Prerequisiti:
- Avere consapevolezza delle relazioni fra i lati di un triangolo.
- Avere consapevolezza delle relazioni fra gli angoli di un triangolo.
- Conoscere e applicare il teorema di Pitagora.
- Saper definire il coefficiente angolare di una retta.

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:

- *definire le funzioni seno, coseno e tangente di un angolo*
- *costruire graficamente un angolo di cui si conosce il seno o il coseno o la tangente*
- *calcolare due delle funzioni seno, coseno e tangente di un angolo, nota la terza*
- *calcolare, eventualmente mediante uno strumento di calcolo automatico: a) seno, coseno e tangente di un angolo, noto l'angolo; b) un angolo di cui si conosce il seno o il coseno o la tangente*
- *enunciare e dimostrare le principali formule goniometriche*
- *chiarire il concetto di pendenza di una retta e calcolare la tangente dell'angolo di due rette*
- *risolvere semplici problemi di goniometria*

Per i Licei non scientifici lo studio di questa unità è previsto nel 2° biennio; per tutte le altre scuole nel 1° biennio.
L'argomento sarà comunque ripreso nel 2° biennio per tutte le scuole al fine di un consolidamento ed approfondimento.

Nozioni di goniometria

Unità 36

36.1 SENO E COSENO DI UN ANGOLO.

36.1.1 Considerato un angolo $a\hat{O}b$ di ampiezza α tale che $0° \leq \alpha \leq 90°$, proiettiamo ortogonalmente i punti $B_1, B_2, \ldots$ del lato Ob sul lato Oa, ottenendo rispettivamente i punti $A_1, A_2, \ldots$ (Fig. 1).
Qualunque sia la situazione – (a) oppure (b) oppure (c) – è evidente che si ha:

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OB_2}} = \ldots = k_1, \quad \frac{\overline{OA_1}}{\overline{OB_1}} = \frac{\overline{OA_2}}{\overline{OB_2}} = \ldots = k_2,$$

dove k_1 e k_2 sono due numeri reali, compresi chiaramente fra 0 ed 1 inclusi, che non dipendono dal punto B_i scelto su Ob ma solo dall'ampiezza α dell'angolo $a\hat{O}b$ considerato.
Questi due numeri k_1 e k_2 sono insomma due funzioni di α: si chiamano rispettivamente **seno** e **coseno** dell'angolo α. Si scrive:

$$\mathbf{sin(\alpha) = k_1}, \quad \mathbf{cos(\alpha) = k_2}.$$

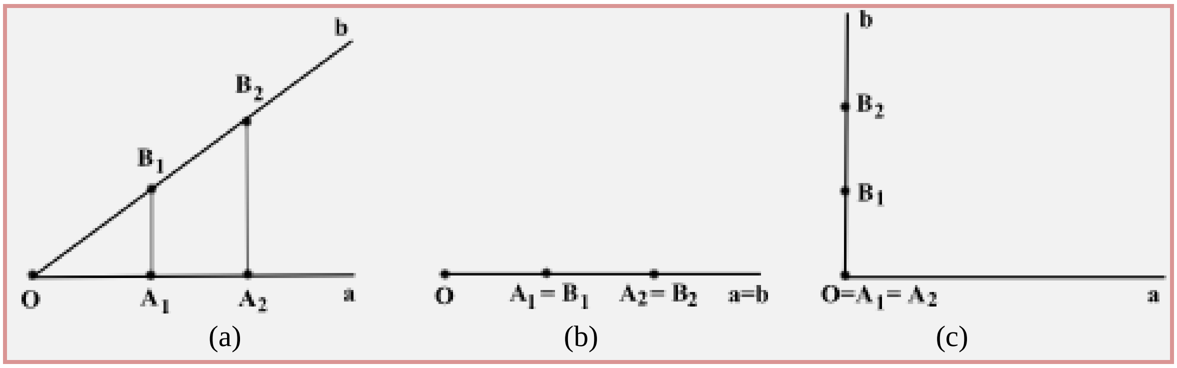

FIG. 1

A volte, al posto di $\mathbf{sin(\alpha)}$ si scrive $\mathbf{sen(\alpha)}$ e anche più spesso, se non si creano equivoci, $\mathbf{sin\,\alpha}$ o $\mathbf{sen\,\alpha}$ e al posto di $\mathbf{cos(\alpha)}$ si scrive $\mathbf{cos\,\alpha}$.
In particolare si ha evidentemente:

$$\mathbf{sin\,0° = 0}, \quad \mathbf{sin\,90° = 1}, \quad \mathbf{cos\,0° = 1}, \quad \mathbf{cos\,90° = 0}.$$

Un paio di esercizi per te.

1. Considera il numero k tale che:
   (a) $k=3/2$; (b) $k=2/3$; (c) $k=1/2$; (d) $k=4/3$.
   Se esiste un angolo, compreso fra 0° e 90°, il cui seno sia uguale a k, costruiscilo graficamente.
2. Considera il numero k tale che:
   (a) $k=3/2$; (b) $k=2/3$; (c) $k=1/2$; (d) $k=4/3$.
   Se esiste un angolo, compreso fra 0° e 90°, il cui coseno sia uguale a k, costruiscilo graficamente.

36.1.2 Ci proponiamo adesso di determinare il seno ed il coseno di alcuni angoli particolari. Per la precisione quelli di $\mathbf{30°, 45°, 60°}$.
Considerato l'angolo $a\hat{O}b$, ampio 30° (Fig. 2), prendiamo sul lato Ob un qualunque punto B – distinto da O – e proiettiamolo ortogonalmente su Oa. Risulta chiaramente che:

$$\sin 30° = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}, \quad \cos 30° = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}.$$

D'altronde: $\overline{AB}=\frac{1}{2}\overline{OB}$ e $\overline{OA}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{OB}$. Pertanto:

$$\mathbf{\sin 30° = \frac{1}{2}}\,, \quad \mathbf{\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}}\,.$$

Con ragionamenti pressoché identici al precedente, e che lasciamo sviluppare a te per esercizio, si trova che:

$$\mathbf{\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}}\,, \quad \mathbf{\cos 60° = \frac{1}{2}}\,; \qquad \mathbf{\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}}\,, \quad \mathbf{\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}}\,.$$

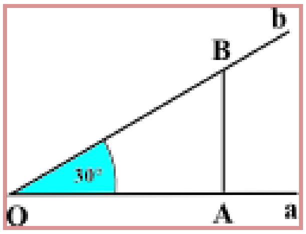

FIG. 2

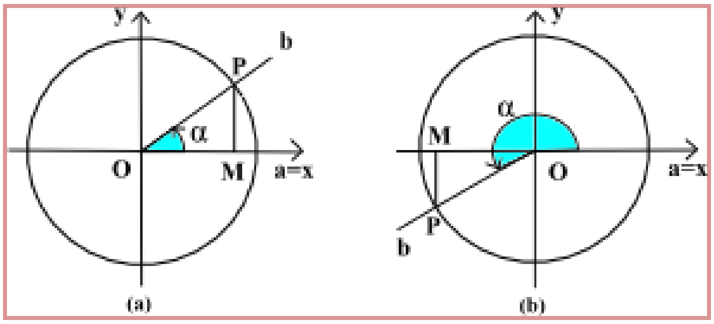

FIG. 3

36.1.3 La definizione di seno e di coseno dell'angolo α, data prima, vale solo se 0°≤α≤90°, ma può essere opportunamente modificata in modo da reggere per un angolo qualsiasi.

Sia allora un angolo orientato (a,b) di origine O e di ampiezza α qualunque. Riferiamo il suo piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) in modo che la semiretta Oa coincida con la semiretta positiva Ox ed in questo piano tracciamo la circonferenza di centro O e raggio 1, nota come ***circonferenza goniometrica*** (a volte si parla di ***cerchio trigonometrico***). Essa interseca in P il secondo lato Ob dell'angolo (a,b) (Fig. 3). Ebbene, si pone per definizione: [1]

$$\mathbf{\sin\alpha = y_P}\,, \quad \mathbf{\cos\alpha = x_P}\,.$$

Ed è appena il caso di notare che, quando 0°≤α≤90°, questa definizione s'identifica con la precedente.

Osserviamo poi che, essendo α la misura di uno degli infiniti angoli orientati (a,b), ognuno di tali angoli ha una misura del tipo:

$$\alpha + k\,360°, \quad \text{dove } k\in\mathbb{Z}.$$

D'altra parte il punto P, in cui il secondo lato Ob di ognuno di tali angoli (a,b) interseca la circonferenza goniometrica, è sempre lo stesso. Per cui:

---

1 Il termine "seno" deriva dalla matematica indiana, anche se pare che esso sia nato da un equivoco. In effetti, i matematici indiani avevano dato il nome di *jiva* a metà della corda (il nostro "seno"), e gli Arabi avevano ereditato questo termine trasformandolo in *jiba*. Nella lingua araba v'è anche la parola *jaib*, che significa "baia" o "insenatura". Sembra che quando Roberto di Chester (1145), uno dei traduttori dell'Algebra di al-Khuwarizmi, si trovò a dover tradurre il termine tecnico *jiba* lo abbia confuso con la parola *jaib* (per il fatto che le vocali nelle lingue semitiche non si scrivono); pertanto ricorse alla parola latina *sinus*, che significa appunto "baia" o "insenatura". [Così sostiene C. B. Boyer nella sua *Storia della matematica*]
Secondo un'altra versione la parola corda è tradotta in latino da *inscripta* (linea inscritta) e la metà della corda da *semi inscripta*, abbreviata poi in *s.ins.* e da qui il termine *sinus*. [Cfr.: Jean-Pierre Alem, *Nuovi giochi d'ingegno e divertimenti matematici*, RBA Italia, 2008, pag. 23]

[1] $$\sin(\alpha + k\,360°) = \sin\alpha\,, \quad \cos(\alpha + k\,360°) = \cos\alpha\,.$$

36.1.4 Osserviamo adesso che mentre il punto P descrive la circonferenza goniometrica, la sua ordinata y_P e la sua ascissa x_P assumono valori compresi fra -1 e $+1$, estremi inclusi. Di modo che, qualunque sia l'ampiezza α, risulta:

[2] $$-1 \le \sin\alpha \le 1\,, \quad -1 \le \cos\alpha \le 1\,.$$

In particolare si trovano agevolmente i valori riassunti nella seguente tabella (Tab. 1):

α	0°	90°	180°	270°	360°
sin α	0	1	0	−1	0
cos α	1	0	−1	0	1

TAB. 1

Da questa tabella, ma anche dai valori di seno e coseno di 30°, 45°, 60°, si desume che si ha:

$$(\sin\alpha)^2+(\cos\alpha)^2=1.$$

o anche, scrivendo per comodità $\sin^2\alpha$ e $\cos^2\alpha$ al posto di $(\sin\alpha)^2$ e $(\cos\alpha)^2$ rispettivamente:

[3] $$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1\,.$$

In verità, la relazione [3] – conosciuta come **relazione pitagorica** – vale per ogni ampiezza α.
La dimostrazione di questo fatto è immediata. Basta osservare (Fig. 3) che, in virtù del teorema di Pitagora, si ha: $\overline{MP}^2+\overline{OM}^2=\overline{OP}^2$, da cui, tenendo presente che i segmenti orientati (M,P) e (O,M) hanno misure rispettivamente sin α e cos α e che $\overline{OP}=1$, segue appunto la relazione suddetta.
Questo, chiaramente, significa che di un angolo non possono essere fissati arbitrariamente il seno e il coseno, ma può essere fissato uno solo di tali valori, sempre con le limitazioni [2].

Così, per esempio, è assurdo affermare che, di un angolo α, risulta $\cos\alpha=\frac{1}{3}$ e $\sin\alpha=\frac{2}{3}$, dal momento che si avrebbe $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\neq1$. Mentre, se α è un angolo compreso tra 90° e 180°, tale che $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, si ha: $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$ e perciò: $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$.

Qualche esercizio per te.

1. Stabilisci se esiste un angolo acuto β tale che:

$$\text{(a)}\ \ \sin\beta=\frac{2}{3}\,,\quad \cos\beta=\frac{5}{6}\,; \qquad \text{(b)}\ \ \sin\beta=\frac{5}{13}\,,\quad \cos\beta=\frac{12}{13}\,.$$

2. Di un angolo acuto calcola:

(a) il coseno sapendo che il seno è 3/5; (b) il seno sapendo che il coseno è 1/3;
(c) il seno sapendo che il coseno è 0,234; (d) il coseno sapendo che il seno è 0,5.

36.1.5 Con considerazioni di geometria elementare abbiamo determinato il seno ed il coseno di alcuni particolari angoli compresi fra 0° e 90°, precisamente quelli di 30°, 45° e 60°.
Utilizzando la circonferenza goniometrica in maniera conveniente, si possono trovare il seno e il coseno di altri angoli, opportunamente associati ai precedenti, come, tanto per fare degli esempi, l'angolo di 120°, supplementare di 60°, o l'angolo di 210°, ottenuto da quello 30° sommandogli 180°. Il procedimento da seguire è molto simile a quello che andiamo ad esporre, relativo ai cosiddetti "angoli supplementari" ed "angoli complementari".

- **Angoli supplementari**.

  Sono tali due angoli, α e 180°–α, le cui ampiezze hanno somma 180°. Si ha:

  $$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha, \qquad \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha\,.$$

  Per la dimostrazione si considerano i due angoli AÔP=α ed AÔP'=180°–α (Fig. 4) e, dopo aver provato che i due triangoli OMP ed OM'P' sono congruenti, si conclude che $y_{P'}=y_P$ e $x_{P'}=-x_P$; da qui seguono le due relazioni suddette.

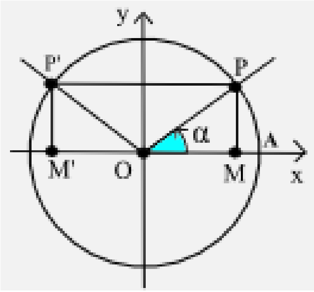

FIG. 4

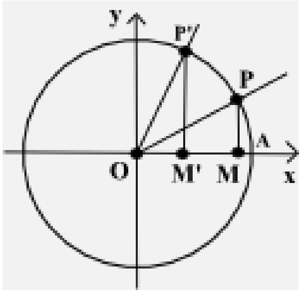

FIG. 5

- **Angoli complementari**.

  Sono tali due angoli, α e 90°–α, le cui ampiezze hanno somma 90°. Si ha: [2]

  $$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha, \qquad \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha\,.$$

  La dimostrazione si sviluppa come la precedente. Basta considerare gli angoli AÔP=α ed AÔP'= 90°–α (Fig. 6) e, dopo aver fatto vedere che i due triangoli OMP ed OM'P' sono congruenti, si conclude che $y_{P'}=x_P$ e $x_{P'}=y_P$; da qui seguono poi le relazioni suddette.

A titolo di esercizio, ti proponiamo di calcolare il seno e il coseno dei seguenti angoli (se occorre, puoi servirti della circonferenza goniometrica):

$$120°, 135°, 150°; \quad 210°, 225°, 240°; \quad 300°, 315°, 320°; \quad -30°, -45°, -60°.$$

36.1.6 Seguendo altri procedimenti, più complessi di quelli su accennati e sui quali però non ci possiamo soffermare, sarebbe possibile calcolare il seno e il coseno di ogni angolo e quindi costruire apposite "tavole" che permettono di risolvere, direttamente o attraverso quello che si chiama un processo d'interpolazione, i seguenti due problemi:

1) dato un angolo, trovarne il seno e il coseno;
2) dato il seno (o il coseno) di un angolo, determinare l'angolo.

In effetti, in questo modo, appunto con l'uso delle tavole, si procedeva fino ad alcuni anni fa, prima dell'invenzione del calcolo automatico. Ora tutto ciò è superato, giacché una semplice calcolatrice scientifica (la quale abbia naturalmente i tasti funzionali "seno" e "coseno") consente di risolvere, con estrema facilità e rapidità, entrambi i problemi suddetti. S'intende che la calcolatrice deve essere predisposta in modo da esprimere gli angoli in gradi e non in eventuali altre misure. Anche per questo vi sono dei tasti appositi.

- Occupiamoci del primo problema:

[2] Il termine "coseno" sta, in effetti, per "complementi sinus", cioè "seno del (l'angolo) complementare". Il termine compare per la prima volta (1620) in un'opera del matematico inglese **Edmund Gunter** (1581-1626), dal titolo *Canon triangulorum*. Bisogna precisare però che le abbreviazioni "sin" e "cos" furono introdotte dal matematico inglese William Oughtred (1574-1660) nella sua *Trigonometria* (1657).

Nota l'ampiezza di un angolo, calcolarne il seno e il coseno.

Si voglia allora calcolare, per esempio, $\sin 70°$.

Le cose vanno all'incirca in questo modo (vi sono delle differenze secondo il tipo di calcolatrice impiegata):

Imposta:	Premi:	La calcolatrice visualizza:
70	sin	0,93969

Pertanto: $\sin 70° \approx 0{,}93969$.

Si voglia calcolare $\cos 70°$. Come sopra:

Imposta:	Premi:	La calcolatrice visualizza:
70	cos	0,34202

Pertanto: $\cos 70° \approx 0{,}34202$.

Il procedimento si complica, ma solo un po', se la misura dell'angolo è espressa in gradi, primi e secondi. In effetti in questo caso è necessario ricondurre preliminarmente tutto in gradi.

Per esempio, volendo calcolare $\cos 53°42'27''$, dapprima si trasforma la misura dell'angolo in gradi, in questo modo:

$$53°42'27''=\left(53+\frac{42}{60}+\frac{27}{60^2}\right)^{\mathrm{o}}=53°{,}7075,$$

quindi si procede come sopra. Si trova: $\cos 53°42'27'' \approx 0{,}59191$.

- Occupiamoci adesso del secondo problema:

Noto il seno o il coseno di un angolo, determinarne la misura.

Per risolvere questa questione si rende necessaria, in via preliminare, qualche considerazione supplementare. Il fatto è che, mentre ogni angolo ha un solo seno e un solo coseno, l'inverso non è vero. Infatti, ad esempio, di angoli di ampiezza α tale che $\sin\alpha=\frac{1}{2}$, non c'è solo l'angolo di $30°$ ma, cosa che si può facilmente constatare anche graficamente, c'è pure quello di $120°$. E poi ci sono gli angoli che da questi differiscono per multipli di $360°$. Orbene, la calcolatrice ci fornisce uno solo di questi angoli; precisamente quello di $30°$. Gli altri li ricava il risolutore ragionando sulla base di quanto specificato sopra.

Ciò detto, si voglia calcolare l'angolo β il cui seno è $3/5$, ossia $\sin\beta=3/5=0{,}6$. Le cose non sono molto diverse da quelle descritte nella risoluzione dell'altro problema. Si tratta soltanto di cambiare un tasto funzionale:

Imposta:	Premi:	La calcolatrice visualizza:
0,6	INV sen	36,8699

Pertanto, una volta trasformato l'angolo $36°{,}8699$ in gradi, primi e secondi: $\beta \approx 36°52'12''$.

Analogamente per la determinazione di un angolo di cui si conosce il coseno. Per esempio, se quest'angolo è tale che $\cos\beta=\frac{3}{5}$, si trova: $\beta \approx 53°7'48''$.

Ti proponiamo di fare un po' di esercizio con una calcolatrice.

1. Calcola:

a) $\sin 48°13'27''$. b) $\sin 210°27'$. c) $\sin(-32°58')$.
d) $\cos 125°38'45''$. e) $\cos 330°50'$. f) $\cos(-58°27')$.

2. Determina un angolo α in gradi, primi e secondi sapendo che:
a) $\cos\alpha = 0{,}279$. b) $\cos\alpha = -0{,}5474$. c) $\cos\alpha = -0{,}71$.
d) $\sin\alpha = 0{,}4725$. e) $\sin\alpha = -0{,}54$. f) $\sin\alpha = -0{,}47$.

36.2 TANGENTE DI UN ANGOLO. PENDENZA DI UNA RETTA

36.2.1 Si definisce **tangente** di un angolo α il numero reale – indicato con $\mathbf{tan(\alpha)}$ o $\mathbf{tg\,(\alpha)}$ o ancora con $\mathbf{tang\,(\alpha)}$, oppure, cosa assai frequente quando non si creano equivoci, con $\mathbf{tan\,\alpha}$ e simili – tale che:

$$\mathbf{\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}.$$

Chiaramente $\tan\alpha$ esiste solo se $\cos\alpha \neq 0$ ossia se $\alpha \neq 90° + k\,180°$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.
In particolare, dopo semplici calcoli, si trova:

$$\mathbf{\tan 0° = 0,\quad \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3},\quad \tan 45° = 1,\quad \tan 60° = \sqrt{3}}.$$

Anche per la determinazione della tangente di un dato angolo e dell’angolo di data tangente ci si serve di una calcolatrice, la quale abbia ovviamente il tasto funzionale “tangente”. Le cose vanno esattamente come per il seno e il coseno.

36.2.2 Alcuni esercizi. Per la risoluzione di qualcuno di essi, ed in particolare degli esercizi n. 2 e n. 3, ricorda che se un angolo è espresso, nella forma “complessa”, in gradi primi e secondi, come ad esempio 19°27’42”, per poterlo far leggere da uno strumento di calcolo automatico è necessario metterlo sotto forma di numero decimale, nel modo già descritto, vale a dire:

$$19°27'42'' = \left(19 + \frac{27}{60} + \frac{42}{3600}\right)^{o} \approx 19°{,}461666.$$

D’altro canto, se l’uscita è un angolo espresso in forma decimale, c’è necessità di trasformarlo in forma “complessa”. L’operazione, eseguita comunque mediante lo strumento automatico, si sviluppa in questo modo, con riferimento allo stesso angolo considerato sopra:
- i gradi dell’angolo sono 19;
- ne consegue che i primi sono $19{,}461666-19=0{,}461666$; ossia riportati nel sistema sessagesimale: $0{,}461666\times 60=27{,}699999$; quindi i primi dell’angolo sono 27;
- i secondi, a loro volta, sono $27{,}699999-27=0{,}699999$; ossia, riportati nel sistema sessagesimale: $0{,}699999\times 60=41{,}999975$; quindi i primi, approssimando per eccesso, sono 42.

In definitiva: $19°{,}461666 \approx 19°27'42''$.

Ecco allora gli esercizi da risolvere:

1. Senza usare strumenti di calcolo automatico, calcola la tangente dei seguenti angoli:
$120°, 135°, 150°;\quad 210°, 225°, 250°;\quad 300°, 315°, 330°;\quad -30°, -45°, -60°.$

2. Con l’uso di una calcolatrice, calcola la tangente dei seguenti angoli:
$22°35'45''; \quad 127°35'; \quad 238°27'; \quad -32°43'35''.$

3. Con l’uso di una calcolatrice, determina in gradi, primi e secondi un angolo, compreso fra 0° e 180°, la cui tangente è:
$0{,}759; \quad 2{,}47; \quad -0{,}597; \quad -3{,}25.$

4. Senza servirti della calcolatrice determina il seno e il coseno di un angolo acuto sapendo che la sua tangente è:

$$1;\quad \frac{3}{4};\quad \frac{4}{3};\quad \frac{5}{12};\quad \frac{12}{5}.$$

5. Senza servirti della calcolatrice determina il seno e il coseno di un angolo ottuso sapendo che la sua tangente è:

$$-1;\quad -\frac{3}{4};\quad -\frac{4}{3};\quad -\frac{5}{12};\quad -\frac{12}{5}.$$

36.2.3 La funzione *tangente* è stata introdotta nel 1583 dal danese **Thomas Finck** (1561-1656) in un'opera tal titolo *Geometria rotundi*. La sua denominazione ha una spiegazione geometrica, connessa proprio alla retta tangente ad un cerchio. Vediamola.

Nel piano, riferito ad un sistema cartesiano ortogonale (Oxy), sia A il punto in cui la circonferenza goniometrica interseca il semiasse positivo delle x e sia t la retta tangente in A alla circonferenza (Fig. 6). Il secondo lato Ob dell'angolo orientato (a,b) di ampiezza α, intersechi la circonferenza e la retta t rispettivamente in P e in T. Come noto: $y_P = \sin\alpha$, $x_P = \cos\alpha$. D'altra parte, per l'evidente similitudine dei triangoli OAT e OMP, si ha:

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{MP}}{\overline{OM}}\text{, ossia } \frac{y_T}{1} = \frac{y_P}{x_P} \text{ e perciò } y_T = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\text{, ovvero } \tan\alpha = y_T.$$

Osserviamo poi che, essendo α la misura di uno degli infiniti angoli orientati (a,b), ogni altro angolo di ampiezza $\alpha + k\,180°$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, è tale che il suo secondo lato Ob interseca la tangente t alla circonferenza goniometrica sempre nel punto T. Ragion per cui:

$$\mathbf{\tan(\alpha + k\,180°) = \tan\alpha},\ \ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

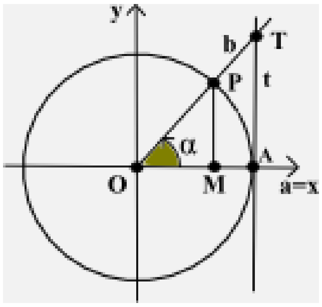

FIG. 6

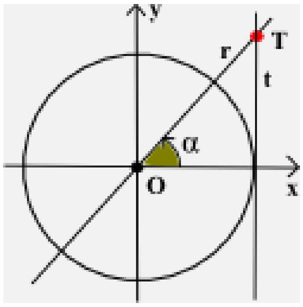

FIG. 7

36.2.4 L'introduzione della tangente di un angolo permette di chiarire il significato di **pendenza** (o **coefficiente angolare**) di una retta.

A questo riguardo, nel piano cartesiano ortogonale (Oxy), nel quale supponiamo disegnate la circonferenza goniometrica e la retta t tangente ad essa nel punto (1,0) (Fig. 7), consideriamo la retta r di equazione y=mx. Essa interseca t nel punto $T(1, \tan\alpha)$, dove α è l'angolo di cui deve ruotare in senso antiorario l'asse x, intorno al punto in cui lo seca la retta r (nella fattispecie intorno ad O), per sovrapporsi alla stessa retta r. Questo angolo α – lo ricordiamo – è chiamato *angolo della retta* r *con l'asse* x.

D'altra parte è evidente che $y_T = m \cdot 1 = m$. Pertanto:

$$\mathbf{m = \tan\alpha}\,.$$

Vale a dire:

♦ **La pendenza di una retta è la tangente dell'angolo che essa forma con l'asse x.**

Per esempio, volendo l'equazione della retta passante per il punto $A(2,1)$ e formante un angolo di $45°$ con l'asse x, si ha: $y-y_A=m(x-x_A)$. Siccome: $x_A=1$, $y_A=2$, $m=\tan 45°=1$, l'equazione diventa: $y-2=1\cdot(x-1)$, ossia: $y=x+1$.

36.2.5 Ti proponiamo un esercizio su quest'ultimo argomento.

Riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), trova l'equazione della retta passante per il punto P e formante l'angolo α con l'asse x, sapendo che:

1. $P(1,0),\ \ \alpha=30°$. 2. $P(-1,-1),\ \ \alpha=45°$. 3. $P(2,3),\ \ \tan\alpha=\frac{2}{3}$. 4. $P(-2,1),\ \ \tan\alpha=\frac{1}{2}$.
5. $P(1,-2),\ \ \cos\alpha=\frac{3}{4}$. 6. $P(0,-2),\ \ \cos\alpha=-\frac{1}{2}$. 7. $P(-1,3),\ \ \sin\alpha=\frac{3}{5}$ con $90°<\alpha<180°$.

$\left[\textbf{R.}\ \ 1)\ y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{\sqrt{3}}{3}\ ;\ldots;\ 5)\ y=\frac{\sqrt{7}}{3}x-\left(2+\frac{\sqrt{7}}{3}\right)\ ;\ldots;\ 7)\ y=-\frac{3}{4}x+\frac{9}{4}\right]$

36.3 FUNZIONI CIRCOLARI

36.3.1 La funzione, che ad ogni valore x (espresso in gradi sessagesimali) associa $\sin x$, si chiama **funzione seno** di x.

Abbiamo visto che, $\forall k\in\mathbb{Z}$, $\sin(x+k\,360°)=\sin x$ e $360°$ è il più piccolo valore per cui ciò avviene. Questo fatto si esprime dicendo che:

La funzione seno è una funzione periodica con periodo 360°.

Questo implica che, ai fini della rappresentazione del grafico di tale funzione, chiamato **sinusoide**, è sufficiente disegnarlo in un periodo (per esempio fra $0°$ e $360°$) per sapere come si sviluppa su tutto l'asse x: basta infatti operare traslazioni di uno o più periodi nella direzione dell'asse x medesimo.

Ora noi sappiamo già che la funzione $y=\sin x$:

- assume il valore $y=0$ nei punti $x=0°$, $x=180°$, $x=360°$, il valore $y=1$, che è il suo *massimo*, nel punto $x=90°$ ed il valore $y=-1$, che è il suo *minimo*, in $x=270°$;
- cresce da 0 al valore massimo 1 mentre x cresce da $0°$ a $90°$, decresce da 1 a 0 mentre x cresce da $90°$ a $180°$, continua a decrescere da 1 al valore minimo -1 mentre x cresce da $180°$ a $270°$ e torna a crescere da -1 a 0 mentre x cresce da $270°$ a $360°$;
- assume alcuni valori particolari come $y=\frac{1}{2}$ in $x=30°$ ed $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ in $x=60°$.

Si potrebbero trovare altri punti della sinusoide ed in base ad essi disegnarla. Oppure servirsi di uno strumento di calcolo automatico.

Vogliamo però descrivere un procedimento grafico per ottenere lo scopo.

Dopo aver riferito il piano ad un sistema (non monometrico) di assi cartesiani ortogonali (Oxy), si traccia la circonferenza avente il raggio uguale all'unità di misura scelta sull'asse y ed il centro in un punto C dell'asse x, scelto convenientemente (Fig. 8). Si prende quindi sul semiasse positivo delle x un punto arbitrario A, al quale si attribuisce l'ascissa 360. Dopo di che si suddividono il segmento OA e la circonferenza in un numero conveniente di parti uguali, ad esempio 16. Si chiamano G il punto di divisione sul segmento e Q il punto di divisione sulla circonferenza, corrispondenti alla stessa suddivisione: la parallela all'asse y condotta per G e la parallela all'asse x condotta per Q si intersecano nel punto P della sinusoide. La linea che unisce tali punti è dunque la sinusoide ed ovviamente essa è tanto più vicina alla configurazione effettiva quanto maggiore è il numero dei punti di divisione.

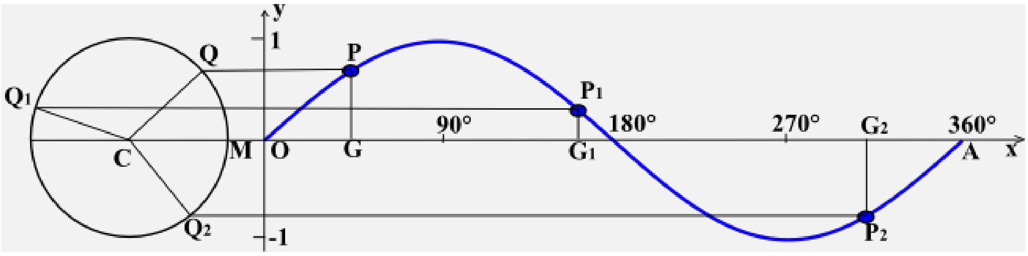

FIG. 8

36.3.2 Come per il seno, la funzione, che ad ogni valore x (espresso in gradi sessagesimali) associa $\cos x$, si chiama **funzione coseno** di x.

Di nuovo, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\cos(x+k\,360°)=\cos x$ e $360°$ è il più piccolo valore per cui ciò avviene. Pertanto anche:

La funzione coseno è una funzione periodica con periodo $360°$.

Ai fini del tracciamento del suo grafico – detto **cosinusoide** – si potrebbe seguire una via analoga a quella su esposta riguardo alla sinusoide. Ma vogliamo descrivere un procedimento diverso.

Si dimostra in via preliminare che risulta: $\cos x = \sin(x+90°)$. Di ciò lasciamo a te il facile compito, segnalandoti che puoi utilizzare la circonferenza goniometrica.

In conseguenza di questo fatto, le curve di equazione $y=\sin(x+90°)$ e $y=\cos x$ si identificano. D'altronde la curva $y=\sin(x+90°)$ si ottiene da $y=\sin x$ con la traslazione di componenti $(-90°, 0)$. Pertanto (Fig. 9):

La cosinusoide non è altro che una sinusoide traslata del vettore di componenti $(-90°, 0)$.

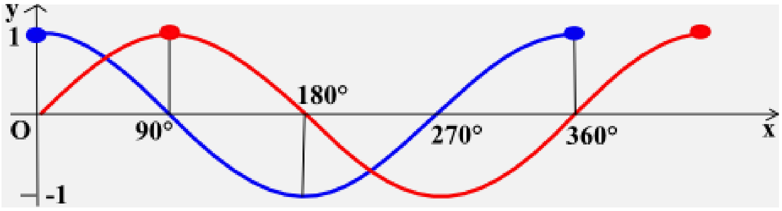

FIG. 9

36.3.3 La funzione, che ad ogni valore x (espresso in gradi sessagesimali) purché $\cos x \neq 0$, associa $\tan x$, si chiama **funzione tangente** di x.

Sappiamo che $\tan(x+k\,180°)=\tan x$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, e $180°$ è il più piccolo valore per cui ciò avviene. Pertanto:

La funzione tangente è una funzione periodica con periodo $180°$.

Cosicché, ai fini del disegno del grafico di tale funzione, chiamato **tangentoide**, è sufficiente rappresentarlo in un periodo, per esempio fra 0° e 180°, per sapere come si sviluppa su tutto l'asse x.

Ora, pensando al significato geometrico di $\tan x$, si sa che la funzione $y=\tan x$:

- assume il valore $y=0$ sia per $x=0°$ sia per $x=180°$;
- cresce da 0 a valori sempre più grandi in assoluto e positivi mentre x cresce da 0° a 90°, ma in $x=90°$ non esiste;
- appena superato $x=90°$ diventa negativa con valori in assoluto "molto grandi" ma continua a crescere da questi valori, negativi e grandi in assoluto, al valore 0 mentre x cresce da 90° a 180°.

Il fatto che all'infinito la curva si accosti alla retta $x=90°$ si esprime dicendo che tale retta è un *asinto-*

to per la curva.

La tangentoide assume poi valori particolari come y=1 in x=45° e $y=\sqrt{3}$ in x=60°.

Si potrebbero trovare altri punti della curva e disegnarne quindi l'andamento.

Vogliamo però descrivere un procedimento grafico simile a quello delineato per la sinusoide.

Dopo aver riferito il piano ad un sistema (non monometrico) di assi cartesiani ortogonali (Oxy), si traccia la semicirconferenza avente il raggio uguale all'unità di misura scelta sull'asse y ed il centro in un punto C dell'asse x, scelto convenientemente, e situata nel semipiano y≥0 (Fig. 10). Si prende quindi sul semiasse positivo delle x un punto arbitrario A, al quale si attribuisce l'ascissa 180. Dopo di che si suddividono il segmento OA e la circonferenza in un numero conveniente di parti uguali. Si chiami G il punto di divisione sul segmento e Q il punto di divisione sulla circonferenza, corrispondenti alla stessa suddivisione. Si dica inoltre R il punto in cui la retta OQ interseca l'asse y. La parallela all'asse y condotta per G e la parallela all'asse x condotta per R si intersecano nel punto P della tangentoide. La linea che unisce tali punti è dunque la tangentoide ed ovviamente essa è tanto più vicina alla configurazione reale quanto maggiore è il numero dei punti di divisione.

In figura il disegno è prolungato anche agli x compresi fra 180° e 360°.

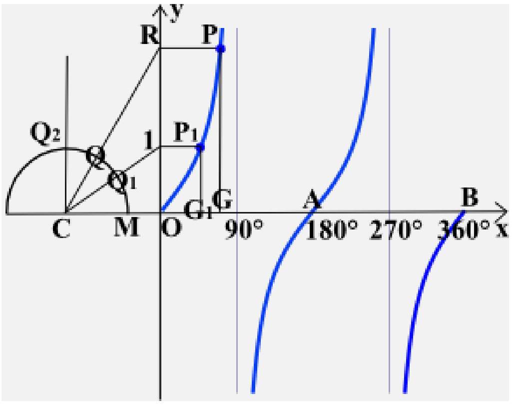

FIG. 10

36.3.4 Le funzioni ***seno***, ***coseno*** e ***tangente*** sono accomunate sotto la denominazione di **funzioni circolari** (o anche **funzioni goniometriche** o **funzioni trigonometriche**).

Assieme ad esse, ma oggigiorno piuttosto raramente e soprattutto in discipline come l'astronomia e la topografia, sono usate altre tre funzioni, che qui ricordiamo per semplice curiosità. Si tratta delle funzioni *secante*, *cosecante* e *cotangente*, reciproche rispettivamente di coseno, seno e tangente. Vale a dire, per valori dell'angolo α che non fanno perdere di significato alle funzioni medesime:

$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}\,,\quad \operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}\,,\quad \operatorname{cotan}\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}\,.$$

Sempre a titolo di curiosità, vogliamo riassumere in un'unica rappresentazione grafica le sei funzioni circolari introdotte fin qui, anche se di tre di esse, e precisamente seno, coseno e tangente, conosciamo già tale rappresentazione. A questo riguardo disegniamo la circonferenza goniometrica k di centro O (Fig. 11) e il generico angolo orientato $A\widehat{O}P$ di ampiezza α. Tracciamo quindi le rette tangenti a k in A, B e P. Indichiamo con M ed N i punti in cui la tangente in P interseca rispettivamente l'asse x e l'asse y e con T ed S i punti in cui la semiretta OP interseca rispettivamente la tangente in A e quella in B; chiamiamo infine Q la proiezione ortogonale di P sull'asse x. Ebbene, le misure dei segmenti orientati:

$$(Q,P),\ \ (O,Q),\ \ (A,T),\ \ (O,M),\ \ (O,N),\ \ (B,S)$$

sono nell'ordine i valori delle funzioni circolari:

$$\sin\alpha,\ \ \cos\alpha,\ \ \tan\alpha,\ \ \sec a,\ \ \text{cosec}\,\alpha,\ \ \text{cotan}\,\alpha.$$

Questo si può spiegare abbastanza facilmente e ne lasciamo il compito a chi avesse voglia di farlo.

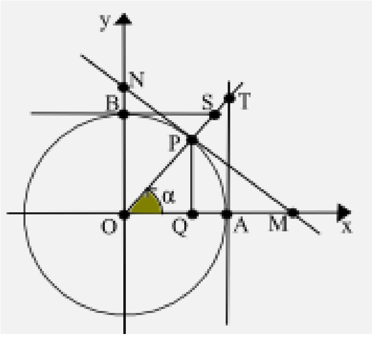

FIG. 11

36.4 ALCUNE FORMULE FONDAMENTALI. ANGOLO DI DUE RETTE

36.4.1 Nel piano, riferito ad un sistema cartesiano ortogonale (Oxy), supponiamo disegnata la circonferenza goniometrica (Fig. 12) e prendiamo gli angoli AÔP e AÔQ, ampi rispettivamente α e β e l'angolo AÔB ampio α–β. Le corde AB e PQ della circonferenza, corrispondenti agli angoli al centro congruenti AÔB e PÔQ, hanno uguale lunghezza; di conseguenza: $\overline{AB}^2=\overline{PQ}^2$.

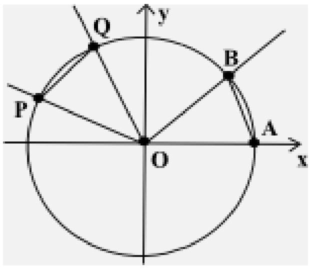

FIG. 12

Siccome:

$$A(1,0),\ \ B(\cos(\alpha-\beta),\sin(\alpha-\beta)),\ \ P(\cos\alpha,\sin\alpha),\ \ Q(\cos\beta,\sin\beta),$$

ricordando la formula della distanza di due punti, risulta:

$\overline{AB}^2=[\cos(\alpha-\beta)-1]^2+\left[\sin(\alpha-\beta)^2\right]=\cos^2(\alpha-\beta)+1-2\cos(\alpha-\beta)+\sin^2(\alpha-\beta)=2-2\cos(\alpha-\beta)\,;$

$\overline{PQ}^2=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=$

$=\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta+\sin^2\alpha+\sin^2\beta-2\sin\alpha\sin\beta=2-2\cos\alpha\cos\beta-2\sin\alpha\sin\beta\,.$

Pertanto:

$$2-2\cos(\alpha-\beta)=2-2\cos\alpha\cos\beta-2\sin\alpha\sin\beta\,.$$

Da qui segue:

$$\boldsymbol{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}\,.$$

Da questa formula fondamentale, ricavata con considerazioni geometriche, ne derivano molte altre, più o meno importanti, secondo l'ambito di utilizzazione: si ottengono con considerazioni di tipo analitico.

36.4.2 La prima formula che deduciamo dalla precedente è questa:

$$\mathbf{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}.$$

Infatti, utilizzando anche formule già viste in precedenza:

$$\sin(\alpha-\beta)=\cos[90°-(\alpha-\beta)]=\cos[(90°+\beta)-\alpha]=\cos(90°+\beta)\cos\alpha+\sin(90°+\beta)\sin\alpha=$$
$$=-\sin\beta\cos\alpha+\cos\beta\sin\alpha=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

A titolo di esempio, ricordando i valori del seno e coseno degli angoli di 30° e 45°, calcoliamo, come applicazione delle precedenti due formule, il seno e il coseno di 15°:

$$\sin 15°=\sin(45°-30°)=\sin 45°\cos 30°-\cos 45°\sin 30°=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4};$$
$$\cos 15°=\cos(45°-30°)=\cos 45°\cos 30°+\sin 45°\sin 30°=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Dalle due formule precedenti, che qui riassumiamo:

[4] $\mathbf{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}$, $\mathbf{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}$.

si ricavano poi queste altre due:

[5] $\mathbf{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$, $\mathbf{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$.

Basta porre, nelle [4], $-\beta$ al posto di β e semplificare.

Le [4] e le [5] sono conosciute rispettivamente come **formule di sottrazione** e **formule di addizione** del coseno e del seno. Sono dette pure **formule di Tolomeo** [3]**,** benché Tolomeo si fosse servito di una formula squisitamente geometrica ma equivalente nella sostanza alla formula di sottrazione del seno, che è la seconda delle [4].

Ti proponiamo alcuni esercizi:

a) dimostra che $\cos(\alpha-37°)\leq\sin\alpha+\cos\alpha$, dove α è un angolo qualsiasi;
b) dimostra che $\sin(\alpha+\beta)\leq\sin\alpha+\sin\beta$, dove α, β sono due angoli qualsiasi compresi fra 0° e 90°;
c) calcola seno, coseno e tangente di 75°.

36.4.3 Dalle [5] seguono immediatamente (basta porre $\beta=\alpha$) le cosiddette **formule di duplicazione** del coseno e del seno:

[6] $\mathbf{\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$, $\mathbf{\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha}$.

La prima di esse, ricordando la relazione pitagorica, può anche essere scritta in questi altri due modi equivalenti:

$$\mathbf{\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1,\quad \cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha}.$$

E da queste, ponendo per comodità $\frac{x}{2}$ al posto di α, si ottengono subito le cosiddette **formule di bisezione**:

$$\mathbf{\cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}},\quad \sin\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}};$$

il doppio segno si spiega col fatto che la conoscenza di $\cos x$ non determina x e quindi non determina $\frac{x}{2}$

[3] **Tolomeo** di Alessandria, matematico e astronomo, vissuto nel II sec. d.C.

e, di conseguenza, non determina i segni di $\cos\frac{x}{2}$ e $\sin\frac{x}{2}$. Chiaramente, se si sa in quale quadrante cade $\frac{x}{2}$, l'indeterminazione sparisce.

Per esempio, se $x=30°$, allora, ricordando che $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, si ha:

$$\cos 15° = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\,, \qquad \sin 15° = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\,;$$

ritrovando così per altra via valori già calcolati.

36.4.4 Dalle [4] e [5] si ottengono rispettivamente queste altre formule relative alla tangente:

[7] $$\mathbf{\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}}\;; \qquad \mathbf{\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}}\,.$$

Infatti:

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}\;;$$

da qui, dopo aver diviso numeratore e denominatore per $\cos\alpha\cos\beta$ e dopo aver semplificato, segue la prima delle [7]. La dimostrazione della seconda è analoga.

♦ La prima delle [7] è fondamentale per la determinazione dell'angolo di due rette assegnate in un piano cartesiano ortogonale (Oxy).
Precisamente, considerate le due rette non parallele e non perpendicolari:

$$a \equiv y = m_a x + n_a, \quad b \equiv y = m_b x + n_b$$

e indicato con (a,b) l'angolo orientato di cui deve ruotare a (in senso antiorario) intorno al punto in cui seca b per sovrapporsi alla retta b medesima (che è per l'appunto l'***angolo delle due rette*** a, b), risulta:

$$\mathbf{\tan(a,b) = \frac{m_b - m_a}{1+m_b m_a}}\,.$$

Per la dimostrazione incominciamo a chiamare P il punto in cui le due rette a, b si secano, A e B nell'ordine i punti in cui a, b intersecano l'asse x ed α, β gli angoli che le due rette a, b rispettivamente formano con l'asse x (Fig. 13).

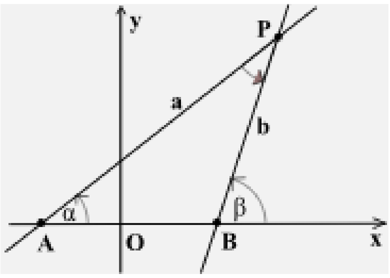

Fig. 13

Per il teorema dell'angolo esterno, relativo al triangolo PAB, risulta: $\beta=\alpha+(a,b)$, ovvero: $(a,b)=\beta-\alpha$. Perciò: $\tan(a,b) = \tan(\beta-\alpha)$ e per la [11]:

$$\tan(a,b) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}\,.$$

In conclusione, ricordando che $\tan\alpha = m_a$ e $\tan\beta = m_b$, si ottiene la formula suddetta.

Per esempio, posto che sia:

$$a\equiv y=3x-2,\quad b\equiv y=5x-3,$$

risulta:

$$\tan(a,b)=\frac{m_b-m_a}{1+m_b m_a}=\frac{5-3}{1+5\cdot 3}=\frac{1}{8}$$

e di conseguenza: $(a,b)\approx 7°7'30''$.

36.4.5 Riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), risolvi per esercizio le seguenti questioni:

a) Determina le ampiezze degli angoli individuati dalle due rette:

$$y=2x+1\,,\quad y=-3x+1\,.$$

[**R**. 45°, 135°]

b) Con l'uso di una calcolatrice, determina le ampiezze degli angoli interni del parallelogramma ABCD, sapendo che:

1. A(0,2), B(–1,0), C(3,0). 2. A(0,3), C(2,2), D(2,5).
3. B(0,2), C(–1,0), D(3,1). 4. A(1, –1), B(2,0), D(–2,1).

[**R.** 1) 63°26'6", 116°33'54"; ...]

c) Servendoti di una calcolatrice, determina le ampiezze degli angoli interni del triangolo di vertici:

1. $(1,0),\ (2,1),\ (0,2)$. 2. $(-1,1),\ (2,-1),\ (0,-1)$.
3. $(-2,-1),\ (-1,-2),\ (1,0)$. 4. $(-1,0),\ (2,-3),\ (1,2)$.

[**R.** 1) 36°52'12", 71°33'54", ...; 2) 116°33'54", 33°41'24", ...; ...]

36.4.6 Una considerazione importante, che è bene tener sempre presente. Com'è noto, un dato polinomio P(x) si può fattorizzare in un solo modo in un determinato insieme.
Per esempio, con fattorizzazione in $\mathbb{Q}$, si ha:

$$x^2-4=(x+2)(x-2)$$

ed a meno di commutazioni non c'è altro modo di fattorizzare il binomio x^2-4.
Al contrario, un'espressione goniometrica può essere fattorizzata in più modi. Un esempio, banale se si vuole, ma molto esplicativo, è il seguente:

$$\sin^2 2x=1-\cos^2 2x=(1+\cos 2x)(1-\cos 2x)=(2\sin x\cos x)^2=$$
$$=4\sin^2 x\cos^2 x=4\left(1-\cos^2 x\right)\left(1-\sin^2 x\right)=4(1+\cos x)(1-\cos x)(1+\sin x)(1-\sin x).$$

E questo mostra come $\sin^2 2x$ possa effettivamente essere fattorizzato in più modi:

$$\sin^2 2x=(1+\cos 2x)(1-\cos 2x);$$
$$\sin^2 2x=(2\sin x\cos x)^2.$$
$$\sin^2 2x=4(1+\cos x)(1-\cos x)(1+\sin x)(1-\sin x).$$

VERIFICHE

Seno e coseno di un angolo (nn. 1-6):

1. Costruire graficamente un angolo α compreso fra 0° e 90° sapendo che:

a) $\sin\alpha=\frac{3}{5}$. b) $\sin\alpha=\frac{1}{4}$. c) $\cos\alpha=\frac{2}{7}$. d) $\cos\alpha=\frac{1}{2}$.

2. Dell'angolo α compreso fra 0° e 90° calcolare il coseno sapendo che:

a) $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. b) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$. c) $\sin\alpha = \frac{2}{3}$.

3. Dell'angolo α compreso fra 0° e 90° calcolare il seno sapendo che:

a) $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. b) $\cos\alpha = \frac{1}{5}$. c) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$.

4. Dimostrare che risulta:

$$\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \quad \cos 18° = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

[**R.** Bisogna ricordare che il lato del decagono regolare inscritto in una circonferenza è …]

5. Ammettiamo che α sia l'ampiezza di un angolo acuto.

a) Calcolare $\cos\alpha$ sapendo che: 1) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$; 2) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$; 3) $\sin\alpha = \frac{5}{13}$.

b) Calcolare $\sin\alpha$ sapendo che: 1) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$; 3) $\cos\alpha = \frac{12}{13}$.

6. Ammettiamo che α sia l'ampiezza di un angolo ottuso.

a) Calcolare $\cos\alpha$ sapendo che: 1) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$; 2) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$; 3) $\sin\alpha = \frac{5}{13}$.

b) Calcolare $\sin\alpha$ sapendo che: 1) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$; 3) $\cos\alpha = \frac{12}{13}$.

Tangente di un angolo (nn. 7-8):

7. Dimostrare che:

1. $\tan 18° = \frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$. 2. $\tan(180°-\alpha) = -\tan\alpha$. 3. $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$.

4. $\tan(90°-\alpha) = \frac{1}{\tan\alpha}$. 5. $\tan(90°+\alpha) = -\frac{1}{\tan\alpha}$.

8. Senza l'uso della calcolatrice determinare il seno e il coseno dell'angolo che la retta r forma con l'asse x di un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sapendo che r ha equazione:

1. $y = x+2$. 2. $y = -x\sqrt{3}+1$. 3. $y = -x+2$.

4. $2x+y-1=0$. 5. $3x+4y+2=0$. 6. $2x-3y-1=0$.

$\left[\textbf{R.}\ 1)\ \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2};\ 2)\ \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2};\ \ldots\right]$

9. Ammesso che α sia un angolo acuto, esprimere $\cos\alpha$ e $\sin\alpha$ in funzione di $\tan\alpha$.

10. Ammesso che α sia un angolo ottuso, esprimere $\cos\alpha$ e $\sin\alpha$ in funzione di $\tan\alpha$.

Formule fondamentali e applicazioni (nn. 11-20):

11. Sapendo che $\tan\alpha = \frac{1}{2}$, con 0°<α<90°, calcolare, senza usare strumenti di calcolo automatico:

1. $\sin(30°+\alpha)$. 2. $\cos(\alpha-30°)$. 3. $\tan(\alpha+45°)$.

$\left[\textbf{R.}\ 1)\ \frac{2\sqrt{5}+\sqrt{15}}{10},\ 2)\ \frac{2\sqrt{15}+\sqrt{5}}{10},\ 3)\ldots\right]$

12. Sono dati i due angoli α, β tali che:

$$\tan\alpha = \frac{3}{4} \text{ con } 0° < \alpha < 90° \quad \text{e} \quad \sin\beta = \frac{4}{5} \text{ con } 90° < \beta < 180°.$$

Calcolare seno, coseno e tangente dei seguenti angoli, senza l'uso di strumenti di calcolo automatico:

1) $\alpha+\beta, \alpha-\beta$; 2) $2\,\alpha,\ 2\,\beta$; 3) $2\,(\alpha+\beta),\ 2\,(\alpha-\beta)$; 4) $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}$.

$\Big[$1) $\sin(\alpha+\beta) = \frac{7}{25}$, $\cos(\alpha+\beta) = -\frac{24}{25}$, …; 2) $\sin 2\alpha = \frac{24}{25}$, $\cos 2\alpha = \frac{7}{25}$, …;
3) $\sin 2(\alpha+\beta) = -\frac{336}{625}$, …; 4) $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{10}}{10}$, …$\Big]$

13. Gli angoli α, β sono tali che:

$$\cos\alpha = \frac{3}{5}, \quad \tan\beta = -\frac{3}{4}.$$

Senza utilizzare strumenti di calcolo automatico né tavole trigonometriche, stabilire se α e β possono essere angoli di un medesimo triangolo.

14. Considerati gli angoli acuti α e β, tali che:

$$\tan\alpha = \frac{4}{3}, \quad \tan\beta = \frac{5}{12}.$$

calcolare $\sin(\alpha+\beta)$ e $\cos(\alpha+\beta)$ senza servirsi di strumenti di calcolo automatico.

15. L'angolo al vertice di un triangolo isoscele ha il coseno uguale a $\frac{5}{13}$. Determinare i coseni degli angoli alla base. [**R.** $2/\sqrt{13}$]

16. In un parallelogramma i lati sono lunghi 7 e 5, rispetto ad una prefissata unità di misura delle lunghezze, e gli angoli acuti hanno tangente uguale a $3/4$. Calcolare i coseni degli angoli che la diagonale minore forma con i lati del parallelogramma. [**R.** $\sqrt{2}/2,\ -\sqrt{2}/10$]

17. Dimostrare le seguenti formule (sono dette **formule parametriche**):

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \left(\text{dove } t = \tan\frac{x}{2}\right).$$

$$\left[\textbf{R. } \sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \ldots;\ \cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \ldots\right]$$

18. Dimostrare le seguenti formule (sono dette **formule di prostaferesi** [4]):

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}; \quad \sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2};$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}; \quad \cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}.$$

Servirsi di esse per trasformare in prodotti le seguenti somme:

1. $\sin 3\alpha + \sin 2\alpha$. 2. $\sin 3\alpha - \sin 2\alpha$. 3. $\cos 3\alpha + \cos 2\alpha$.
4. $\cos 3\alpha - \cos 2\alpha$. 5. $\sin\frac{5x}{2} + \cos\frac{3x}{2}$. 6. $\cos\frac{3x}{2} - \cos x$.

---

[4] La parola *prostaferesi* è l'unione di due termini greci: *prosthesis* (addizione) e *aphairesis* (sottrazione).

7. $\sin 4x - \sin\frac{x}{2}$. 8. $\cos 2x + \cos 6x$.

[**R.** Partendo dalle formule di addizione e sottrazione, si ponga $\alpha+\beta=p$, $\alpha-\beta=q$; dopodiché…1) $2\sin\frac{5\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$;…;8) $2\cos 4x\cos 2x$]

19. Dimostrare le seguenti formule (sono dette **formule di Werner** [5]):

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)];\quad \cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)];$$
$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)];\quad \cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)].$$

Servirsi di esse per trasformare in somme i seguenti prodotti:

1. $\sin 2\alpha\sin\alpha$. 2. $\cos\alpha\cos 3\alpha$. 3. $\cos 3\alpha\sin 2\alpha$. 4. $\sin 3\alpha\cos 2\alpha$.

5. $\sin x\sin\frac{x}{2}$. 6. $\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}$. 7. $\cos 2x\sin\frac{x}{2}$. 8. $\sin 2x\cos\frac{x}{2}$.

[**R.** 1) $\frac{1}{2}(\cos\alpha-\cos 3\alpha)$;…; 8) $\frac{1}{2}\left(\sin\frac{5x}{2}+\sin\frac{3x}{2}\right)$]

20. Calcolare $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ e $\tan\alpha$, sapendo che:

a) $2\sin\alpha-3\cos\alpha=2$. [R. $\sin\alpha=1,\ldots$]

b) $5\sin\alpha+10\cos\alpha=11$. [**R.** 2 sol.: $\sin\alpha_1=\frac{3}{5},\ldots;\ \sin\alpha_2=\frac{7}{25},\ldots$]

c) $\tan\alpha+\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{25}{12}$. [**R.** 2 sol.: $\tan\alpha_1=\frac{3}{4},\ldots;\ \tan\alpha_2=\frac{4}{3},\ldots$]

d) $\sin\alpha+\tan\alpha=0$. [**R.** i sol. doppia: $\sin\alpha=0,\ldots$]

Questioni varie:

21. Calcolare l'ampiezza dell'angolo sotto cui è visto il segmento AB dal punto P, sapendo che:

1. A(1,0), B(1,2), P(6,0). 2. A(2, –1), B(–1,2), P(5,0).

[**R.** 1) 21°48'5"; 2) 36°52'12"]

22. Sono assegnati i punti A(4,0) e B(0,3) e la retta r di equazione 3x+4y–24=0. Determinare due rette, perpendicolari tra loro, passanti una per A e l'altra per B, in modo che si intersechino in un punto C della retta r. Calcolare le ampiezze degli angoli interni del triangolo ABC.

[**R.** $r_A\equiv y=-\frac{24}{7}x+\frac{96}{7}$, $r_B\equiv y=\frac{7}{24}x+3$;…]

23. Posto che α,β,γ siano gli angoli di un triangolo rettangolo, dimostrare che si ha:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,\quad \sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2.$$

24. Posto che α,β,γ siano gli angoli di un triangolo qualunque, dimostrare che si ha:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=1.$$

[**R.** Constatato che $\cos(\alpha+\beta)=-\cos\gamma$ e perciò … , elevando al quadrato entrambi i membri … dopo aver semplificato si ottiene la relazione cercata]

25. Completa la seguente tabella e mettila da parte. Ti può essere utile in molte situazioni. Si capisce che si chiedono i valori esatti delle funzioni e non quelli approssimati, che tuttavia possono essere pure

[5] **Werner**; Johannes, matematico tedesco, 1468-1528. Anche le formule di prostaferesi sono attribuite a lui.

calcolati, magari arrestando l'approssimazione alla prima cifra decimale.

α	sin α	cos α	tan α
30°			
60°			
45°			
15°			$2-\sqrt{3}$
75°			
22°30'		$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}-1$
18°			
36°			$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$
54°	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	
72°			

26. Nella tabella sottostante ciascuna delle tre funzioni circolari seno, coseno e tangente di un angolo è espressa per mezzo di una sola delle altre due. Fornire la dimostrazione e spiegare la ragione del doppio segno $\pm$.

Esprimere:	in funzione di $\sin\alpha$	in funzione di $\cos\alpha$	in funzione di $\tan\alpha$
$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\pm\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$
$\cos\alpha$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	$\cos\alpha$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$
$\tan\alpha$	$\pm\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	$\tan\alpha$

27. Si consideri la funzione $y=a\cos^2(bx)+a\sin^2(bx)+c$, dove a, b, c sono numeri naturali primi tali che a>b>c. Determinare tali numeri sapendo che il grafico della funzione, rappresentato in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), delimita, con gli assi medesimi e con la retta di equazione x=b, una regione di area 21. [**R**. 5, 3, 2]

28. Dimostrare che, per gli angoli α che non fanno perdere di significato alle espressioni in gioco, risulta identicamente:

a) $1+\sin\alpha=\frac{\left(1+\tan\frac{a}{2}\right)^2}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$; b) $\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}}$; c) $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha+1}{1+\sin\alpha}=\frac{2}{1+\tan\frac{\alpha}{2}}$.

[**N.B.:**. Può far comodo l'esercizio N° 17]

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

DOMANDE.

1. È vero che il seno e il coseno di un angolo si possono misurare in metri?
2. Cos'è una circonferenza goniometrica?
3. Esiste un angolo α tale che $\sin\alpha = 1/4$ e $\cos\alpha = 3/4$?
4. Si sa che un angolo ha una misura α compresa fra 25° e 50°. Si può concludere che risulta: $\cos 25° < \cos\alpha < \cos 50°$?
5. Dopo aver verificato che esiste un angolo α, compreso fra 0° e 360°, tale che $\sin\alpha = 3/5$ e $\cos\alpha = -4/5$, a quale quadrante appartiene l'angolo?
6. È vero che, per ogni angolo x, compreso fra 0° e 180°, è $\cos x \tan x = \sin x$?
7. Un angolo α, appartenente al primo quadrante, è tale che $\tan\alpha = 3/4$. È possibile calcolare il seno ed il coseno dell'angolo?
8. È vero che due angoli opposti hanno i seni e i coseni opposti?
9. È vero che risulta $\sin 50° = \sin 25° + \sin 25°$?
10. È possibile tracciare il grafico della funzione $y = 2\cos^2(ax+b) + 2\sin^2(ax+b)$, senza conoscere i valori di a, b ?

RISPOSTE.

1. Assolutamente no. Infatti, seno e coseno di un angolo, essendo rapporti di segmenti, sono numeri puri, non grandezze.
2. È una circonferenza avente raggio unitario e centro nell'origine del sistema cartesiano di riferimento.
3. No. Infatti non è soddisfatta la relazione pitagorica.
4. No. Infatti, mentre l'angolo cresce da 0° a 90° il suo coseno decresce da 1 a 0. È pertanto: $\cos 25° > \cos\alpha > \cos 50°$. Se si fosse trattato invece del seno dell'angolo, effettivamente si avrebbe: $\sin 25° < \sin\alpha < \sin 50°$. E ciò perché, mentre l'angolo cresce da 0° a 90° il suo seno cresce da 0 ad 1.
5. Siccome $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, l'angolo α esiste. Esso appartiene al 2° quadrante, cioè risulta $90° < \alpha < 180°$.
6. No. Anche se in realtà vi è una sola eccezione: $x = 90°$. Per questo angolo, infatti, la tangente non esiste.
7. Certamente. Basta risolvere il seguente sistema di equazioni nelle incognite $\sin\alpha$ e $\cos\alpha$:
$$\begin{cases} \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{3}{4} \\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases}$$
e prendere le sole soluzioni positive dal momento che l'angolo appartiene al 1° quadrante, dove seno e coseno sono per l'appunto positivi. Si trova:
$$\sin a = \frac{3}{5}\ , \quad \cos\alpha = \frac{4}{5}\ .$$
Si può anche utilizzare quella delle formule proposte nella tabella illustrata nell'es. n. 24, che si presta al caso in questione.
8. No. Hanno i seni opposti, ma i coseni uguali.
9. No. Se così fosse sarebbe $\sin 50° = 2\sin 25°$, mentre in genere risulta $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.

10. È possibile, dal momento che $\cos^2(ax+b)+\sin^2(ax+b)=1$ indipendentemente di valori di a e b. Quello proposto è in effetti un modo complicato di scrivere la funzione $y=2$.