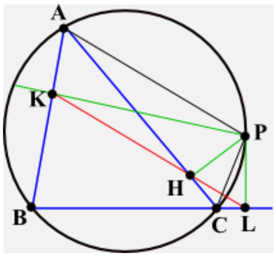

FIG. 8

[6] **Simson**, Robert, matematico scozzese, 1687-1768.
[7] **Wallace**, William, matematico scozzese, 1768-1863.

Ne conseguono i seguenti fatti:
- gli angoli $A\widehat{P}K$ e $A\widehat{H}K$ sono uguali perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco AK della circonferenza passante per i punti A,P,H,K;
- gli angoli $C\widehat{P}L$ e $C\widehat{H}L$ sono uguali perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco CL della circonferenza passante per i punti P,L,C,H;
- gli angoli $K\widehat{P}L$ e $K\widehat{B}L$ sono supplementari perché angoli opposti del quadrilatero convesso di vertici P,L,B,K, inscritto in una circonferenza.

D'altro canto, anche gli angoli $A\widehat{P}C$ e $A\widehat{B}C$ risultano supplementari perché angoli opposti del quadrilatero APCB, inscritto nella stessa circonferenza circoscritta al triangolo ABC.

Di conseguenza gli angoli $A\widehat{P}C$ e $K\widehat{P}L$ sono uguali perché supplementari dello stesso angolo $A\widehat{B}C$.

Ne discende che l'angolo $\left|A\widehat{P}L-A\widehat{P}C\right|$, cioè l'angolo $C\widehat{P}L$ è uguale all'angolo $\left|A\widehat{P}L-K\widehat{P}L\right|$, cioè all'angolo $A\widehat{P}K$.

Di modo che gli angoli $A\widehat{H}K$ e $C\widehat{H}L$, rispettivamente uguali agli angoli uguali $A\widehat{P}K$ e $C\widehat{P}L$, risultano uguali essi stessi.

Siccome i punti A, H, C sono allineati lo devono essere pure i punti L, H, K. [c.v.d.]

27. PROBLEMA RISOLTO. Dato un triangolo, si considerino i seguenti nove punti:
- i punti medi dei lati del triangolo;
- i piedi delle altezze del triangolo;
- i punti medi dei segmenti aventi ciascuno un estremo nell'ortocentro del triangolo e l'altro estremo in un vertice.

Dimostrare che i nove punti sono situati su una medesima circonferenza (è chiamata ***circonferenza dei nove punti o di Feuerbach*** [8]).

RISOLUZIONE. Indicato con ABC un generico triangolo (Fig. 9), si dicano:
- AD, BE, CF le sue altezze ed H l'ortocentro:
- L, M, N, nell'ordine, i punti medi dei lati BC, CA, AB;
- P, Q, R, nell'ordine, i punti medi dei segmenti AH, BH, CH.

Ci proponiamo di dimostrare che i nove punti D,E,F,L,N,N,P,Q,R sono situati sulla stessa circonferenza e lo vogliamo fare rimanendo in ambito di geometria sintetica.

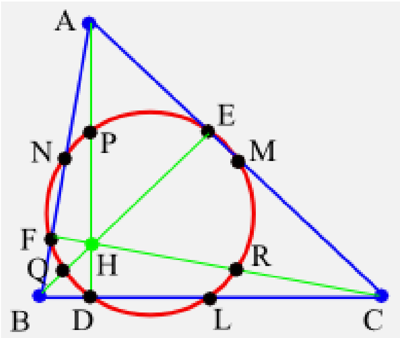

FIG. 9

Dimostriamo anzitutto che i punti L,R,P,N sono vertici di un rettangolo.

Il segmento LR congiunge i punti medi dei due lati CB e CH del triangolo CBH, quindi è lungo la metà di BH ed è parallelo ad esso.

[8] **Feuerbach**, Karl Wilhelm, matematico tedesco, 1800-1834.

Analogamente il segmento NP congiunge i punti medi dei due lati AB e AH del triangolo ABH, quindi è lungo la metà di BH ed è parallelo ad esso.
Di conseguenza il segmento LR è uguale e parallelo al segmento NP, per cui il quadrilatero LRPN è un parallelogramma.
D'altro canto, oltre al fatto che NP è parallelo a BE, risulta anche PR parallelo ad AC. E siccome AC è perpendicolare a BE ne consegue che NP è perpendicolare a PR. Dunque il parallelogramma LRPN ha un angolo retto e pertanto è un rettangolo. Esso è dunque inscritto nella circonferenza γ di diametri NR e LP.
Ragionando allo stesso modo si dimostra che il quadrilatero LMPQ è un rettangolo e perciò è inscritto nella circonferenza di diametri MQ e LP, vale a dire la stessa circonferenza γ.
Ma la circonferenza γ contiene evidentemente anche i punti D, E, F: basti osservare che i triangoli LPD, MQE, NRF sono rettangoli e le loro ipotenuse sono diametri di γ.
In conclusione, i nove punti D,E,F,L,M,N,P,Q,R appartengono alla medesima circonferenza γ.
Si potrebbe poi dimostrare che tale circonferenza ha diametro uguale al raggio della circonferenza circoscritta al triangolo assegnato ABC. Ma questo ci esimiamo dal farlo.

28. Sia ABC un triangolo acutangolo e siano AH, BK, CL le sue altezze ed O il suo ortocentro. Dimostrare che sono uguali gli angoli:

a) $O\widehat{H}L$ e $O\widehat{B}L$; b) $L\widehat{H}B$ e $L\widehat{O}B$; c) $B\widehat{A}C$ e $L\widehat{H}B$; d) $B\widehat{A}C$ e $K\widehat{H}C$.

[**R.** a) Si suggerisce di riflettere sul quadrilatero LOHB; b) sono complementari di due angoli uguali; c) sono uguali ad un terzo angolo; c) occorre ripetere il ragionamento a partire dal quadrilatero KOHC]

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

DOMANDE.

1. Si consideri il triangolo ottusangolo ABC rappresentato nella figura sottostante (Fig. 10). Tracciate le sue due altezze AD e BE, dimostrare che l'asse del segmento DE passa per il punto medio di AB.

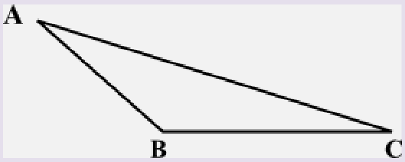

FIG. 10

2. È vero o falso che il lato di un quadrato e il diametro del cerchio circoscritto sono grandezze commensurabili?

3. È vero o falso che il lato di un quadrato e il raggio del cerchio inscritto sono grandezze commensurabili?

4. Il lato dell'esagono regolare e quello del triangolo equilatero circoscritti ad uno stesso cerchio sono grandezze commensurabili o incommensurabili? Fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

5. Sono dati quattro segmenti, le cui misure, espresse nella stessa unità di misura, sono quattro numeri naturali consecutivi. È possibile che i quattro segmenti siano i lati di un quadrilatero circoscrivibile ad un cerchio?

6. Di un trapezio circoscritto ad un cerchio di raggio noto r si conosce l'area A. I dati bastano per calcolare il perimetro del trapezio o sono insufficienti?

7. Un trapezio, avente il perimetro di 32 cm, è inscritto in un cerchio il cui raggio è 8 cm. I dati bastano per calcolare l'area del trapezio o sono insufficienti?

RISPOSTE.

1. Nel triangolo ABC, ottusangolo in B, siano le altezze AD e BE (Fig. 11). È evidente che i due triangoli ABD e ABE sono rettangoli ed hanno in comune l'ipotenusa AB. Se ne desume che il quadrilatero ADBE è inscrivibile in una circonferenza k. L'asse della corda DE di questa circonferenza è un diametro di k e perciò passa per il centro di essa, che è esattamente il punto medio del segmento AB. Nel caso particolare in cui i segmenti DB e BE fossero uguali, l'asse della corda DE sarebbe proprio l'ipotenusa AB.

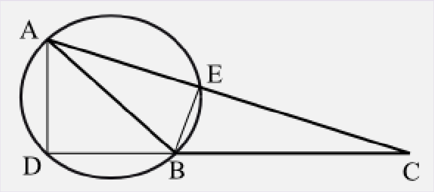

FIG. 11

2. È falso. Infatti il loro rapporto non è un numero razionale.
3. È vero. Infatti il rapporto fra il lato e il raggio è il numero razionale 2.
4. Indicato con r il raggio del cerchio, si trova che il lato dell'esagono regolare ad esso circoscritto è:
$$\mathrm{L}_6=\frac{4\mathrm{r}}{\sqrt{3}}$$
mentre il lato del triangolo equilatero circoscritto è:
$$\mathrm{L}_3=2\mathrm{r}\sqrt{3}.$$
Si ha pertanto: $\frac{\mathrm{L}_3}{\mathrm{L}_6}=\frac{3}{2}$. Le due grandezze sono commensurabili.
5. Sì. A condizione che due lati opposti siano i segmenti aventi le lunghezze estreme (la più grande e la più piccola) e gli altri due lati i segmenti rimanenti.
6. I dati sono sufficienti per calcolare l'area del trapezio. Anzi che si tratti di un trapezio è del tutto irrilevante poiché il ragionamento vale anche se si tratta di un quadrilatero qualsiasi, purché circoscritto al cerchio. Congiungendo, infatti, il centro del cerchio con i vertici del quadrilatero, questo è suddiviso in 4 triangoli aventi la stessa altezza (uguale al raggio r del cerchio) e come basi i lati l_1, l_2, l_3, l_4 del quadrilatero medesimo. Perciò si ha:
$$A=\frac{1}{2}l_1r+\frac{1}{2}l_2r+\frac{1}{2}l_3r+\frac{1}{2}l_4r=\frac{1}{2}Pr,$$
essendo P il perimetro del quadrilatero. Da qui segue:
$$P=\frac{2A}{r}.$$
7. Questa volta i dati sono insufficienti per risolvere la questione.