

Prerequisiti:

- Conoscere le fondamentali nozioni di goniometria e di geometria elementare.
- Possedere sufficiente abilità nel calcolo algebrico.

Lo studio di questa unità riguarda il 2° biennio di tutte le scuole. Gli studenti dei Licei non scientifici lo faranno precedere dallo studio dell'unità 36.

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:

- *enunciare e dimostrare le relazioni fra gli elementi di un triangolo rettangolo*
- *risolvere i triangoli rettangoli, eventualmente anche con l'ausilio di una calcolatrice scientifica*
- *enunciare e dimostrare i teoremi del coseno e dei seni*
- *risolvere i triangoli qualsiasi, eventualmente anche con l'ausilio di una calcolatrice scientifica*
- *risolvere, con l'ausilio della trigonometria, qualche semplice problema di geometria o di ambito disciplinare diverso*
- *delineare con proprietà l'evoluzione della trigonometria*

37.1 Introduzione.

37.2 Relazioni trigonometriche nel triangolo rettangolo.

37.3 Pendenza di una strada.

37.4 Relazioni trigonometriche in un triangolo qualunque.

37.5 Risoluzione dei triangoli qualunque.

37.6 Alcune applicazioni.

37.7 Nota storica.

Verifiche.

Una breve sintesi per domande e risposte.

Lettura.

Nozioni di trigonometria

Unità 37

37.1 INTRODUZIONE

37.1.1 Incominciamo con alcuni quesiti:

- Sai spiegare se le misure 15 m, 20 m, 36 m possono essere quelle dei lati di uno stesso triangolo?
- Sai spiegare se gli angoli di 35° e 50° possono essere angoli di uno stesso triangolo rettangolo?
- Sei in grado di calcolare il rapporto tra un cateto e l'ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele?
- Sei in grado di calcolare il rapporto tra il cateto maggiore e l'ipotenusa di un triangolo rettangolo, avente un angolo di 30° ?

Se hai risolto le precedenti questioni, dovresti essere consapevole del fatto che siamo a conoscenza di relazioni tra i lati di un triangolo e di relazioni tra gli angoli. Così, per esempio, sappiamo che:

- se a è la lunghezza dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo e b, c sono quelle dei cateti, risulta:

$$[1] \quad a^2 = b^2 + c^2;$$

- se β, γ sono le misure (in gradi sessagesimali) degli angoli acuti di un triangolo rettangolo, si ha:

$$[2] \quad \beta + \gamma = 90^\circ.$$

Non conosciamo, però, alcuna relazione che leghi le misure dei lati con quelle degli angoli di un triangolo, se si esclude quella che, detto in parole povere, assicura che al lato maggiore è opposto l'angolo maggiore. Questo perlomeno in generale, poiché in qualche situazione particolare abbiamo informazioni in merito. Così, per esempio, è noto che:

- i tre lati di un triangolo hanno uguale lunghezza se e solo se i suoi tre angoli hanno uguale ampiezza (che, in questo caso, è 60°);
- un triangolo ha due angoli congruenti se e solo se ha due lati congruenti;
- un triangolo è rettangolo e isoscele se e solo se le ampiezze dei suoi angoli sono: $90^\circ, 45^\circ, 45^\circ$;
- in un triangolo rettangolo l'ipotenusa è lunga il doppio di un cateto se e solo se l'angolo opposto a quel cateto è ampio 30° (e, di conseguenza, l'altro angolo acuto è ampio 60°).

37.1.2 Ora, però, in molte circostanze è utile disporre di relazioni generali che leghino le misure dei lati e degli angoli di un triangolo. Valga per tutti il seguente esempio.

Si voglia misurare l'altezza AB di una *torre*⁽¹⁾ (Fig. 1) e non si riesca a farlo direttamente per qualche ragione su cui non stiamo ad indagare.

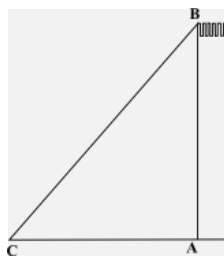


FIG. 1

Si supponga, invece, di riuscire a misurare, ovviamente con gli strumenti necessari, la distanza CA di un conveniente punto C dalla torre e l'angolo \hat{ACB} (angolo sotto cui è vista la torre dal punto C). Si supponga, inoltre, di poter scegliere C in modo che \hat{BAC} sia retto.

¹ La chiamiamo “torre” ma potrebbe trattarsi di qualunque cosa: un palo, un campanile, una casa, un albero, eccetera

Certo, se potessimo prendere C in modo che \widehat{ACB} fosse ampio 45° , potremmo concludere subito che AB è lunga quanto CA. Come sai, in questo modo Talete aveva calcolato le altezze delle piramidi.

Così pure, se potessimo prendere C in modo che \widehat{ACB} fosse ampio 30° o 60° , avremmo ancora la possibilità di risalire rapidamente alla lunghezza di AB. Provaci tu.

Ma se non possiamo scegliere C in modo da trovarci in una situazione così favorevole?

In questo caso bisogna esplorare strade nuove ed è quello che andiamo a fare.

La parte della matematica che si occupa di queste cose è la **trigonometria**. La parola è l'unione di due termini greci: *trigonon* (triangolo) e *metron* (misura). Appunto: misura dei triangoli.

37.2 RELAZIONI TRIGONOMETRICHE NEL TRIANGOLO RETTANGOLO

37.2.1 Ci proponiamo di trovare delle relazioni tra gli elementi – lati ed angoli – di un generico triangolo rettangolo. Premettiamo anzitutto che, preso un triangolo ABC rettangolo in A (Fig. 2), per nostra comodità indichiamo una volta per tutte con a la misura dell'ipotenusa e con b, c quelle dei cateti opposti rispettivamente ai vertici B, C; e inoltre indichiamo con α la misura dell'angolo retto ($\alpha=90^\circ$) e con β, γ le misure degli angoli acuti di vertici B, C nell'ordine.

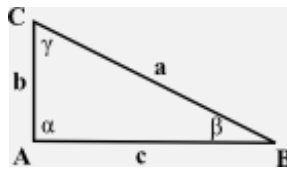


FIG. 2

37.2.2 Consideriamo il triangolo ABC, rettangolo in A (Fig. 2). Per definizione di seno e di coseno di un angolo acuto si ha: $\frac{AC}{BC} = \sin \beta$, $\frac{AB}{BC} = \cos \beta$; ossia, per le convenzioni fatte:

$$b = a \sin \beta, \quad c = a \cos \beta.$$

D'altra parte gli angoli acuti di un triangolo rettangolo sono evidentemente complementari, per cui: $\sin \gamma = \cos \beta$, $\cos \gamma = \sin \beta$. Di conseguenza:

$$c = a \sin \gamma, \quad b = a \cos \gamma.$$

In definitiva si hanno i due seguenti gruppi di formule:

$$[3] \quad \begin{cases} b = a \sin \beta \\ c = a \sin \gamma \end{cases} \quad \begin{cases} b = a \cos \gamma \\ c = a \cos \beta \end{cases}$$

Esse riassumono le seguenti proprietà:

◆ **In ogni triangolo rettangolo, la lunghezza di ciascun cateto è uguale a quella dell'ipotenusa moltiplicata per:**

- il seno dell'angolo opposto ad esso;
- il coseno dell'angolo acuto adiacente ad esso.

37.2.3 Dalle relazioni precedenti si ottengono poi facilmente queste altre:

$$\frac{b}{c} = \frac{a \sin \beta}{a \cos \beta}, \quad \frac{c}{b} = \frac{a \sin \gamma}{a \cos \gamma};$$

da cui segue:

$$[4] \quad b = c \tan \beta, \quad c = b \tan \gamma.$$

Ossia, detto a parole:

♦ **In ogni triangolo rettangolo, ciascun cateto è uguale all'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto al primo.**

37.2.4 Le precedenti relazioni [3] e [4], unite al fatto che $\alpha=90^\circ$, permettono di *risolvere i triangoli rettangoli*, vale a dire di calcolare gli elementi incogniti di un triangolo rettangolo, noti ovviamente alcuni altri elementi capaci di determinarlo. I casi possibili sono i seguenti:

a) si conoscono due lati; b) si conoscono un lato e un angolo acuto.

• ESEMPIO 1. Nel triangolo ABC, rettangolo in A, si ha: $b=3$, $c=4$. Determinare a , β , γ .

RISOLUZIONE. Mediante il teorema di Pitagora si trova $a=5$. Quindi, in virtù della relazione $b=a \sin \beta$, si trova $\sin \beta = \frac{3}{5}$ e, con una calcolatrice: $\beta \approx 36^\circ 52' 12''$.

Una volta trovato β , l'angolo γ si trova subito giacché è il complementare di β : $\gamma \approx 53^\circ 7' 48''$.

• ESEMPIO 2. Nel triangolo ABC, rettangolo in A, si ha: $a=5$, $\beta=70^\circ$. Determinare γ , b , c .

RISOLUZIONE. Subito si ottiene $\gamma=90^\circ-\beta=20^\circ$. Inoltre, con una calcolatrice:

$$b=a \sin \beta = 5 \sin 70^\circ \approx 5 \times 0,939 \approx 4,7; \quad c=a \cos \beta = 5 \cos 70^\circ \approx 5 \times 0,342 \approx 1,7.$$

37.2.5 Ti proponiamo alcuni esercizi.

a) Tenendo presenti le notazioni stabilite, trovare (utilizzando la calcolatrice solo quando non ne puoi fare a meno) gli elementi incogniti del triangolo ABC, rettangolo in A, sapendo che:

1. $a=50$; $b=25$. 2. $a=70$; $\beta=30^\circ$. 3. $b=50$; $c=25\sqrt{3}$.

4. $a=172,27$; $b=136,29$. 5. $a=15$; $\beta=27^\circ 15'$. 6. $b=30$; $\beta=30^\circ$.

7. $c=50$; $\beta=35' 45''$. 8. $b=38,74$; $\beta=27^\circ 45'$. 9. $c=105,69$; $\beta=52^\circ 12' 23''$.

b) Una scala, appoggiata ad una parete, la tocca ad un'altezza di 2,5 m dal pavimento, mentre la sua base d'appoggio è staccata di 90 cm dalla parete. Di quanto la scala è inclinata rispetto al pavimento?

c) Un angolo acuto di un triangolo rettangolo misura 30° . Esprimere l'area del triangolo in funzione della lunghezza del cateto adiacente a quell'angolo.

d) Calcolare la misura, espressa in gradi sessagesimali ed approssimata ai primi, dell'angolo formato dalla diagonale di un rettangolo aureo con il maggiore dei lati del rettangolo. [R. $\approx 31^\circ 43'$]

e) Nel quadrilatero ABCD i lati AB e AD sono uguali e così pure lo sono i lati CB e CD. Inoltre i suoi angoli interni con vertici in A e C sono ampi rispettivamente 100° e 60° . Calcolare un valore approssimato del rapporto fra il lato AB e la diagonale BD. [R. $\approx 0,65$]

f) Le guide AB e AC sono disposte in modo che il triangolo ABC sia rettangolo in C. Due palline, costrette a muoversi lungo le guide, sono lanciate contemporaneamente, una da B e l'altra da C, e arrivano simultaneamente in A. Sapendo che la pallina che parte da B è una volta e mezza più veloce dell'altra pallina, calcolare di quanto la guida AB è inclinata rispetto alla retta BC, esprimendo la misura in gradi sessagesimali con approssimazione per eccesso ad 1° . [R. $\approx 42^\circ$]

g) Si vuole calcolare la distanza Terra-Luna.

Supponiamo che due osservatori si trovino in due punti A, B di uno stesso meridiano terrestre (Fig. 3) in modo che il primo veda la Luna esattamente al suo orizzonte quando il secondo la vede al suo zenit. Nota la misura dell'angolo \widehat{ATB} (uguale al valore assoluto della differenza tra le latitudini dei punti A, B), che è $89^\circ 3'$ e nota la misura R del raggio della Terra, che è all'incirca 6371 km, quanto dista la Terra dalla Luna?

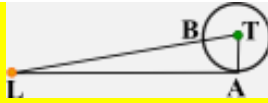


FIG. 3

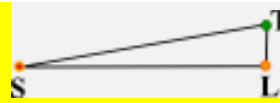


FIG. 4

h) Si vuole calcolare la distanza Terra-Sole.

Quando è al suo primo quarto, la Luna si trova sotto un angolo retto rispetto ai centri della Terra e del Sole (Fig. 4). Se in questa fase lunare si misura l'angolo sotto cui è vista dalla Terra la congiungente Luna-Sole, si trova all'incirca $89^{\circ}51'$. Sapendo che la distanza media Terra-Luna è di circa 384.000 km, calcolare la distanza della Terra dal Sole.

NOTA BENE. Al giorno d'oggi esistono procedimenti più sottili di quelli descritti in due precedenti esempi per misurare le distanze della Terra dai corpi celesti. Come, per esempio, quello basato sulla misura del tempo che impiega un segnale elettromagnetico per andare e ritornare dalla Terra al corpo celeste in esame. Da questa misura, infatti, si risale alla distanza cercata tenendo presente che il segnale viaggia a circa 300.000 km/s.

Naturalmente è necessario che questa distanza non sia elevata. Possiamo dire che il procedimento va bene se restiamo nel nostro sistema planetario, poiché se ci spingiamo oltre occorrono altri procedimenti, sui quali non possiamo soffermarci.

Ad ogni modo, per ritornare ai procedimenti da noi descritti, riteniamo che essi siano ugualmente interessanti; se non altro per il rilievo storico che rivestono (una volta non ce n'erano di migliori).

37.3 PENDENZA DI UNA STRADA

37.3.1 Hai avuto modo certamente di osservare cartelli stradali come quello illustrato in figura 5: indica una strada con pendenza (media) del 12%. Il suo significato è semplice: se schematizziamo la strada con l'ipotenusa di un triangolo rettangolo ABC (Fig. 6), la sua pendenza è la tangente dell'angolo in A, vale a dire il rapporto fra il cateto CB e il cateto AC.

D'altro canto, in queste situazioni l'angolo in A è molto piccolo (meno di 10°) e quindi possiamo supporre $\frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} \approx \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}}$. Ragion per cui si assume in genere come pendenza (media) della strada il rapporto $\frac{\overline{CB}}{\overline{AB}}$, che poi altro non è che il seno dell'angolo in A.

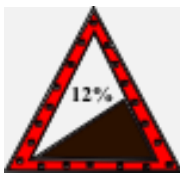


FIG. 5



FIG. 6

Affermare, pertanto, che una strada ha una pendenza (media) del 12% significa, in fin dei conti, che quando si percorre un tratto di 100 m di quella strada ci si innalza di 12 m sul livello del mare. Appunto:

$$\text{pendenza} = \frac{12}{100} = 0,12 = 12\%.$$

Per esempio, dai 405 m di quota di Rieti si sale, in circa 25 km, ai 1894 m del Monte Terminillo. La

pendenza media di quel tratto di strada è perciò:

$$\text{pendenza} = \frac{1894-405}{25000} \approx 5,96\% .$$

Ti proponiamo un paio di esercizi.

- a) Un cartello stradale indica che in quel tratto, la strada ha una pendenza del 13%. Di quanto quella strada è inclinata rispetto ad un piano orizzontale?
- b) In una certa tappa del Giro ciclistico d'Italia, la parte finale comprendeva tre settori:
- nel primo, lungo 7 km, la strada si innalzava di 364 m sul livello del mare;
 - nel secondo, lungo 4 km, si innalzava di 180 m;
 - nel terzo, lungo 10 km, si innalzava di 680 m.

Qual è il tratto di maggiore pendenza? Quale quello di minore pendenza? Qual è la pendenza media dell'intera parte finale della tappa? [R. ...; $\approx 5,8\%$]

37.3.2 Il precedente esercizio b) ci offre lo spunto per una riflessione di carattere generale.

Si consideri allora un percorso stradale formato da n tratti di lunghezze L_1, L_2, \dots, L_n , aventi pendenze medie rispettivamente p_1, p_2, \dots, p_n . Ebbene, la pendenza media p sull'intero percorso risulta essere:

$$p = \frac{L_1 p_1 + L_2 p_2 + \dots + L_n p_n}{L_1 + L_2 + \dots + L_n} ,$$

vale a dire che **la pendenza media sull'intero percorso è la media aritmetica ponderata delle pendenze medie dei singoli tratti con pesi le loro rispettive lunghezze.**

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione è abbastanza elementare. Chiamate al riguardo H_1, H_2, \dots, H_n le quote di cui s'innalzano gli n tratti, si ha:

$$p_1 = \frac{H_1}{L_1} , \quad p_2 = \frac{H_2}{L_2} , \quad \dots , \quad p_n = \frac{H_n}{L_n} ;$$

da qui segue:

$$H_1 = L_1 p_1 , \quad H_2 = L_2 p_2 , \quad \dots , \quad H_n = L_n p_n .$$

La pendenza media dell'intero percorso è, d'altro canto:

$$p = \frac{H_1 + H_2 + \dots + H_n}{L_1 + L_2 + \dots + L_n} ,$$

ossia:

$$p = \frac{L_1 p_1 + L_2 p_2 + \dots + L_n p_n}{L_1 + L_2 + \dots + L_n} .$$

Come volevasi dimostrare.

Si capisce facilmente che se gli n tratti sono ugualmente lunghi e perciò $L_1 = L_2 = \dots = L_n$, pur con pendenze diverse, allora la pendenza media dell'intero percorso è uguale alla media aritmetica (semplice) delle pendenze medie degli n tratti.

37.4 RELAZIONI TRIGONOMETRICHE IN UN TRIANGOLO QUALUNQUE

37.4.1 Consideriamo adesso un triangolo qualsiasi ABC (Fig. 7) e tracciamo la sua altezza CH . In virtù del teorema di Pitagora si ha $\overline{BC}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{HB}^2$. D'altronde: $\overline{CH}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AH}^2$ e $\overline{HB} = \overline{AB} - \overline{AH}$. Di conseguenza: $\overline{BC}^2 = (\overline{AC}^2 - \overline{AH}^2) + (\overline{AB} - \overline{AH})^2$.

Da qui segue $\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2 \overline{AB} \cdot \overline{AH}$, e poiché $\overline{AH} = b \cos \alpha$, si ottiene:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

Analogo ragionamento vale per gli altri angoli, β e γ , e anche se il piede dell'altezza non appartiene al lato relativo ma ad uno dei suoi prolungamenti.

In definitiva si ricava il seguente gruppo di formule:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

che esprime il cosiddetto **TEOREMA DEL COSENO** (detto anche **teorema di Carnot**⁽²⁾).

Si fa notare come nel caso particolare in cui $\alpha=90^\circ$, la prima relazione del gruppo non è altro che il teorema di Pitagora (del quale, pertanto, il teorema del coseno è una generalizzazione), mentre la seconda e la terza diventano rispettivamente: $c=a \cos \beta$, $b=a \cos \gamma$.

Lasciamo a te il compito di giustificare queste affermazioni.

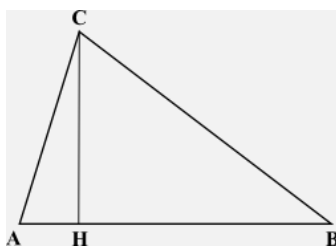


FIG. 7

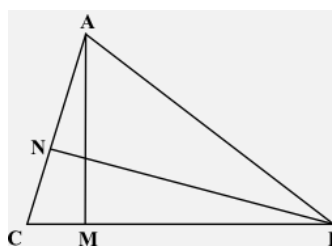


FIG. 8

37.4.2 Un altro teorema, riguardante un triangolo qualunque, è il cosiddetto **TEOREMA DEI SENI** (detto anche **teorema di Eulero**), espresso dalla seguente catena di uguaglianze:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Per la sua dimostrazione consideriamo il triangolo ABC (Fig. 8) e tracciamo le sue altezze AM e BN. Prendendo in esame dapprima il triangolo rettangolo AMC e poi il triangolo rettangolo AMB, si ottiene: $\overline{AM} = b \sin \gamma$ e $\overline{AM} = c \sin \beta$; perciò: $b \sin \gamma = c \sin \beta$; da cui segue:

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Analogamente, prendendo in esame i triangoli rettangoli BNA e BNC, si ottiene: $\overline{BN} = c \sin \alpha$ e $\overline{BN} = a \sin \gamma$, da cui segue:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

In definitiva, come si voleva dimostrare:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Osserviamo che questa dimostrazione, condotta avendo supposto implicitamente che il triangolo ABC fosse acutangolo, non cambia sostanzialmente se esso è ottusangolo; come puoi controllare da te.

² **Carnot**, Lazare, matematico francese, 1753-1823, padre di Sadi (1796-1832), uno dei fondatori della termodinamica.

Se poi il triangolo fosse rettangolo, le relazioni che esprimono il teorema dei seni sono ovvie. Si ha infatti $\sin \alpha = \sin 90^\circ = 1$):

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Ti proponiamo adesso di dimostrare la seguente proprietà:

- ◆ Considerato un qualsiasi triangolo, ciascuno dei rapporti uguali:

$$\frac{a}{\sin \alpha}, \frac{b}{\sin \beta}, \frac{c}{\sin \gamma}$$

è uguale al diametro del cerchio circoscritto al triangolo.

37.5 RISOLUZIONE DEI TRIANGOLI QUALUNQUE

Abbiamo visto in precedenza come si risolve un triangolo rettangolo. Adesso, sulla scorta dei due teoremi precedenti, siamo in grado di risolvere un triangolo qualunque, cioè di calcolare i suoi elementi incogniti, noti ovviamente altri elementi capaci di determinarlo; vale a dire (si ricordino a questo proposito i criteri di congruenza):

- a) due lati e l'angolo compreso; b) un lato e due angoli; c) i tre lati.

Vediamo qualche esempio.

- ESERCIZIO 1. Nel triangolo ABC si ha: $b=35,42$; $c=28,63$; $\alpha=62^\circ$. Calcolare: α, β, γ .

RISOLUZIONE (con l'uso di una calcolatrice).

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha} = \sqrt{35,42^2 + 28,63^2 - 2 \cdot 35,42 \cdot 28,63 \cdot \cos 62^\circ} \approx 33,50;$$

$$\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a} = \frac{35,42 \cdot \sin 62^\circ}{33,50} \approx 0,9335, \text{ da cui segue } \beta \approx 69^\circ;$$

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) \approx 49^\circ.$$

- ESERCIZIO 2. Nel triangolo ABC si ha: $a=341$, $\alpha=27^\circ 42'$, $\beta=75^\circ 29'$. Calcolare: b, c, γ .

RISOLUZIONE (con l'uso di una calcolatrice).

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - (27^\circ 42' + 75^\circ 29') = 76^\circ 49';$$

$$b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{341 \cdot \sin 75^\circ 29'}{\sin 27^\circ 42'} \approx 710; \quad c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{341 \cdot \sin 76^\circ 49'}{\sin 27^\circ 42'} \approx 714.$$

- ESERCIZIO 3. Nel triangolo ABC si ha: $a=37$; $b=42$; $c=48$. Calcolare α, β, γ .

RISOLUZIONE (con l'uso di una calcolatrice).

Poiché ogni lato è minore della somma degli altri due il triangolo esiste. Si ha:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{42^2 + 48^2 - 37^2}{2 \cdot 42 \cdot 38} \approx 0,66939, \text{ da cui segue } \alpha \approx 47^\circ 59';$$

$$\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a} = \frac{42 \cdot \sin 47^\circ 59'}{37} \approx 0,84334, \text{ da cui segue } \beta \approx 57^\circ 30';$$

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) \approx 74^\circ 31'.$$

Alcuni esercizi da risolvere.

Con l'uso di una calcolatrice, ma solo se occorre, risolvi il triangolo ABC, sapendo che:

1. $a = 37,41$; $b = 45,72$; $\gamma = 72^\circ$. [R. $c \approx 49,32$; $\alpha \approx 46^\circ 10' 9''$; $\beta \approx 61^\circ 49' 51''$]
2. $b = 872$, $\alpha = 35^\circ 48'$, $\gamma = 51^\circ 12'$. [R. $\beta = 93^\circ$; $a \approx 510,78$; $c \approx 680,52$]
3. $a = 73$; $\beta = 84^\circ$; $\gamma = 30^\circ$. [R. $\alpha = 66^\circ$; $b \approx 79,47$; $c \approx 39,95$]
4. $b = 37$; $c = 33$; $\alpha = 60^\circ$.

5. $a = 123$; $b = 210$; $c = 182$.

6. $a = 25,32$; $b = 32,25$; $c = 36,50$.

[R. $\alpha \approx 42^\circ 39' 46''$; $\beta \approx 59^\circ 40' 24''$; $\gamma \approx 77^\circ 39' 50''$]

37.6 ALCUNE APPLICAZIONI

37.6.1 Note le misure a , b di due lati di un triangolo e la misura dell'angolo compreso tra essi, l'area A del triangolo è espressa dalla seguente formula:

$$A = \frac{1}{2} a b \sin \gamma.$$

Se $\gamma \leq 90^\circ$ la dimostrazione è immediata. La lasciamo a te.

In fondo essa è pure semplice quando $\gamma > 90^\circ$ (Fig. 9). Infatti, osservato che l'angolo \widehat{ACH} misura $180^\circ - \gamma$ e che $\overline{AH} = b \sin(180^\circ - \gamma)$ e perciò $\overline{AH} = b \sin \gamma$, si ha: $A = \frac{1}{2} \overline{CB} \cdot \overline{AH} = \frac{1}{2} a b \sin \gamma$.

Come applicazione della formula dimostrata ti proponiamo i seguenti esercizi.

- Sia ABC un qualsiasi triangolo. Sui suoi lati ed esternamente ad esso si costruiscano i tre quadrati $ABDE$, $BCFG$ e $CAHL$. Dimostra che i triangoli AHE , BDG e CFL sono equivalenti al triangolo ABC .
- Calcola l'area di un quadrilatero convesso conoscendo le misure delle sue diagonali e dell'angolo acuto che esse formano.
- Spiegare perché un triangolo del quale a , b sono le lunghezze di due lati, ha un'area che non supera $ab/2$. In quale caso tale area è uguale ad $ab/2$?

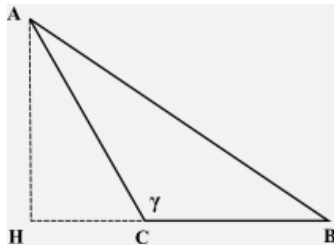


FIG. 9

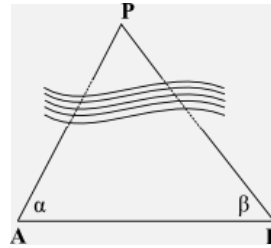


FIG. 10

37.6.2 Si vuole misurare la distanza di un punto A da un punto P, visibile da A ma non accessibile e quindi tale che essa non possa essere misurata direttamente (Fig. 10).

Preso allora un punto B tale che sia possibile misurare direttamente, con appositi strumenti, la distanza AB (che diciamo d) e gli angoli \widehat{PAB} e \widehat{PBA} (le cui misure diciamo rispettivamente α e β), osserviamo anzitutto che si ha: $\widehat{APB} = 180^\circ - (\alpha + \beta)$ e perciò: $\sin \widehat{APB} = \sin(\alpha + \beta)$. Dunque, in virtù del teorema dei seni:

$$\overline{AP} = \frac{d \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

37.7 NOTA STORICA

La trigonometria fu in origine un supporto puro e semplice dell'astronomia e in questo senso fu usata dai principali astronomi, fino a quando non diventò una disciplina autonoma e, successivamente, si suddivise in trigonometria piana e trigonometria sferica. L'introduzione delle nostre agili notazioni per le funzioni trigonometriche fu una delle ultime conquiste. In questa breve nota vogliamo segnalare gli studiosi che fornirono i principali contributi al suo sviluppo, evidenziando come l'evoluzione di

questa disciplina interessò un lungo periodo di tempo e fu opera di uomini appartenenti a civiltà e culture diverse fra loro.

- **Ipparco** di Nicea è considerato il “padre della trigonometria” e il massimo astronomo osservatore dell’antichità. Compì osservazioni astronomiche a Rodi fra il 161 e 126 a.C.. Di lui non ci rimane alcuna opera, ma solo qualche riferimento da parte di studiosi vissuti molto tempo dopo. A lui alcuni storici attribuiscono la suddivisione dell’angolo giro in 360 parti uguali. Altri la attribuiscono invece al suo contemporaneo **Ipsicle** di Alessandria.

- Apporti allo sviluppo della trigonometria e, in particolare, della trigonometria sferica, sono attribuiti a **Menelao** di Alessandria (circa I sec. d.C.). Di lui ci è pervenuta una traduzione araba dell’opera **Sphaerica**, che tratta della geometria sulla sfera e delle conseguenti applicazioni ai fenomeni astronomici.

- **Claudio Tolomeo**, vissuto ad Alessandria nel II sec. d.C., fu autore di un’opera intitolata **Mathematicè syntaxis** (*Raccolta matematica*), che, attraverso una traduzione dall’arabo, giunse nel XII secolo in Occidente col titolo di **Almagesto**. L’opera contiene i principi fondamentali della trigonometria piana e i primi rudimenti di quella sferica. Tolomeo è anche ideatore della *teoria geocentrica* (detta appunto anche *teoria tolemaica*), basata sulla centralità della Terra nell’Universo. Teoria che rimase indiscussa fino al 1543, allorché fu soppiantata dalla *teoria eliocentrica* (o *copernicana*), formulata dall’astronomo polacco **Nikolaj Kopernik** (1473-1543) nella celebre opera **De orbium coelestium revolutionibus**.

- Ipparco, Menelao e Tolomeo avevano trovato e utilizzato, per le loro osservazioni, relazioni fra le corde di un cerchio e i corrispondenti angoli al centro. Furono i matematici indiani, e in particolare **Aryabhata** (V sec. d.C.), che trovarono invece relazioni fra la metà della corda e la metà dell’angolo al centro sotteso dall’intera corda. Vale a dire, qualcosa di molto simile al moderno concetto di seno di un angolo.

- I matematici arabi, che in altri settori della matematica avevano subito l’influsso dei Greci, riguardo alla trigonometria seguirono invece gli Indiani, col risultato che la trigonometria araba si sviluppò sulla base del concetto di seno di un angolo e in questa veste influenzò la trigonometria occidentale, quando incominciarono ad essere studiate le traduzioni in latino delle opere dei matematici arabi.

Il matematico arabo che diede il maggior contributo allo sviluppo della trigonometria fu il persiano **Abu’l-Wafa** (940-998). Un altro persiano, **Nasir Eddin** (1201-1274), continuò la sua opera, ma ben due secoli più tardi: a lui si deve la separazione della trigonometria dall’astronomia.

- Una vera e propria ondata di traduzioni delle opere arabe in latino si ebbe nel XII secolo, ma la fase di assimilazione della matematica fu molto lenta in Occidente (bisogna tener presente che nel lungo periodo della dominazione romana, gli studi matematici furono poco curati). Non di meno, a partire dalla fine del XII secolo c’è un primo risveglio, soprattutto per quanto riguarda l’interesse in campo aritmetico e geometrico. Invece nel settore della trigonometria una vera e propria rinascita si registra solo nel XV secolo, per merito di un matematico e astronomo prussiano: **Johann Müller**, detto **Regiomontano** (1436-1476). Egli scrisse un trattato dal titolo **De triangulis omnimodis libri quinque**, pubblicato postumo nel 1533. La trigonometria, sull’esempio di Nasir Eddin, è organizzata come disciplina a sé, con un’esposizione sistematica in forma che si può ritenere moderna, anche se non vi figura ancora la nostra maneggevole notazione simbolica. Trigonometria piana e sferica figurano ancora assieme.

- La separazione della trigonometria piana da quella sferica avvenne con un altro matematico prussiano, **Georg Joachim von Lauchen** (1514-1576), soprannominato **Rhaeticus**, discepolo di Coperni-

co. L'opera che contiene questa separazione è un libretto dal titolo *De lateribus et angulis triangulorum*, pubblicato nel 1542.

- Fino a questo punto, il termine “trigonometria” non era mai comparso in alcuna delle opere sull'argomento. Comparve, sembra per la prima volta, in un'opera di un altro matematico tedesco, **Bartholomäus Pitiscus** (1561-1613). L'opera è, in realtà, un opuscolo dal titolo, per l'appunto, *Trigonometria, sive de solutione triangulorum tractatus brevis et perspicuus*.
- Detto dei contributi del danese **Thomas Finck** (1561-1656), al quale si deve l'introduzione della “tangente”, e dell'inglese **Edmund Gunter** (1581-1626), che introdusse il termine “coseno”, l'assetto definitivo della trigonometria avvenne con uno dei matematici più prolifici che siano mai esistiti: lo svizzero **Leonhard Euler** (1707-1783). Nelle sue opere, e in particolare nella *Introductio in analysin infinitorum*, egli introduce il cerchio di raggio unitario (*cerchio trigonometrico*), concependo per primo i valori trigonometrici di un angolo come rapporti di segmenti e quindi come numeri e non più come lunghezze di particolari segmenti ricavati con riferimento a circonferenze di dato raggio. Sistema definitivamente la questione delle notazioni trigonometriche: con lui diventano definitive le abbreviazioni **sin**, **cos**, **tan**, che altri studiosi avevano introdotto in tempi diversi. Riduce la risoluzione dei triangoli piani a quattro casi fondamentali, semplificando le numerose situazioni che fino ad allora venivano prese in esame ed eliminando molte formule superflue con l'applicazione di poche di esse.

LABORATORIO DI MATEMATICA

a) Di un triangolo si conoscono le lunghezze di due lati e l'ampiezza dell'angolo opposto ad uno di essi. Risolvere il triangolo determinando i suoi elementi incogniti. Come applicazione, con l'uso di una calcolatrice, se occorre, risolvi il triangolo ABC sapendo che:

- 1) $b = 98$, $c = 45$, $\beta = 135^\circ$; 2) $a = 36$, $b = 72$, $\alpha = 30^\circ$;
 3) $a = 50$, $b = 80$, $\alpha = 60^\circ$; 4) $a = 35$, $b = 60$, $\alpha = 28^\circ 32'$.

Come pensi di procedere?

Il triangolo esiste per qualunque scelta delle misure assegnate?

Se esiste, ne esiste comunque uno soltanto?

Discutine coi tuoi compagni e, se occorre, chiedi soccorso al tuo professore.

b) Durante gli anni della scuola secondaria di 1° grado hai imparato che l'apotema a_n di un poligono regolare di n lati si trova moltiplicando la lunghezza del lato L_n del poligono per un certo numero f_n (detto “numero fisso”) il cui valore varia da poligono a poligono col variare del numero dei lati ma rimane costante per ogni poligono regolare dello stesso numero di lati. Prova a calcolare un valore approssimato di tali numeri fino alla terza cifra decimale. In particolare fa' vedere che:

$$f_3 \approx 0,289; \quad f_4 = 0,5; \quad f_5 \approx 0,688; \quad f_6 \approx 0,866; \quad f_8 \approx 1,207; \quad f_{10} \approx 1,539.$$

VERIFICHE ⁽³⁾

- Determinare i lati di un triangolo rettangolo sapendo che il suo perimetro misura 60 cm e che il coseno di un suo angolo è $\frac{3}{5}$. [R. 25 cm, 15 cm, 20 cm]
- Trovare i lati di un triangolo rettangolo sapendo che la sua area è $\frac{a^2}{4}\sqrt{5}$, dove a è una lunghezza assegnata, e il seno di un suo angolo è $\frac{2}{3}$. [R. $\frac{3}{2}a$, a , $\frac{a}{2}\sqrt{5}$]
- Calcolare il perimetro di un triangolo rettangolo sapendo che il coseno di un suo angolo è $\frac{4}{5}$ e l'altezza relativa all'ipotenusa misura 78 cm. [R. 390 cm]
- Dimostrare che l'area S di un parallelogramma $ABCD$ è data dalla seguente formula:

$$S = \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \sin \widehat{A}.$$
- Con l'uso di una calcolatrice, calcolare le ampiezze degli angoli interni del triangolo ABC , assegnato in un piano cartesiano ortogonale (Oxy) , sapendo che:
 - $A(1,0), B(2,1), C(-1,2)$.
 - $A\left(\frac{1}{2}, -1\right), B\left(2, \frac{3}{2}\right), C(-2,1)$.
 - $A\left(\frac{3}{2}, 1\right), B(-1,1), C\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$.
 - $A(0,0), B\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}\right), C(-1, -2)$.
 [R. 1) $90^\circ, \approx 63^\circ 26' 6'', \approx 26^\circ 33' 54''$; 2) $\approx 82^\circ 18' 14'', \approx 51^\circ 54' 41'', \approx 45^\circ 47' 5''$; ...]
- Con l'uso di una calcolatrice, calcolare un valore approssimato dell'area del triangolo ABC , sapendo che:
 - $\overline{BC} = 127, \widehat{ABC} = 47^\circ 35', \widehat{ACB} = 72^\circ 43'$.
 - $\overline{AB} = 235, \overline{AC} = 179, \widehat{BAC} = 38^\circ 45'$.
 - $\overline{AB} = 38, \overline{BC} = 42, \overline{AC} = 27$.
 [R. 1) ≈ 6584 ; 2) ≈ 13165 ; 3) ≈ 503]
- La Luna è vista dalla Terra sotto un angolo di circa $31'5''$. Sapendo che la distanza Terra-Luna è di circa 384000 km, calcolare il raggio della Luna. [R. ≈ 1736 km]
- Per misurare l'altezza CH di una torre rispetto al piano orizzontale passante per un dato punto A (Fig. 11), si sceglie (supponiamo che questo sia possibile) un altro punto B sullo stesso piano orizzontale e si effettuano, con appositi strumenti, alcune misurazioni. Posto che si trovi: $\overline{AB} = 40$ m, $\widehat{CAB} = 52^\circ 21'$, $\widehat{HBC} = 54^\circ 27'$, calcolare CH . [R. ≈ 703 m]

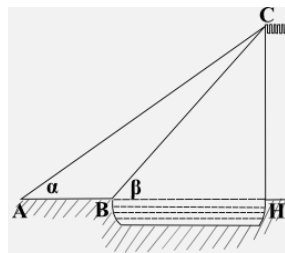


FIG. 11

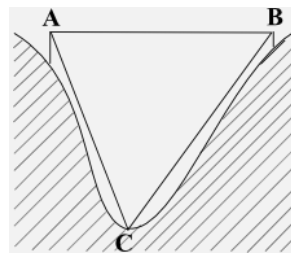


FIG. 12

- Si vuole costruire un ponte che colleghi due punti A, B (Fig. 12), dei quali è necessario conoscere la

³ I problemi (o gli esercizi) contrassegnati col simbolo \textcircled{R} sono risolti (totalmente o parzialmente) e la risoluzione è situata nella cartella "Integrazione 2", file "Matematica – Integrazione 2, unità 28-88", pubblicata in questo medesimo sito e scaricabile gratuitamente.

distanza. Questa non può essere misurata direttamente ma si possono effettuare altre misurazioni. In particolare supponiamo che si trovi: $\overline{CA}=460$ m, $\overline{CB}=470$ m, $\widehat{ACB}=49^{\circ}34'$. Calcolare AB.

10. Si vuole misurare la distanza dei punti A, B (Fig. 13) ma ciò non può essere fatto direttamente. Supponiamo che sia possibile scegliere due punti C, D in modo che A, B, C, D siano complanari e si possano misurare direttamente, con appositi strumenti, la distanza CD e gli angoli \widehat{ACB} , \widehat{BCD} , \widehat{CDA} , \widehat{ADB} . Si trovi: $\overline{CD} \approx 115$ m, $\widehat{ACB} \approx 57^{\circ}15'$, $\widehat{BCD} \approx 49^{\circ}27'$, $\widehat{CDA} \approx 45^{\circ}30'$, $\widehat{ADB} \approx 51^{\circ}23'$. Calcolare AB. [R. ≈ 185 m]

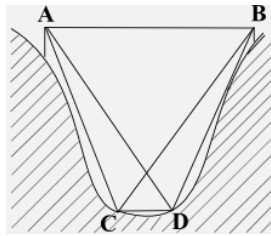


FIG. 13

11. È assegnato un pentagono regolare di lato lungo L. Recidendo opportunamente, in esso, cinque triangoli congruenti, si ottiene un decagono regolare: calcolarne la lunghezza del lato, dopo aver stabilito che $\sin 54^{\circ} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$. [R. $\frac{L}{5}\sqrt{5}$]

[Ispirato ad un quesito assegnato nell'esame di Stato 2006, indirizzo scientifico, sessione straordinaria]

12. ® Il signor Giorgio, proprietario terriero, intende regalare un orto all'amico Mario, matematico per hobby, ma a condizione che egli riesca a risolvere un problema. L'orto ha la forma di un triangolo rettangolo, la cui ipotenusa misura 30 m ed i cui cateti hanno misure espresse, sempre in metri, da numeri interi. Mario deve anzitutto calcolare le misure dei cateti e poi stabilire se sull'ipotenusa esiste un punto le cui distanze dai vertici del triangolo sono tutte espresse, sempre in metri, ancora da numeri interi e se ne esiste uno solo.

Mario ottiene l'orto in regalo. Come ha fatto a risolvere il problema?

[Problema ad alto coefficiente di difficoltà]

13. Dimostrare che fra gli elementi di un triangolo qualunque sussiste la seguente relazione:

$$\frac{a^2 - b^2}{c^2} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \gamma}.$$

[R. Si prendono le relazioni che esprimono il teorema del coseno relativamente agli angoli α e β . Si tengono presenti le formule di sottrazione del seno e il teorema dei seni e, dopo alcune semplificazioni, la relazione risulta dimostrata]

14. Le misure dei cateti AB e AC di un triangolo rettangolo, rispetto ad una stessa unità di misura, sono nell'ordine 6 e 8. La circonferenza avente centro in B e raggio BA e quella che ha centro in C e raggio CA intersecano l'ipotenusa BC del triangolo rispettivamente nei punti D ed E. Calcolare la misura del segmento DE e l'area della regione finita di piano delimitata dal segmento DE e dagli archi AD ed AE delle due circonferenze suddette.
15. Nel trapezio ABCD la base maggiore AB ed il lato obliquo BC sono lunghi rispettivamente a e $\frac{2}{3}a$. Si ha inoltre: $\cos \widehat{ABC} = 4/5$ e $\cos \widehat{DAB} = -3/5$. Dopo aver riferito il piano del trapezio ad un conveniente sistema di riferimento cartesiano monometrico, trovare le coordinate dei vertici del trapezio e rappresentarlo in tale piano.
16. I raggi del Sole, intercettando una torre, ne generano un'ombra lunga il doppio dell'altezza della tor-

re medesima. Indicata con x l'ampiezza dell'angolo che i raggi del Sole formano con il piano orizzontale passante per la torre, si ha:

$$[A] 0^\circ < x < 30^\circ; \quad [B] 30^\circ \leq x < 45^\circ; \quad [C] 45^\circ \leq x < 60^\circ; \quad [D] 60^\circ \leq x < 90^\circ.$$

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta.

17. Nel triangolo ABC l'angolo in B supera di 90° l'angolo in A ed il lato AC è $\frac{4}{3}$ del lato BC. Sapendo che il perimetro del triangolo è 84 cm, calcolare le misure dei suoi lati e la tangente dell'angolo \hat{C} .
[R. 30 cm, 40 cm, 14 cm; $\tan \hat{C} = 7/24$]

18. È data la circonferenza k di diametro BC di lunghezza 2 e centro O. Siano M il punto medio del raggio OB ed A il punto medio di una qualsiasi delle semicirconferenze in cui BC divide k . Si chiami D il punto in cui la bisettrice dell'angolo \widehat{OMA} interseca il raggio OA e siano E ed F i punti in cui k è intersecata dalla retta parallela a BC, condotta per D.

- 1) Calcolare il coseno di ciascuno degli angoli \widehat{OE} e \widehat{OF} .
- 2) Spiegare perché i segmenti AE e AF sono lati consecutivi di un pentagono regolare (il pentagono regolare inscritto nella circonferenza).

[NOTA BENE. Questo esercizio descrive di fatto una costruzione con riga e compasso del pentagono regolare inscritto in una circonferenza]

$$[R. 1) \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1); 2) \dots]$$

19. Da un punto P, esterno alla circonferenza K, si conducono due secanti a K. Una interseca K nei punti A e B ($PA < PB$), l'altra nei punti C e D ($PC < PD$). Si sa che i segmenti AB, AP, PC, AD misurano nell'ordine: 6 cm, 15 cm, 17 cm, $\frac{150}{17}$ cm.

- a) Calcolare il coseno dell'angolo \widehat{ABC} .
- b) Verificare che il triangolo ABC è rettangolo.
- c) Calcolare la misura della corda BD.

20. Un trapezio ABCD è inscritto in un cerchio di raggio 25 cm e ne contiene il centro O. Le sue basi AB e CD misurano rispettivamente 48 cm e 40 cm.

- a) Dimostrare che il trapezio è isoscele e calcolarne l'area.
- b) Calcolare il valore esatto del seno dell'angolo convesso \widehat{AOD} .

$$[R. a) 968 \text{ cm}^2; b) 4/5]$$

21. In una circonferenza di raggio 2 sono disegnate le due corde consecutive AB e BC, lunghe rispettivamente 2 e $\sqrt{6} - \sqrt{2}$. Calcolare la lunghezza della corda AC.
[R. $2\sqrt{2}$]

22. Nel triangolo ABC la differenza fra l'angolo di vertice A e quello di vertice B è 90° .

- a) Stabilire entro quali limiti può variare l'angolo in B.
- b) Sapendo che i lati AC e BC sono lunghi rispettivamente 3 m e 4 m, calcolare il perimetro e l'area del triangolo.

$$[R. a) 0^\circ < \hat{B} < 45^\circ; b) \frac{42}{5} \text{ m}, \frac{42}{25} \text{ m}.]$$

23. In una circonferenza sono disegnate tre corde parallele, lunghe rispettivamente 3, 4, 5. L'angolo al centro corrispondente alla corda più lunga è uguale alla somma degli angoli al centro corrispondenti alle altre due corde. Dimostrare che la corda più lunga è un diametro della circonferenza.

[R. Conviene disporre le corde in modo che l'una sia consecutiva all'altra: AB, BC, CD. Sennonché, siccome le loro lunghezze formano una terna pitagorica, la corda CD ... ed il punto D deve coincidere con il punto Di conseguenza ...]

24. Nel triangolo ABC i lati AB, BC, CA misurano nell'ordine 20 cm, 21 cm, 13 cm.

- a) Dimostrare che il triangolo è acutangolo e trovare la misura della sua altezza AH.
- b) Si prendano internamente al lato BC due punti M ed N in modo che sia $BM < BN$ ed inoltre l'angolo $\widehat{M\hat{A}C}$ sia uguale all'angolo $\widehat{A\hat{B}C}$ e l'angolo $\widehat{N\hat{A}B}$ sia uguale all'angolo $\widehat{B\hat{C}A}$.
Dopo aver dimostrato che gli angoli $\widehat{A\hat{M}N}$ e $\widehat{A\hat{N}M}$ sono entrambi uguali all'angolo $\widehat{B\hat{A}C}$, trovare le misure dei segmenti MN, BM e NC.
- c) Calcolare le misure, espresse in gradi sessagesimali e approssimate al secondo, degli angoli interni del triangolo ABN.

$$[\mathbf{R. a)} \dots, AH=12 \text{ cm; b)} \dots, MN=\frac{128}{21} \text{ cm, } \dots; \text{ c) } \dots]$$

25. Nel quadrilatero convesso ABCD gli angoli $\widehat{A\hat{B}C}$ e $\widehat{A\hat{D}C}$ sono entrambi retti. Inoltre i lati AB e AD misurano rispettivamente 6 cm e $(4\sqrt{3}+3)$ cm, mentre la diagonale AC misura 10 cm. Calcolare le ampiezze degli angoli $\widehat{B\hat{A}D}$ e $\widehat{B\hat{C}D}$. [R. $\widehat{B\hat{A}D}=60^\circ, \dots$]
26. Una cassa, avente la massa di 50 kg, è situata su un piano inclinato di 15° rispetto al piano orizzontale (Fig. 14). Il peso \vec{P} della cassa può essere scomposto secondo due direzioni, una parallela ed una perpendicolare al piano inclinato. Tenendo presente che alla seconda componente si oppone la cosiddetta reazione del vincolo che ne annulla l'effetto, affinché la cassa sia in equilibrio sul piano inclinato bisogna esercitare su di essa una forza \vec{F} . Determinare direzione modulo e verso di questa forza, ricordando che l'accelerazione di gravità g vale all'incirca $9,8 \text{ m/s}^2$. [R. $F \approx 126,8 \text{ N}, \dots$]

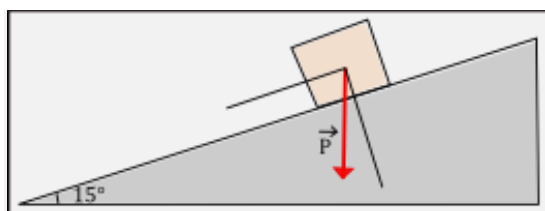


FIG. 14

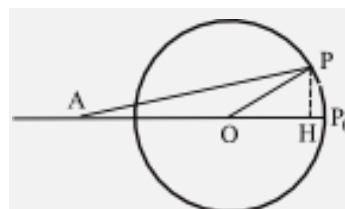


FIG. 15

27. **PROBLEMA RISOLTO.** Il punto P si muove in senso antiorario su una circonferenza di centro O e raggio $R = 18 \text{ cm}$ (Fig. 15) con velocità angolare ω uguale a $\pi/18$ radianti al secondo. Sia P_0 la sua posizione nell'istante iniziale $t=0$. Il punto P è collegato con due aste rigide al punto O ed al punto A e quest'ultimo punto è costretto a muoversi sulla retta OP_0 . Sapendo che l'asta AP è lunga $L = 41 \text{ cm}$, calcolare la posizione del suo estremo A nell'istante $t = 3$ secondi.

RISOLUZIONE. Indicato con α l'angolo $\widehat{P_0\hat{O}P}$, si sa che nel generico istante t è $\alpha = \omega t$, per cui nell'istante $t = 3$ secondi, si ha: $\alpha = \pi/6$. Partiamo da questo dato, incominciando ad osservare che si ha: $AO = AH - OH$. D'altro canto:

$$AH = AP \cos \widehat{H\hat{A}P} \quad \text{e} \quad OH = OP \cos \widehat{H\hat{O}P} = \frac{R}{2} \sqrt{3}.$$

Inoltre, in virtù del teorema dei seni applicato al triangolo AOP, dopo alcuni calcoli si trova:

$$\sin \widehat{H\hat{A}P} = \frac{R}{2L} \quad \text{e} \quad \text{pertanto:} \quad \cos \widehat{H\hat{A}P} = \frac{1}{2} \sqrt{4L^2 - R^2}.$$

In definitiva:

$$AO = \frac{1}{2} \sqrt{4L^2 - R^2} - \frac{R}{2} \sqrt{3} = 40 - 9\sqrt{3} \approx 24,4 \text{ (cm)}.$$

28. Il punto P si muove in senso antiorario su una circonferenza di centro O e raggio R (Fig. 15, riveduta e corretta) con velocità angolare ω uguale a $5\pi/24$ radianti al secondo. Sia P_0 la sua posizione nell'istante iniziale $t=0$. Il punto P è collegato con due aste rigide al punto O ed al punto A e

quest'ultimo punto è costretto a muoversi sulla retta OP_0 . Sapendo che l'asta AP è lunga $L = \frac{R}{2}\sqrt{13}$, calcolare in funzione di R la posizione del suo estremo A nell'istante $t = 4$ secondi. [R. $AO = \frac{3}{2}R\sqrt{3}$]

29. Nella figura sottostante (Fig. 16) sono rappresentati il quadrato $OABC$ di lato 2 e il quadrato $OPRQ$ di lato 1. L'angolo $R\hat{O}S$ ha ampiezza α compresa fra 0 e $\pi/2$.
- Esprimere in funzione di α le coordinate dei punti A, C, P, R .
 - Dimostrare analiticamente che la mediana OM del triangolo ORA è perpendicolare alla retta CP e che la mediana ON del triangolo OCP è perpendicolare alla retta RA .
 - Dimostrare infine che per nessun valore di α le due mediane suddette possono coincidere.

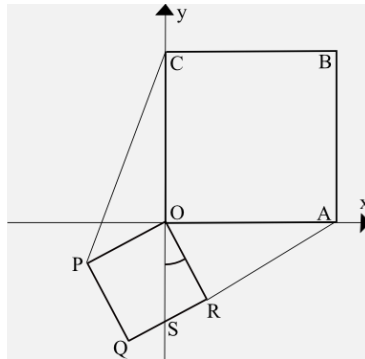


FIG. 16

30. Il quadrato $ABCD$, di centro O , ed il quadrato $OPQR$ sono disposti in modo che il lato OP ed il lato AB abbiano in comune il punto H interno al segmento AM , essendo M il punto medio di AB . Sapendo che $OP = 2AB$ e indicato con K il punto comune ai lati OR e BC , esprimere il rapporto fra l'area del quadrilatero $OMBK$ e quella del triangolo OHM in funzione della misura α dell'angolo $O\hat{H}M$. [R. $2 \tan \alpha - 1$, con $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$]
31. Le corde AB e CD di una circonferenza s'intersecano nel punto E , interno alla stessa circonferenza. È noto che il triangolo EAC ha perimetro doppio del triangolo EBD . È noto inoltre che:

$$\cos E\hat{A}C = \frac{4}{5}, \quad \cos C\hat{E}A = \frac{5}{13}, \quad \overline{EA} = 21a,$$

dove a è una lunghezza assegnata. Calcolare l'area del triangolo EBD e la lunghezza del diametro della circonferenza. [R. $31,5 a^2, \frac{5}{6}a\sqrt{1105}$]

32. Su un triangolo si hanno le seguenti informazioni:
- le misure dei suoi lati, espresse in metri, sono numeri interi consecutivi;
 - il suo angolo maggiore è ampio il doppio del minore.
- Calcolare il perimetro e l'area del triangolo. Calcolare inoltre le ampiezze dei suoi angoli, espresse in gradi sessagesimali ed approssimate ad un primo.
- [R. Indicata con x la misura del lato intermedio, ... In virtù del teorema dei seni relativo agli angoli maggiore e minore ... In virtù del teorema del coseno relativo all'angolo minore ... Si ottengono due espressioni del coseno dell'angolo minore, per cui ... $P = 15$ m, $A = \frac{15\sqrt{7}}{4} m^2$; $\approx 41^\circ 24'$, ...]
33. Nel triangolo ABC , indicati con α, β, γ gli angoli di vertici A, B, C rispettivamente, sia $\alpha > \beta > \gamma$. Indicato con D il piede dell'altezza condotta per A , siano E ed F le proiezioni ortogonali di D rispettivamente su AB e AC e siano G ed H le proiezioni ortogonali rispettivamente di E ed F su BC .

a) Dimostrare che, a seconda che l'angolo in A sia retto, acuto o ottuso, si ha rispettivamente:
 $\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ oppure $\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma < 1$ oppure $\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma > 1$.

b) Sulla base del precedente risultato, dimostrare che si ha:

$$AD=EG+FH \text{ oppure } AD>EG+FH \text{ oppure } AD<EG+FH$$

a seconda che l'angolo in A rispettivamente sia retto, acuto o ottuso

[R. a) Dapprima di fa vedere che: $\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \dots = 1 + \cos(\beta + \gamma) \cos(\beta - \gamma)$, per cui ...;

b) Si ha: $EG = AD \cos^2 \beta$ e $FH = \dots$, per cui ...]

34. Nel triangolo ABC gli angoli in A e in B sono ampi rispettivamente α e 2α , mentre il lato AB è lungo L. Detto P un punto del lato AB, siano PH e PK le sue distanze dai lati AC e BC rispettivamente.

a) Trovare per quali valori di α il triangolo esiste.

b) Determinare la posizione di P per la quale HK è parallela ad AB.

[R. a) ... ; b) Convienne calcolare le distanze uguali, HM e KN, dei punti H e K dal lato AB in funzione di $x=AP$. A conti fatti, si trova: $AP = \frac{2L \cos 2\alpha}{1+2 \cos 2\alpha}$]

35. Sia il triangolo equilatero ABC e siano AD, BE, CF tre segmenti uguali (Fig. 17). Il triangolo è diviso in 7 parti dai segmenti AE, BF e CD. Di esse, il triangolo ADP e il quadrilatero BQPD misurano rispettivamente 3 m^2 e 15 m^2 .

a) Dimostrare che i triangoli ADP, BEQ e CFR sono uguali.

b) Dimostrare che i quadrilateri BQPD, CRQE e APRF sono uguali.

c) Dimostrare che i triangoli ADP e ABE sono simili.

d) Dopo aver dimostrato che il triangolo PQR è equilatero, calcolarne l'area.

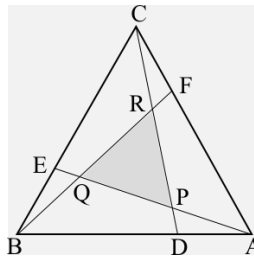


FIG. 17

[R. ... ; d) Posto $\overline{AB} = a$ e $\overline{AD} = b$, dopo alcune considerazioni si trova:

$$\overline{AE}^2 = a^2 + b^2 - ab, \quad \overline{BQ} = \frac{ab}{\overline{AE}}, \quad \overline{EQ} = \frac{b^2}{\overline{AE}}, \quad \overline{PQ} = \frac{a(a-b)}{\overline{AE}}.$$

Indicata con A' l'area del triangolo PQR e con A' quella del triangolo ABC, si ha:

$$\frac{A'}{A} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{PQ}^2} \text{ da cui: } \frac{A'}{A} = \frac{a^2 + b^2 - ab}{(a-2b)^2}.$$

$$\text{Siccome } \frac{\text{Area}(\text{ABE})}{\text{Area}(\text{ADP})} = \frac{\overline{AE}^2}{\overline{AD}^2}, \text{ allora: } \frac{21}{3} = \frac{a^2 + b^2 - ab}{b^2}, \text{ da cui: } a = 3b.$$

$$\text{Quindi: } \frac{A'}{A} = 7. \text{ D'altro canto: } A' = A + 54. \text{ Di conseguenza: } A = 9 \text{ m}^2 \text{]}$$

36. Dimostrare che, se m_a , m_b , m_c sono le mediane del triangolo ABC, uscenti dai vertici A, B, C rispettivamente, seguendo le solite notazioni, si hanno le seguenti formule:

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}, \quad m_b = \frac{1}{2} \sqrt{2c^2 + 2a^2 - b^2}, \quad m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}.$$

[R. Chiamato M il punto medio del lato BC, sia φ l'angolo \widehat{AMC} . Si ha:

$$b^2 = m_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - a m_a \cos \varphi \quad \text{e} \quad c^2 = m_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a m_a \cos \varphi.$$

Da qui segue facilmente la prima tre delle formule. Per le altre ...]

37. Il lato BC del triangolo equilatero ABC è diviso dai punti D ed E in tre parti uguali. Calcolare le ampiezze (esprese in gradi sessagesimali ed approssimate al minuto primo) dei tre angoli in cui i segmenti AD ed AE dividono l'angolo \widehat{BAC} . [R. $19^\circ 6'$, $21^\circ 47'$, ...]
38. ABC è un triangolo di area 80 cm^2 , nel quale il coseno dell'angolo in A è $3/5$. Sia D il punto interno al lato AB tale che $\widehat{ACD} = \widehat{CBA}$. Sapendo che l'area del triangolo ADC è 20 cm^2 , dimostrare che il triangolo ABC è ottusangolo.
39. I lati AB e AC del triangolo ABC sono lunghi rispettivamente $75a$ e $60a$, dove a è una lunghezza assegnata. Preso, internamente al lato AB il punto D tale che le aree dei triangoli ACD e BCD siano rispettivamente $1536 a^2$ e $864 a^2$ stabilire se il triangolo ABC è acutangolo, rettangolo o ottusangolo e calcolare le misure delle sue altezze.
40. L'area del triangolo ABC è $84 a^2$ ed i suoi lati AB e AC sono lunghi rispettivamente $21a$ e $10a$, dove a è una lunghezza assegnata. Preso, internamente al lato AB, il punto D tale che l'area del triangolo ACD sia doppia di quella del triangolo BCD, calcolare i coseni degli angoli interni del triangolo ABC. [R. $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \beta = \frac{15}{17}$, $\cos \gamma = -\frac{13}{85}$]
41. I due segmenti AM e BN si secano nel punto H in modo che sia $AH=2 HM$ e $BH=2 HN$.
- Si può affermare che il quadrilatero ABMN è un trapezio?
 - Dimostrare che esiste un triangolo ABC del quale AM e BN sono le mediane.
 - Posto che i segmenti AM e BN misurino rispettivamente 15 cm e 12 cm e che il coseno dell'angolo \widehat{AHB} è $-\frac{7}{16}$, trovare il perimetro del triangolo ABC. [R. a) ...; b) ...; c) $\left(\frac{27}{2} + 6\sqrt{6} + 3\sqrt{26}\right) \text{ cm}$]
42. La maestra consegna a Pierino un cartoncino bianco a forma di trapezio isoscele. Vi è tracciata una corda parallela alle basi del trapezio, alla distanza di 8 cm dalla base maggiore. La maestra incarica Pierino di colorare in rosso la regione del cartoncino compresa tra la corda e la base maggiore. Senonché Pierino, dispettoso com'è, sposta la corda verso la base maggiore mantenendola parallela a se stessa. In questo modo colorerà una regione che è esattamente la metà di quella che avrebbe dovuto colorare. Sapendo che la base minore, la base maggiore e l'altezza del cartoncino misurano rispettivamente: 10 cm , 16 cm e 12 cm , calcolare:
- le misure degli angoli del trapezio approssimate ad $1''$;
 - a quale distanza dalla base maggiore, approssimata ad 1 mm , è situata la nuova corda. [R. a) $75^\circ 57' 49''$, ... ; b) $3,7 \text{ cm}$]
43. È dato un quadrato di lato lungo L . Sui suoi lati ed esternamente ad esso si costruiscono dei triangoli equilateri e si congiungono i loro vertici non appartenenti al quadrato: si ottiene in tal modo un quadrilatero. Calcolarne l'area. [R. $L^2(2 + \sqrt{2})$]
44. È dato un triangolo equilatero di lato lungo L . Sui suoi lati ed esternamente ad esso si costruiscono dei quadrati e si congiungono i loro vertici non appartenenti al triangolo: si ottiene in tal modo un esagono (Fig. 18). Calcolarne l'area. [R. $L^2(3 + \sqrt{3})$]

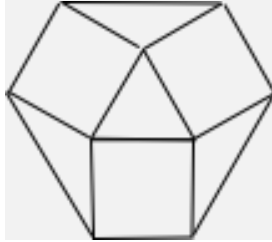


FIG. 18

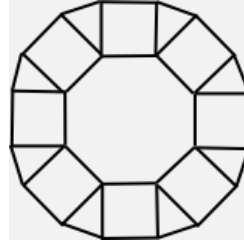


FIG. 19

45. È dato un ottagono regolare di lato lungo L . Sui suoi lati ed esternamente ad esso si costruiscono dei quadrati e si congiungono i loro vertici non appartenenti all'ottagono: si ottiene in tal modo un poligono di 16 lati (Fig. 19). Calcolarne l'area. [R. $10 L^2(1 + \sqrt{2})$]
46. Si consideri la forma stilizzata della base maggiore di un pandoro: è una stella a otto punte. I suoi vertici esterni sono situati su una circonferenza di raggio R , ad uguale distanza l'uno dall'altro, mentre i vertici interni sono situati, sempre ad uguale distanza l'uno dall'altro, su una circonferenza di raggio r , concentrica alla prima (Fig. 20). Calcolare l'area della stella. [R. $4 R r \sqrt{2 - \sqrt{2}}$]

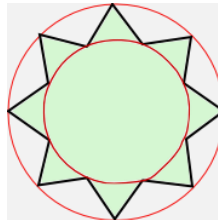


FIG. 20

47. ® È dato il triangolo ABC, rettangolo in A. Indicato con M il punto medio del cateto AB, si traccino la corda MD parallela alla mediana del triangolo condotta per B e la corda ME parallela alla mediana condotta per A.
- 1) Dimostrare che il quadrilatero CDME non è inscrittibile né circoscrittibile ad un cerchio.
 - 2) Ammesso che l'angolo \widehat{ACB} misuri 60° , calcolare le misure degli angoli \widehat{MDC} e \widehat{DME} , espresse in gradi sessagesimali e approssimate ad 1 secondo.
- [Problema ad alto coefficiente di difficoltà]
48. È dato il triangolo ABC, rettangolo in A. Costruire, esternamente ad esso, il quadrato ABDE sul cateto AB, il quadrato AFGC sul cateto AC e il quadrato BCHL sull'ipotenusa BC.
- a) Dimostrare quindi che i triangoli AEF, BLD e CGH sono equivalenti al triangolo ABC.
 - b) Posto che i cateti AB e AC misurino rispettivamente 3 cm e 4 cm, calcolare l'area e il perimetro dell'esagono DEFGHL. [R. a) ... ; b) $74 \text{ cm}^2, (17+2\sqrt{13}+\sqrt{73}) \text{ cm}$]
49. Nel triangolo ABC si ha: $AB = 7 \text{ cm}$, $AC = 6 \text{ cm}$, $\cos \widehat{BAC} = \frac{2}{7}\sqrt{6}$.
- a) Calcolare la misura del raggio della circonferenza k inscritta nel triangolo.
 - b) Chiamato D il punto del lato AB tale che $AD = 2 \text{ cm}$, determinare sul lato AC il punto E in modo che la corda DE del triangolo sia tangente alla circonferenza k . [R. a) $r = \frac{5}{3} \text{ cm}$, b) $CE = \frac{5}{2} \text{ cm}$]
50. Quattro città – A, B, C, D – sono situate nei vertici di un trapezio isoscele. La somma delle distanze x tra le città A e B e y tra le città B e C vale 55 km, la somma delle distanze y già precisata, z tra le città A e D e t tra le città C e D vale 110 km, quella delle distanze x e t vale 90 m. Il perimetro del

trapezio è infine 140 km.

- Calcolare le distanze tra le città A e C e fra le città B e D.
- Dimostrare che la somma S delle distanze di un punto appartenente alla base maggiore del trapezio dai suoi lati obliqui è invariante al variare del punto.
- Dimostrare che ogni altro punto interno al trapezio o appartenente al suo contorno ha, dai lati obliqui del trapezio, distanze la cui somma è minore di S.

51. Con riferimento alla figura sottostante (Fig. 21), il segmento AB, lungo $3L$, dove L è una lunghezza assegnata, è diviso in tre parti uguali dai punti C, D. Il quadrilatero ACEF è un parallelogramma, in cui l'angolo acuto di vertice A misura α e il lato AF è lungo $\frac{5}{2}L$. Il quadrilatero DBGH è simmetrico di ACEF rispetto alla retta r , perpendicolare al segmento AB nel suo punto medio.

- Trovare per quali valori di α l'intersezione dei due parallelogrammi suddetti non è vuota.
- Trovare, in particolare per quali valori di α tale intersezione è un quadrilatero PQRS.
- Quando questo quadrilatero esiste, calcolarne l'area in funzione di α .
- Esiste un valore di α per il quale il quadrilatero PQRS è un quadrato: trovare questo valore e calcolare il perimetro del quadrato.

$$\left[\text{R. a) } 0 < \alpha \leq \alpha_1, \text{ con } \alpha_1 \approx 78^\circ 27' 47''; \text{ b) } 0 < \alpha \leq \alpha_2, \text{ con } \alpha_2 \approx 53^\circ 7' 47''; \text{ c) } \frac{a^2}{2} \tan \alpha; \text{ d) } 2a\sqrt{2} \right]$$

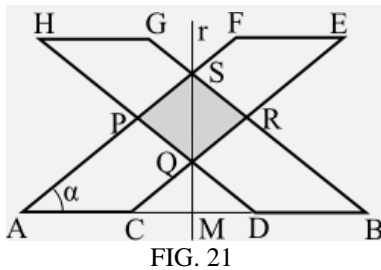


FIG. 21

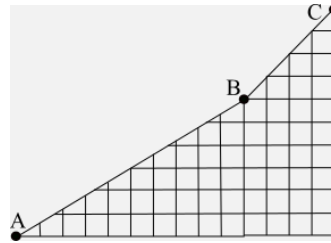


FIG. 22

52. Con riferimento alla figura 22: a) è corretto affermare che la pendenza media del tratto ABC è la stessa di quella del tratto AC se si potesse andare direttamente da A a C in linea retta? b) è corretto affermare che tale pendenza media è la media aritmetica delle pendenze dei tratti AB e BC?
53. Ancora con riferimento alla figura 22: qual è la pendenza media del tratto ABC?

[A] $\approx 80,0\%$. [B] $\approx 71,4\%$. [C] $\approx 114,2\%$. [D] un valore diverso dai precedenti.

Una sola alternativa è corretta. Individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

54. La base maggiore AB, la base minore DC e l'altezza AD del trapezio rettangolo ABCD misurano rispettivamente: 20 m, 5 m e 6 m.
- Determinare un punto P interno al trapezio in modo che i triangoli PAB e PCD siano entrambi rettangoli in P.
 - Calcolare il coseno di ciascuno degli angoli \widehat{APD} e \widehat{BPC} .

$$\left[\text{a) Se H è la proiezione di P su AB: } AH = \frac{36}{41}, HP = \frac{168}{41}; \text{ b) } \cos \widehat{APD} = -\frac{4}{5}, \dots \right]$$

55. Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnati i punti A(1, 3) e B(5, -5).
- Determinare le coordinate di un punto C equidistante dai punti O, A, B.
 - Calcolare il coseno di ciascuno degli angoli convessi \widehat{OCA} , \widehat{OCB} , \widehat{ACB} .
56. Considerata una circonferenza di raggio r, siano P_n e p_n i perimetri dei poligoni regolari di n lati rispettivamente circoscritto e inscritto nella circonferenza. Dimostrare che:

- a) $P_n = 2nr \tan \frac{180^\circ}{n}$, $p_n = 2nr \sin \frac{180^\circ}{n}$;
 b) P_{2n} è uguale alla media armonica di P_n e p_n ;
 c) p_n è uguale alla media geometrica di P_{2n} e p_n .

57. Nel triangolo ABC si ha:

$$\cos \hat{A} = \frac{16}{65}, AB > AC, \frac{AB+AC}{BC} = \frac{11}{7}.$$

- a) Calcolare il rapporto fra il lato AB e il lato BC.
 b) Ammesso che il perimetro del triangolo misuri 108 cm, calcolare le misure dei lati.
 c) Calcolare infine l'altezza del triangolo uscente da A.

[N.B.: Il problema è ispirato alla proposizione 45 dell'opera *Dati* di Euclide]

$$\left[\text{R. a) } \frac{AB}{BC} = \frac{20}{21}; \text{ b) } 42 \text{ cm, } 40 \text{ cm, } 26 \text{ cm; c) } 12 \text{ cm} \right]$$

58. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnati i punti fissi A(0,4) e C(-4,0) e i punti variabili P(a,b) e R(b,-a), dove a, b sono parametri reali positivi.

- A) Trovare le coordinate del punto B, vertice del parallelogramma OABC, e quelle del punto Q, vertice del parallelogramma OPQR.
 B) Verificare che i due parallelogrammi sono in realtà dei quadrati.
- A) Trovare le equazioni delle rette AP e CR.
 B) Verificare che la retta per O, perpendicolare alla retta AP, interseca la retta CR nel punto medio del segmento CR.
- A) Stabilire se esistono valori del numero reale positivo k, per i quali il quadrato OPQR e il triangolo OAP abbiano la stessa area k.
 B) Nel caso particolare in cui sia k=2, calcolare le ampiezze degli angoli interni del triangolo OAP, espresse in gradi sessagesimali e approssimate ad 1''.

[R. ... ; 3A) $0 < k < 4$, ...]

59. È assegnata una semicirconferenza di diametro AB, lungo 2r. Si prendano su di essa i due punti C e D in modo che gli angoli \hat{BAC} e \hat{CAD} abbiano lo stesso coseno, uguale a 4/5.

- a) Trovare il coseno dell'angolo \hat{ACD} .
 b) Calcolare il perimetro del quadrilatero ABCD:

$$\left[\text{R. a) } \frac{24}{25}; \text{ b) } \frac{14}{25}r \right]$$

60. Il pentagono ABCDE è circoscritto ad un cerchio di centro O. I lati AE e BC sono perpendicolari al lato AB e inoltre gli angoli \hat{AOE} e \hat{DOE} misurano entrambi 75° . a) Trovare le misure degli angoli interni del pentagono. b) Trovare il raggio del cerchio sapendo che il perimetro del pentagono è $2a(5\sqrt{3}-2)$, dove a è una lunghezza assegnata.

[R. a) ... ; b) $a\sqrt{3}$]

61. Il trapezio ABCD, di basi AB e CD, è circoscritto ad un cerchio di raggio unitario e centro O. Sapendo che:

$$\cos \hat{OAB} = \frac{3}{5} \text{ e } \cos \hat{COD} = \frac{5}{13},$$

calcolare le lunghezze dei lati del trapezio e verificare che risulta: $AB+CD=AD+BC$.

$$\left[\text{R. Calcoli noiosi ma non concettualmente complicati. } AB = \frac{75}{16}, CD = \frac{100}{63}, AD = \frac{25}{12}, BC = \frac{4225}{1008} \right]$$

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

DOMANDE

- È dato un triangolo rettangolo isoscele. È vero che la misura di ciascuno dei cateti, rispetto all'ipotenusa assunta come unità di misura dei segmenti, è $\frac{\sqrt{2}}{2}$?
- È dato un triangolo rettangolo avente un angolo di 30° . È vero che le misure dei cateti, rispetto all'ipotenusa assunta come unità di misura dei segmenti, sono $\frac{1}{2}$ e $\frac{\sqrt{2}}{2}$?
- Un cateto di un triangolo rettangolo è lungo 12, mentre il coseno dell'angolo opposto ad esso è $3/5$. Quant'è lungo l'altro cateto?
- I punti A e B si trovano su uno stesso piano orizzontale ω ma da parti opposte rispetto ad una montagna. Indicata con C la vetta della montagna, con appositi strumenti è possibile calcolare l'ampiezza α dell'angolo \widehat{CAB} e l'ampiezza β dell'angolo \widehat{CBA} ed inoltre l'altezza h della vetta C rispetto al piano ω . Trovare un'espressione della distanza AB per mezzo di α , β , h.
- Un lato di un triangolo equilatero è diviso in tre parti uguali. I segmenti che congiungono i punti di divisione con il vertice dell'angolo opposto dividono quest'angolo in tre parti uguali. È esatto?
- Un tratto di strada è formato da due tronconi: il primo, di 5 km, ha una pendenza media dell'8%; il secondo, di 7 km, ha una pendenza media dell'11%. Qual è la pendenza media dell'intero tratto di strada?

[A] 9,50%. [B] 9,75%. [C] 10,00%. [D] 10,25%.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

- È vero che l'area A di un quadrilatero convesso, le cui diagonali sono lunghe d e d' e l'angolo acuto da esse formato misura φ , è data dalla formula: $A = \frac{1}{2} d d' \sin \varphi$?
- Indicati con a ed α rispettivamente un lato e l'angolo opposto di un triangolo, il raggio R del cerchio ad esso circoscritto è tale che: $a = 2R \sin \alpha$. È vero o è falso?
- In una circonferenza di centro O e raggio 3 sono assegnate due corde consecutive AB e BC, lunghe rispettivamente 1 e 2. Stabilire se il triangolo AOC è acutangolo, rettangolo o ottusangolo, possibilmente senza utilizzare strumenti di calcolo automatico per calcolare le ampiezze degli angoli.

RISPOSTE.

- Sì.
- No. La misura del cateto minore (quello opposto all'angolo di 30°) è effettivamente $1/2$, ma quella del maggiore è $\sqrt{3}/2$.
- Indicati con b il cateto noto e con β l'angolo ad esso opposto, l'altro cateto c è tale che:

$$c = \frac{b}{\tan \beta}.$$

D'altronde: $\tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{4/5}{3/5} = \frac{4}{3}$, per cui: $c = 9$.

- Il procedimento, caso particolare del cosiddetto *metodo della triangolazione*, porta al seguente risultato:

$$\text{dist}(A, B) = h \left(\frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan \beta} \right).$$

5. No, è sbagliato. Si veda al riguardo l'es. n. 35.
6. Si trova facilmente che [B] è l'alternativa corretta.
7. Sì.
8. È vero.
9. Il triangolo AOC è isoscele sulla base AC, ragion per cui la sua natura è determinata da quella dell'angolo \widehat{AOC} . Per stabilire la natura di quest'angolo conviene calcolarne il coseno. Ora, una volta indicati con α e β rispettivamente gli angoli \widehat{AOB} e \widehat{BOC} , in virtù del teorema del coseno, applicato prima al triangolo AOB e poi al triangolo BOC, si trova:

$$\cos \alpha = \frac{17}{18}, \quad \cos \beta = \frac{7}{9}.$$

$$\text{Da cui segue: } \sin \alpha = \frac{\sqrt{35}}{18}, \quad \sin \beta = \frac{4\sqrt{2}}{9}.$$

$$\text{Pertanto: } \cos \widehat{AOC} = \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{17}{18} \cdot \frac{7}{9} - \frac{\sqrt{35}}{18} \cdot \frac{4\sqrt{2}}{9} > 0.$$

Se ne desume che l'angolo \widehat{AOC} è acuto e, di conseguenza, il triangolo AOC è acutangolo.

LETTURA

Dov'è l'errore ?

Consideriamo un triangolo ABC, ottusangolo in C, e sia D il punto del lato AB tale che $\widehat{ACD} = \widehat{CBA}$ (Fig. 23). Ci proponiamo di dimostrare che $AD = AB$. Il che è evidentemente assurdo e pertanto ci deve essere un errore da qualche parte nella dimostrazione. Invitiamo chi legge a trovarlo.

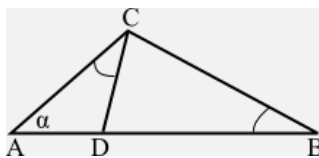


FIG. 23

Dalla similitudine dei triangoli ABC e ADC segue:

$$\frac{\text{Area}(ABC)}{\text{Area}(ADC)} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{DC}^2} \quad \text{e} \quad \frac{\text{Area}(ABC)}{\text{Area}(ADC)} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}; \quad \text{pertanto: } \frac{\overline{BC}^2}{\overline{DC}^2} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}, \quad \text{o anche: } \frac{\overline{BC}^2}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DC}^2}{\overline{AD}}.$$

D'altro canto:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cos \alpha \quad \text{e} \quad \overline{DC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \overline{AD} \cdot \overline{AC} \cos \alpha.$$

Di conseguenza, sostituendo nell'ultima delle precedenti uguaglianze, si ottiene:

$$\frac{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cos \alpha}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AD}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \overline{AD} \cdot \overline{AC} \cos \alpha}{\overline{AD}}$$

$$\text{e da qui: } \overline{AB} + \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}} = \overline{AD} + \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AD}} \quad \text{ossia: } \overline{AB} - \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AD}} = \overline{AD} - \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}} \quad \text{o anche: } \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AD} - \overline{AC}^2}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AD} - \overline{AC}^2}{\overline{AB}}.$$

Ora, nell'ultima relazione, si constata che i numeratori delle due frazioni uguali sono uguali, per cui anche i denominatori devono esserlo. Vale a dire: $AD = AB$!?!