Prerequisiti:
- Conoscere le proprietà elementari della circonferenza, del cerchio e delle loro parti.
- Possedere sufficiente abilità nel calcolo algebrico.

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:

- *calcolare la lunghezza di una circonferenza e l'area di un cerchio*
- *definire il numero* π
- *descrivere un algoritmo idoneo a calcolare un valore approssimato di* π *almeno fino al 4° decimale*
- *risolvere problemi sulle misure della circonferenza, del cerchio e delle loro parti*

L'unità è indirizzata agli studenti del 2° biennio di tutte le scuole superiori.

Misure di circonferenza e cerchio. Il numero π

Unità 38

38.1 MISURE DELLA CIRCONFERENZA E DEL CERCHIO

38.1.1 La determinazione della misura di una superficie a contorno rettilineo (poligono) è un problema relativamente semplice dal momento che la superficie può essere ripartita in un numero conveniente di triangoli. Il problema, al contrario, presenta molte difficoltà quando il contorno è curvilineo o mistilineo (cioè in parte curvilineo e in parte rettilineo).

La prima superficie a contorno curvilineo che vide impegnati gli studiosi nel calcolo della sua area fu il cerchio. Tentativi più o meno interessanti al riguardo risalgono a circa 2000 anni prima di Cristo e furono fatti sia dai Babilonesi sia dagli Egizi. Successivamente, a partire dal V secolo a.C., anche dai Greci. Si ricordano in proposito i tentativi, peraltro non riusciti, di Ippocrate di Chio (circa 430 a.C.).
Il primo risultato veramente rigoroso sulla misurazione del cerchio fu ottenuto dallo scienziato siracusano **Archimede** (287 ca. – 212 a.C.).

Come quella di una superficie a contorno curvilineo anche la misura del contorno medesimo presenta problemi non indifferenti.
In questa unità ci occupiamo per l'appunto delle misure del cerchio e del suo contorno, la circonferenza, ed inoltre delle loro parti.

38.1.2 I problemi riguardanti la determinazione della lunghezza C della circonferenza ("**rettificazione della circonferenza**") e dell'area A del cerchio ("**quadratura del cerchio**") sono strettamente collegati, nel senso che esiste una formula che lega l'area del cerchio alla lunghezza della sua circonferenza, per cui, se si sa risolvere uno dei due problemi, si sa risolvere l'altro. Di questa formula si potrebbe dare una dimostrazione rigorosa, ma il discorso da farsi sarebbe troppo lungo e complicato. Preferiamo una *spiegazione intuitiva*, che risale allo scienziato tedesco **Johann Kepler** (1571-1630), il quale la propose nell'opera *Nova Stereometria Doliorum vinariorum* (1615).
Considerata, allora, una circonferenza k di centro O e raggio r (Fig. 1) suddividiamola in n archi di lunghezza uguale L, per cui $C=nL$. Il cerchio limitato da k risulta così suddiviso in n settori circolari di uguale area S, per cui A=nS.

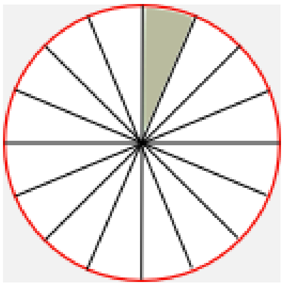

FIG. 1

Quando il numero n tende a diventare "infinitamente grande", ciascuno dei suddetti archi tende a diventare "infinitamente piccolo", così piccolo che si può confondere con un segmento di retta. In questo modo ognuno dei settori circolari si può assimilare ad un triangolo, avente per base uno di tali archi e per altezza il raggio del cerchio, ragion per cui $S=\frac{1}{2}Lr$. Risulta allora: $A=n\cdot\frac{1}{2}Lr$. E poiché $nL=C$, si ha:

$$\mathbf{A=\frac{1}{2}C\,r}\,.$$

È questa la formula che cercavamo [1] ed evidenzia un fatto notevole:

Ogni cerchio è equivalente ad un triangolo avente
per base la circonferenza "rettificata" e per altezza il raggio.

Essa ci dice inoltre che se è nota la lunghezza della circonferenza è nota pure l'area del cerchio, e viceversa.
Dalla precedente uguaglianza, dividendo entrambi i membri per r^2, si ottiene poi quest'altra:

$$\frac{A}{r^2}=\frac{C}{2r}\,.$$

Questa relazione, a sua volta, racconta un fatto importante: il rapporto fra l'area di un cerchio ed il quadrato del suo raggio ed il rapporto fra la lunghezza della relativa circonferenza ed il diametro sono uguali e tale rapporto non dipende dal cerchio che si considera, ma è invariante al variare del cerchio. Questo rapporto comune si indica con la lettera "pi greco":

$$\boldsymbol{\pi}.$$

Si hanno perciò le due seguenti formule:

$$\mathbf{A=\pi\,r^2},\quad \mathbf{C=2\,\pi\,r},$$

che risolvono, nell'ordine, il problema della *quadratura del cerchio* e quello della *rettificazione della circonferenza*.

Bisogna sapere che, a partire dall'epoca degli antichi Greci e fino all'Ottocento, il problema della **quadratura del cerchio** (letteralmente: *costruzione di un quadrato equivalente al cerchio*) si tentò di risolverlo con l'uso dei soli strumenti riga e compasso. Tutti i tentativi fallirono perché di fatto tale costruzione era impossibile. Ma ciò fu scoperto, per l'appunto, solo nell'Ottocento.

Ci piace riportare un passo tratto dal *Paradiso* di Dante Alighieri (Canto XXXIII, 133-136), nel quale si fa riferimento al problema della quadratura del cerchio:

Qual è 'l geomètra che tutto s'affigge
per misurar lo cerchio, e non ritrova,
pensando, quel principio ond'elli indige,
tal era io a quella vista nova.

[Come appare il geometra che si concentra per trovare la quadratura del cerchio e si arrovella per scoprire il principio che gli serve per la risoluzione, così ero io davanti a quella nuova visione]

Altri problemi che ugualmente si cercò di risolvere con l'ausilio dei soli strumenti riga e compasso, ma inutilmente perché la costruzione era impossibile, erano: la **trisezione dell'angolo** (*divisione di un angolo qualsiasi in tre parti uguali*), la **duplicazione del cubo** (*costruzione dello spigolo di un cubo di volume doppio di un cubo di spigolo dato*) e la **ciclotomia** (*suddivisone della circonferenza in un numero qualsiasi di parti uguali*). Anche di questi problemi si scoprì l'impossibilità di risolverli (con l'uso

[1] Lo ripetiamo a scanso di equivoci: il procedimento seguito non è una vera dimostrazione, che tuttavia potrebbe essere fornita, ma per altra via.

esclusivo di riga e compasso) solo nell'Ottocento, precisamente dopo che fu completato lo studio delle equazioni algebriche.
Tutti questi problemi passarono alla storia come i **problemi classici dell'antichità**.

38.2 IL NUMERO π

38.2.1 Tutto quello che abbiamo detto sopra riguardo alle formule per calcolare l'area di un cerchio e la lunghezza di una circonferenza ha senso se si conosce il valore della costante π. Il che, per la verità, non è semplice né immediato. Possiamo dire, ad esempio, che:

π è uguale all'area di un cerchio di raggio 1

oppure che:

π è uguale alla lunghezza di una circonferenza di diametro 1

ma questo non spiega ancora quanto vale questo numero.
In realtà, il numero π è un numero irrazionale, vale a dire un allineamento decimale illimitato non periodico, del quale perciò non si può ottenere che un valore approssimato.
A titolo di curiosità lo scriviamo fino alle prime 24 cifre decimali esatte:

π = 3, 141 592 653 589 793 238 462 643 ... .

Non intendiamo spiegare come si sia giunti a tutte queste cifre. Crediamo, tuttavia, che possa risultare istruttivo soffermarsi sulla determinazione delle prime di esse.
Diciamo subito che andiamo a trovare tali cifre approssimando la circonferenza ad un poligono regolare di un numero sufficientemente grande di lati. Per ottenere lo scopo dimostriamo anzitutto il seguente teorema.

♦ TEOREMA. Se K_n è il rapporto tra il lato del poligono regolare di n lati ed il raggio della circonferenza circoscritta, allora il rapporto K_{2n}, tra il lato del poligono regolare di 2n lati e lo stesso raggio, è:

[1] $$K_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - K_n^2}}\,.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia AB è il lato del poligono regolare di n lati inscritto nella circonferenza di raggio r e di centro O (Fig. 2).

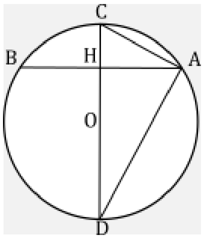

FIG. 2

Il diametro perpendicolare ad AB individua il punto C tale che AC è il lato del poligono regolare di 2n lati inscritto nella stessa circonferenza. Ora, per il 1° teorema di Euclide applicato al triangolo rettangolo CAD, si ha: $\overline{AC}=\sqrt{\overline{CD}\cdot\overline{CH}}$, dove H è ovviamente la proiezione di A su CD. D'altronde:

$$\overline{CD} = 2r \;\text{ e }\; \overline{CH} = \overline{CO} - \overline{OH} = r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2}\,.$$

Dunque:

$$\overline{AC} = \sqrt{2r\left(r - \sqrt{r^2 - \frac{\overline{AB}^2}{4}}\right)} = r\sqrt{2 - \sqrt{4 - \left(\frac{\overline{AB}}{r}\right)^2}}.$$

Vale a dire:

$$\frac{\overline{AC}}{r} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - \left(\frac{\overline{AB}}{r}\right)^2}}.$$

Siccome $\frac{\overline{AB}}{r}=K_n$ e $\frac{\overline{AC}}{r}=K_{2n}$, dalla precedente relazione segue la [1].

38.2.2 Considerare come poligono di partenza l'esagono regolare (n=6) significa attribuire il valore 1 a K_n. Ricordiamo, infatti, che il lato di questo poligono è lungo quanto il raggio del cerchio circoscritto. A questo punto dalla formula [1] si calcola K_{2n}, cioè il rapporto relativo al dodecagono regolare (12 lati). Questo nuovo valore si sostituisce nella [1] al posto di K_n ed il nuovo valore di K_{2n} che così si ottiene è quello relativo al poligono di 24 lati. Continuando allo stesso modo, con varie iterazioni, si ottiene il rapporto $K_n=\frac{L_n}{r}$, tra il lato del poligono regolare di n lati ed il raggio del cerchio circoscritto, per n=48, 96, 192, 384, … . Moltiplicando questo rapporto per $\frac{n}{2}$ si trova il numero:

$$P_n = \frac{n}{2}\cdot\frac{L_n}{r} = \frac{nL_n}{2r},$$

cioè il rapporto tra il perimetro nL_n del poligono regolare di n lati inscritto nella circonferenza e il suo diametro 2r. Rapporto che costituisce per l'appunto un valore approssimato di π.
Un tempo, quando non esistevano strumenti di calcolo automatico, questo procedimento comportava notevoli difficoltà di calcolo. Oggigiorno tali difficoltà sono del tutto superate. Già con una calcolatrice scientifica si ottengono ottimi risultati, benché con un certo dispendio di tempo. Le cose migliorano con l'uso di un foglio elettronico. Sintetizziamo, in ogni caso, alcuni risultati nella tabella 1.

Numero n dei lati del poligono	Rapporto K_n fra il lato del poligono e il raggio del cerchio circoscritto	Rapporto P_n fra il perimetro del poligono e il diametro del cerchio circoscritto
6	1	3
12	0,517639	3,10583
24	0,261052	3,13263
48	0,130806	3,13935
96	0,065438	3,14103
192	0,032723	3,14145
384	0,016362	3,14156
768	0,008181	3,14158

TAB. 1

Si può constatare che con il poligono regolare di 768 lati siamo appena alle prime 4 cifre decimali esatte di π. Un algoritmo idoneo a calcolare tali cifre è il seguente [2]:

```
INIZIO
  n := 6
  K := 1
  MENTRE n <= 1000 RIPETI
    INIZIO
      K := Sqrt(2–Sqrt(4–K^2))]
      N := 2n
    FINE
  P := nK/2
FINE
```

Il valore P in uscita dal programma di calcolo è per l'appunto un valore approssimato di π.

Archimede fu il primo studioso ad eseguire un procedimento simile a quello descritto sopra. Egli non solo non disponeva di strumenti di calcolo automatico ma nemmeno del nostro agile sistema di numerazione. Eppure riuscì a trovare il rapporto in questione per il poligono regolare di 96 lati. Precisamente Archimede trovò un valore compreso fra $3+\frac{10}{71}$ (≈3,1408) e $3+\frac{10}{70}$ (≈3,1428), per cui era sicuro del valore della 2ª cifra decimale di π, vale a dire $\mathbf{3{,}14}$. Il suo procedimento figura in un piccolo trattato, dal titolo *Sulla misurazione del cerchio*.

38.2.3 Descriviamo ora, con la tua collaborazione, un altro modo per calcolare valori approssimati di π, basato su conoscenze di trigonometria. [3]

Considerati una circonferenza di raggio r e il poligono regolare di n lati inscritto in essa, chiama p_n ed a_n rispettivamente il perimetro e l'area del poligono. Dimostra anzitutto che risulta:

$$p_n = 2\,n\,r\sin\frac{180°}{n}\ ,\quad a_n = \frac{1}{2}\,n\,r^2\sin\frac{360°}{n}\ .$$

Da queste due formule puoi desumere rispettivamente queste altre:

$$\frac{p_n}{2r} = n\sin\frac{180°}{n}\ ,\quad \frac{a_n}{r^2} = \frac{n}{2}\sin\frac{360°}{n}\ .$$

Valori che, per n sufficientemente grande, si possono assumere come approssimazioni di π.

Con una calcolatrice scientifica si trovano i valori dei due rapporti sintetizzati nelle seguenti tabelle:

n	$n\sin\frac{180°}{n}$		n	$n\sin\frac{180°}{n}$		n	$n\sin\frac{180°}{n}$		n	$n\sin\frac{180°}{n}$
5	2,9		11	3,09		56	3,13		93	3,140
6	3		12	3,1		57	3,14		94	3,141

TAB. 2

n	$\frac{n}{2}\sin\frac{360°}{n}$		n	$\frac{n}{2}\sin\frac{360°}{n}$		n	$\frac{n}{2}\sin\frac{360°}{n}$		n	$\frac{n}{2}\sin\frac{360°}{n}$
11	2,9		22	3,09		113	3,13		186	3,140
12	3		23	3,1		114	3,14		187	3,141

TAB. 3

Un discorso analogo puoi fare per i poligoni regolari circoscritti alla circonferenza. Trovi dapprima il peri-

[2] **Sqrt(a)** restituisce la radice quadrata del numero a, mentre **a^2** restituisce il quadrato di a.
[3] Questo paragrafo è riservato agli studenti che hanno già fatto un primo studio delle "Funzioni circolari".

metro P_n e l'area A_n del poligono di n lati (te lo lasciamo per esercizio):

$$P_n=2\,n\,r\tan\frac{180°}{n}\ ,\quad A_n=n\,r^2\tan\frac{180°}{n}\ .$$

Per cui:

$$\frac{P_n}{2r}=n\tan\frac{180°}{n},\quad \frac{A_n}{r^2}=n\tan\frac{180°}{n}\ .$$

Questo mostra che i due rapporti, diversamente da quelli relativi ai poligoni inscritti, hanno lo stesso andamento. La tabella 4 sottostante riporta alcuni valori approssimati di tali rapporti.

n	$n\tan\frac{180°}{n}$		n	$n\tan\frac{180°}{n}$		n	$n\tan\frac{180°}{n}$		n	$n\tan\frac{180°}{n}$
4	4		13	3,2		35	3,15		159	3,142
5	3,6		14	3,1		36	3,14		160	3,141

TAB. 4

A titolo di curiosità, facciamo notare che risulta:

$$\frac{p_{96}}{2r}=96\cdot\sin\frac{180°}{96}\approx 3{,}1410 \qquad \frac{P_{96}}{2r}=96\cdot\tan\frac{180°}{96}\approx 3{,}1427\ .$$

Si ritrova così, a parte approssimazioni irrilevanti, il risultato di Archimede:

$$3{,}1410<\ \pi<3{,}1427$$

Il quale assicura che il valore di π, esatto fino alla seconda cifra decimale, è 3,14.

Alcune questioni da risolvere:

1. Quale delle seguenti relazioni è quella giusta?
$$2\pi=6{,}28 \qquad 2\pi>6{,}28 \qquad 2\pi<6{,}28\ .$$
2. Una circonferenza è più lunga o più corta della somma di tre suoi diametri?
3. L'area di una corona circolare è πa^2, essendo a una lunghezza assegnata. È possibile calcolare la lunghezza di una corda della circonferenza maggiore che sia tangente alla minore?
4. Dimostrare che condizione necessaria e sufficiente affinché una corona circolare abbia area che sia media proporzionale fra le aree dei due cerchi che la determinano è che il raggio del cerchio minore sia sezione aurea del raggio del cerchio maggiore.
5. Un rombo ha un angolo interno di 60°. Indicati con C' e K' rispettivamente la circonferenza e il cerchio aventi per diametro la diagonale maggiore del rombo e con C" e K" rispettivamente la circonferenza e il cerchio aventi per diametro la diagonale minore, dire quale delle seguenti alternative è corretta e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata:
[A] C' e C" sono grandezze commensurabili ed anche K' e K" lo sono;
[B] C' e C" sono grandezze commensurabili ma K' e K" non lo sono;
[C] K' e K" sono grandezze commensurabili ma C' e C" non lo sono;
[D] K' e K" sono grandezze incommensurabili ed anche C' e C" lo sono.

38.2.4 Terminiamo con alcune considerazioni riguardanti π.

- Siccome è un numero irrazionale, non è possibile determinare tutte le sue cifre decimali, che ovviamente sono infinite.
- Nella pratica è sufficiente attribuire a π il valore 3,14 o, se proprio si richiede un'approssimazione più accurata, il valore 3,14159. Solo raramente un'approssimazione migliore.
- Quando si attribuisce a π il valore 3,14 in realtà non si stanno calcolando le misure del cerchio e della circonferenza, bensì quelle di un poligono regolare inscritto (o eventualmente circoscritto)

avente un particolare numero di lati. Precisamente, se si considera una circonferenza di raggio r:

- la misura 3,14×2r è il perimetro del poligono regolare di 57 lati inscritto in essa oppure quello del poligono regolare di 36 lati circoscritto;
- la misura 3,14 r^2 è l'area del poligono regolare di 114 lati inscritto in essa, oppure quella del poligono regolare di 36 lati circoscritto.

38.3 PARTI DELLA CIRCONFERENZA E DEL CERCHIO

38.3.1 Ci proponiamo di determinare adesso le formule relative alle misure delle parti del cerchio e della circonferenza. Vale a dire delle seguenti figure piane: *arco di circonferenza*, *settore circolare*, *segmento circolare* (ad una e a due basi).

Incominciamo dall'arco di circonferenza e dal settore circolare.

Valgono le seguenti proprietà che però non dimostriamo:

- Le lunghezze degli archi di una circonferenza e le ampiezze degli angoli al centro formano due classi di grandezze direttamente proporzionali.

La costante di proporzionalità è ovviamente uguale al rapporto tra un particolare arco, per esempio l'intera circonferenza, e il corrispondente angolo al centro, cioè 360°. Per cui se r è il raggio della circonferenza, questa costante vale:

$$\frac{2\pi r}{360°}.$$

- Le aree dei settori circolari di un dato cerchio e le ampiezze degli angoli al centro formano due classi di grandezze direttamente proporzionali.

La costante di proporzionalità è, come sopra, uguale al rapporto tra l'area di un particolare settore, per esempio l'intero cerchio, e l'ampiezza del corrispondente angolo al centro, cioè 360°. Per cui, indicato con r il raggio del cerchio, questa costante vale:

$$\frac{\pi r^2}{360°}.$$

Pertanto, se L è la lunghezza di un arco di circonferenza, A l'area del settore circolare relativo ed α° l'ampiezza (in gradi sessagesimali) del corrispondente angolo al centro (Fig. 3), si trovano le due seguenti formule:

$$\boldsymbol{\frac{L}{\alpha°}=\frac{2\pi r}{360°},\quad \frac{A}{\alpha°}=\frac{\pi r^2}{360°}}.$$

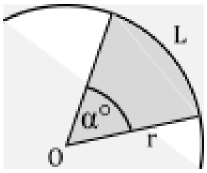

FIG. 3

Ti proponiamo per esercizio la risoluzione di due problemi:

1. È dato un quadrato di centro O e lato lungo 4a, essendo a una lunghezza assegnata. Si ritagliano in esso i quattro quadranti di cerchio aventi i centri nei vertici del quadrato e tangenti ad uno stesso cerchio avente il centro in O. La parte di quadrato che rimane dopo aver reciso i quattro quadranti è equivalente alla parte recisa. Calcolare i raggi dei cerchi da cui sono stati ottenuti i quadranti suddetti e quello del cerchio di centro O.

$$\left[\textbf{R.}\ \ 2a\sqrt{\frac{2}{\pi}},\ \ 2a\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)\right]$$

2. In un cerchio di raggio r è assegnata la corda AB lunga quanto il lato di un quadrato inscritto nel cerchio. Calcolare le aree delle due parti in cui il cerchio è diviso da tale corda.

$$\left[\mathbf{R.}\ \frac{r^2}{4}(\pi-2);\ \frac{r^2}{4}(3\pi+2)\right]$$

38.3.2 A proposito delle questioni in cui si ha a che fare con l'area di un segmento circolare (come, per esempio, nel secondo dei due problemi precedenti, non è il caso di ricorrere a formule particolari, che pure esistono ma non sono semplici da ricordare; è più opportuno valutare di volta in volta il procedimento più idoneo per giungere alla soluzione. Vediamo un altro esempio.

- PROBLEMA. In un cerchio di raggio r si traccino due corde parallele, situate da parti opposte rispetto al centro del cerchio: una uguale al lato del triangolo equilatero inscritto e l'altra uguale al lato del quadrato inscritto. Calcolare l'area del segmento circolare a due basi individuato dalle corde suddette e la lunghezza del suo contorno.

RISOLUZIONE. Chiamate AB e CD le corde del cerchio assegnato (Fig. 4) uguali rispettivamente al lato del triangolo equilatero e al lato del quadrato inscritti in esso, è noto che: $\overline{AB}=r\sqrt{3}$, $\overline{CD}=r\sqrt{2}$.
Indicate ora con A' l'area del segmento circolare di base AB non contenente il centro O del cerchio e con A" quella del segmento circolare di base CD non contenente O, l'area A del segmento circolare di basi AB e CD è evidentemente: $A=\pi r^2-(A'+A'')$.
D'altra parte:

$$A' = \text{settore circolare AOB} - \text{triangolo AOB},\quad A'' = \text{settore circolare COD} - \text{triangolo COD};$$

quindi è necessario calcolare l'area del settore circolare AOB e quella del triangolo COD.

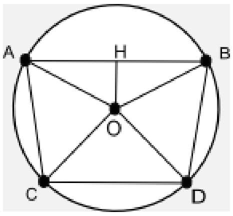

FIG. 4

Osserviamo anzitutto che $A\hat{O}B=120°$ e $C\hat{O}D=90°$; pertanto:

area settore circolare AOB$=\dfrac{\pi r^2\cdot 120°}{360°}=\dfrac{\pi r^2}{3}$; area settore circolare COD$=\dfrac{\pi r^2\cdot 90°}{360°}=\dfrac{\pi r^2}{4}$.

Inoltre, dopo aver stabilito facilmente che $\overline{OH}=\frac{r}{2}$, si ha:

area triangolo AOB$=\dfrac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{OH}=\dfrac{1}{2}r\sqrt{3}\cdot\dfrac{r}{2}=\dfrac{r^2\sqrt{3}}{4}$, area triangolo COD$=\dfrac{1}{2}\overline{CO}\cdot\overline{OD}=\dfrac{r^2}{2}$.

$$\text{Pertanto: } A=\pi r^2-\left(\frac{\pi r^2}{3}-\frac{r^2\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi r^2}{4}-\frac{r^2}{2}\right)=\frac{5}{12}\pi r^2+\frac{r^2\sqrt{3}}{4}+\frac{r^2}{2}\ \text{ e infine: } A=\frac{r^2}{12}\left(5\pi+3\sqrt{3}+6\right).$$

Per il calcolo della lunghezza L del contorno del segmento circolare in esame, occorre anzitutto calcolare le lunghezze L' ed L" degli archi AB e CD rispettivamente, dal momento che si ha:

$$L=\overline{AB}+\overline{CD}+2\pi r-\left(L'+L''\right).$$

Ora risulta: $L'=\dfrac{\pi r\cdot 120°}{180°}=\dfrac{2}{3}\pi r$ ed $L''=\dfrac{\pi r\cdot 90°}{180°}=\dfrac{\pi r}{2}$. Pertanto:

$L=r\sqrt{3}+r\sqrt{2}+2\pi r-\left(\dfrac{2}{3}\pi r+\dfrac{1}{2}\pi r\right)$ e infine: $L=\dfrac{r}{6}\left(5\pi+6\sqrt{3}+6\sqrt{2}\right)$.

VERIFICHE

1. Considerato il cerchio circoscritto ad un triangolo rettangolo di cateti lunghi 6a e 8a, dove a è una lunghezza data, calcolarne l'area e la lunghezza della circonferenza. [**R.** $25\pi a^2$, $10\pi a$]
2. Considerato il cerchio inscritto in un triangolo equilatero di lato di lunghezza nota L, calcolarne l'area e la lunghezza della circonferenza. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{\pi}{12}L^2, \frac{\pi}{\sqrt{3}}L\right]$
3. Le basi di un trapezio isoscele circoscritto ad un cerchio sono lunghe 18a e 8a, dove a è una lunghezza assegnata. Calcolare l'area di tale cerchio e la lunghezza della sua circonferenza. [**R.** $36\pi a^2$, $12\pi a$]
4. Un trapezio rettangolo è circoscritto ad un semicerchio in modo che la sua base maggiore ne contenga il diametro. Sapendo che tale base è lunga 8L e che l'area del semicerchio è $\frac{9}{2}\pi L^2$, calcolare il perimetro e l'area del trapezio. [**R.** 20L, $18L^2$]
5. Un rombo ha un angolo interno di 120°. Qual è il rapporto fra l'area del rombo e quella del cerchio inscritto in esso?

   [A] $\frac{4\sqrt{3}}{\pi}$ [B] $\frac{4}{\pi\sqrt{3}}$ [C] $\frac{8}{\pi\sqrt{3}}$ [D] Dati insufficienti.

   Una sola alternativa è corretta. Individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.
6. L'arco AB di una circonferenza di centro O e raggio r è lungo $\pi r/5$. Calcolare l'ampiezza dell'angolo $A\hat{O}B$ e l'area del settore circolare AOB. [**R.** 36°, $\pi r^2/10$]
7. La base di un segmento circolare è lunga 40 cm e dista 8 cm dal punto medio dell'arco che delimita il segmento circolare medesimo. Calcolare il raggio del cerchio dal quale il segmento circolare è stato ottenuto. [**R.** 29 cm]
8. Due corde di un cerchio di raggio r, parallele e disposte dalla stessa parte rispetto al centro, sono lunghe r ed r $\sqrt{3}$. Calcolare le aree delle tre parti in cui esse dividono il cerchio.
   $$\left[\mathbf{R.}\ \frac{2\pi-3\sqrt{3}}{12}r^2,\ \ \frac{8\pi+3\sqrt{3}}{12}r^2,\ \ \frac{\pi}{6}r^2\right]$$
9. Sull'arco AB, terza parte di una circonferenza di centro O e raggio r, si prenda il punto C tale che $A\hat{O}C = 30°$ e si calcolino le aree delle tre regioni piane in cui le corde AC e CB dividono il settore circolare AOB. Si calcoli anche il perimetro del quadrilatero AOBC. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{3}{4}r^2,\ \frac{\pi-2}{4}r^2,\ \frac{\pi-3}{12}r^2; \dots\right]$
10. Due circonferenze di raggi r e 3r sono tangenti esternamente nel punto A. Una loro tangente comune le tocca nei punti B e C. Calcolare l'area del triangolo mistilineo limitato dagli archi circolari AB e AC e dal segmento BC. Calcolare inoltre la lunghezza del contorno di tale figura.
    $$\left[\mathbf{R.}\ \frac{24\sqrt{3}-11\pi}{6}r^2,\ \ \frac{6\sqrt{3}+5\pi}{3}r\right]$$
11. Una corda di un cerchio di raggio r è lunga quanto il lato del dodecagono regolare inscritto nel cerchio. Calcolare le aree delle regioni piane in cui la corda divide il cerchio e le lunghezze dei loro contorni. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{\pi-3}{12}r^2,\ \frac{11\pi+3}{12}r^2;\ \frac{\pi+3\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{6}r\right]$
12. Calcolare un valore approssimato di π prendendo in esame due quadrati, uno inscritto e l'altro circoscritto ad una circonferenza di raggio r; prendendo poi due poligoni regolari di 8 lati, e poi di 16, di 32, ...
13. Considerato un qualunque triangolo rettangolo, si dimostri che il semicerchio avente per diametro

l'ipotenusa è equivalente alla somma dei semicerchi aventi per diametri i cateti.

14. Dimostrare che una corona circolare è equivalente ad un cerchio avente per diametro una corda della maggiore delle due circonferenze che delimitano la corona, tangente alla minore di esse.
15. Considerato il semicerchio circoscritto ad un triangolo rettangolo, si costruiscano, esternamente al triangolo, due altri semicerchi, ognuno avente per diametro un cateto. Le porzioni di piano comprese fra ciascuno di questi due semicerchi e il primo semicerchio sono due **lunule** (4). Si dimostri che la somma delle due lunule è equivalente al triangolo.
16. Considerata la semicirconferenza circoscritta ad un triangolo rettangolo isoscele, si costruisca, internamente al triangolo, un arco di circonferenza con un angolo al centro di 45°, sotteso dall'ipotenusa del triangolo. Si dimostri che la porzione di piano limitata dalla semicirconferenza e dall'arco suddetto (**lunula**) è equivalente al triangolo.
17. Dato un triangolo equilatero di lato di lunghezza assegnata L, si consideri il minore dei due archi in cui gli estremi di un lato dividono la circonferenza circoscritta al triangolo ed, esternamente al triangolo medesimo, si tracci la semicirconferenza avente per diametro quel lato. Si calcoli l'area della **lunula** delimitata dall'arco e dalla semicirconferenza suddetti. $\left[\textbf{R.}\ \frac{\pi+6\sqrt{3}}{72}L^2\right]$
18. Dato l'arco AB, quarta parte di una circonferenza di centro O, si tracci, da parte opposta di O rispetto alla retta AB, la semicirconferenza di diametro AB. Si calcoli l'area della **lunula** delimitata dall'arco AB e dalla semicirconferenza suddetti, sapendo che il segmento AB è lungo L. [**R.** $L^2/4$]
19. Dati due segmenti adiacenti, AB e BC, si traccino la semicirconferenza di diametro AC e, dalla stessa parte di essa rispetto ad AC, le semicirconferenze di diametri AB e BC. La figura delimitata dalle tre semicirconferenze è chiamata **arbelo** (5) (Fig. 5). Calcolarne l'area e la lunghezza del contorno sapendo che AB e BC sono lunghi rispettivamente *a* e *b*. In particolare, detto D il punto in cui la perpendicolare ad AC condotta per B interseca la semicirconferenza di diametro AC, dimostrare che l'arbelo è equivalente al cerchio di diametro BD.

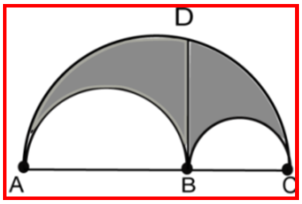

FIG. 5 – arbelo

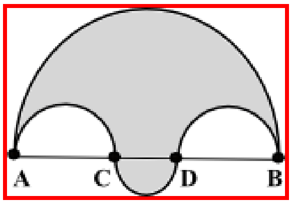

FIG. 6 - salinòn

20. Internamente al segmento AB si prendano due punti, C dalla parte di A e D dalla parte di B, rispetto al punto medio del segmento, tali che AC=DB. Da una stessa parte, rispetto alla retta AB, si traccino le tre semicirconferenze di diametri AB, AC, DB e, dalla parte opposta, la semicirconferenza di diametro CD. Le quattro semicirconferenze delimitano una figura chiamata **salinòn**(6) (Fig. 6). Calcolarne l'area e la lunghezza del contorno sapendo che è uguale ad *a* la lunghezza dei segmenti AC e DB ed è uguale a *b* quella del segmento CD.
21. Considerate due circonferenze uguali, di centri A e B, tangenti esternamente nel punto C, si conducano, da una stessa parte rispetto alla retta AB, due raggi paralleli AD e BE e, dalla parte opposta di AB,

[4] Lo studio delle lunule fu approfondito da Ippocrate di Chio, il quale sperava di giungere all'area del cerchio, ma fallì.
[5] Deriva dal greco *arbelos*, che significa "coltello del calzolaio".
[6] Anche questo termine deriva dal greco e significa "saliera". Le figure "arbelo" e "salinon" sono state oggetto di studio da parte di Archimede, che ne tratta nell'opera *Il libro dei lemmi*.

si tracci la semicirconferenza di diametro DE. Si dimostri che la figura delimitata dagli archi circolari CD, DE, EC, nessuno dei quali maggiore di una semicirconferenza – figura chiamata **drepanòide** (7) (Fig. 7) – è equivalente al parallelogramma ABED e che il suo contorno è lungo quanto una delle due circonferenze assegnate.

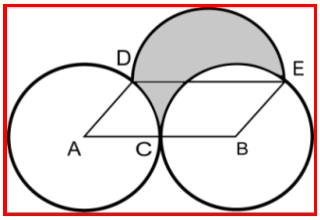

FIG. 7 – drepanòide

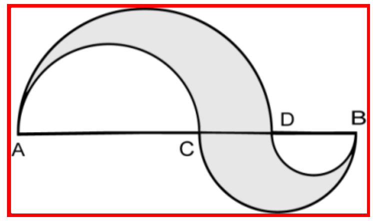

FIG. 8 - pelecòide

22. Su un segmento AB si prendano due punti, C dalla parte di A e D dalla parte di B, e si traccino, da una stessa parte rispetto alla retta AB, le due semicirconferenze di diametri AC e AD e, dall'altra parte, le due semicirconferenze di diametri CB e DB. Si dimostri che le quattro semicirconferenze delimitano una figura – detta **pelecòide** (8) (Fig. 8) – il cui contorno è lungo quanto la circonferenza di diametro AB e la cui area sta nel rapporto $\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}$ con quella del cerchio di diametro AB.

23. Un quadrato inscritto in un semicerchio ha area L^2. Calcolare l'area del semicerchio e la lunghezza del suo contorno. $\left[\textbf{R.}\ \frac{5}{8}\pi L^2,\ \frac{\sqrt{5}}{2}(\pi+2)L\right]$

24. Una corona circolare ha area uguale a $12\pi a^2$ ed i raggi delle due circonferenze che la delimitano sono uno doppio dell'altro. Calcolare la lunghezza di una corda AB della circonferenza maggiore, tangente alla minore. I segmenti OA e OB, dove O è il centro comune delle due circonferenze, intersecano la minore di esse nei punti C e D rispettivamente. Calcolare il perimetro e l'area del quadrilatero ABDC. Calcolare inoltre le ampiezze degli angoli interni di tale quadrilatero.

$\left[\textbf{R.}\ 4a\sqrt{3}\,;\ 2a\left(2+3\sqrt{3}\right),\ 3a^2\sqrt{3};\ \ldots\right]$

25. La base e l'altezza di un triangolo isoscele sono lunghe rispettivamente 60a e 40a, dove a è una lunghezza assegnata. Considerato il cerchio avente per diametro il segmento che congiunge i centri delle circonferenze inscritta e circoscritta al triangolo, calcolarne l'area e la lunghezza della circonferenza

$\left[\textbf{R.}\ \frac{625}{64}a^2,\ \frac{25}{4}\pi a\right]$

26. Dato un quadrato ABCD di lato lungo L, si considerino i semicerchi di diametri AB e AD interni ad esso e si calcoli l'area della porzione di piano comune a tali semicerchi.
Detto quindi E il punto in cui s'intersecano, oltre che in A, le semicirconferenze dei due semicerchi suddetti e tracciato, internamente al quadrato, l'arco BD, quarta parte della circonferenza di centro A e raggio AB, si calcoli l'area della figura delimitata dai tre archi BD, DE, EB e la lunghezza del suo contorno. $\left[\textbf{R.}\ \frac{\pi-2}{8}L^2;\ldots;\ \pi L\right]$

27. Gli archi circolari AB, BC, CA, tutti minori di una semicirconferenza, sono parti di tre circonferenze aventi ugual raggio r e tangenti fra loro. Calcolare l'area del triangolo curvilineo individuato da essi e la lunghezza del suo contorno.

---

7 Questo termine è una forma composta dalle parole greche *drepanon* (falce) e *eidos* (forma), per cui il termine significa "a forma di falce".
8 Pure questo termine deriva dal greco e significa "a forma di ascia". È forma composta dalle parole *pelekus* (ascia) e *eidos* (forma).

[**R.** Basta constatare che il triangolo avente per vertici i centri delle tre circonferenze è equilatero e che i punti di tangenza delle circonferenze … . Si trova: $\frac{2\sqrt{3}-\pi}{2}r^2,\ \pi r$]

28. Una circonferenza inscritta in un triangolo isoscele ha raggio r e la distanza del suo centro dal vertice del triangolo propriamente detto è $\frac{5}{3}r$. Considerata anche la circonferenza circoscritta al triangolo, calcolare l'area della superficie delimitata dalle due circonferenze. [**R.** $\frac{481}{144}\pi r^2$]

29. Due circonferenze concentriche hanno raggi r e 3r. Determinare la lunghezza di una terza circonferenza concentrica alle prime due, sapendo che divide la corona circolare delimitata da quelle circonferenze in due corone circolari equivalenti. [**R.** $2\pi r\sqrt{5}$]

30. Due circonferenze concentriche hanno raggi r e 4r. Tracciata una terza circonferenza k concentrica alle prime due e detta AB una sua corda tangente alla circonferenza minore, si conducano le tangenti a k in A e B e si dica C la loro intersezione. Calcolare il raggio della circonferenza k e la lunghezza della corda AB sapendo che C appartiene alla maggiore delle due circonferenze assegnate. [**R.** $2r, 2r\sqrt{3}$]

31. Considerato un semicerchio di diametro AB, lungo 2r, sia CD una sua corda parallela ad AB e tale che l'arco CD sia lungo il doppio dell'arco AC. Calcolare le aree delle due parti in cui la corda CD divide il semicerchio. [**R.** $\frac{\pi\pm 2}{4}r^2$]

32. Le tangenti nei punti A e B di una circonferenza di centro O s'intersecano in un punto C. Sapendo che l'area del quadrilatero OACB è $3a^2\sqrt{3}$ e che l'angolo $A\hat{C}B$ misura $120°$, calcolare le aree delle due parti in cui il quadrilatero è diviso dall'arco AB. [**R.** $\frac{3\pi}{2}a^2,\ \frac{3(2\sqrt{3}-\pi)}{2}a^2$]

33. L'area di un settore circolare AOB, di centro O e raggio r, è $\frac{\pi}{3}r^2$. Calcolare le aree delle due porzioni di piano in cui la corda AB divide il settore. [**R.** $\frac{\sqrt{3}}{4}r^2,\ \frac{4\pi-3\sqrt{3}}{12}r^2$]

34. È dato il quadrante di cerchio OAB, vale a dire il settore circolare delimitato dai raggi OA e OB e dall'arco di circonferenza AB, il cui angolo al centro è ampio 90°. Presi sull'arco AB due qualsiasi punti P e Q, li si proietti ortogonalmente nei punti P' e Q' del raggio OA e nei punti P" e Q" del raggio OB. Si indichi con R_1 la regione piana delimitata dall'arco AB e dai segmenti PP', P'Q' e Q'Q e con R_2 la regione piana delimitata dallo stesso arco AB e dai segmenti PP", P"Q" e Q"Q. Detto H il punto intersezione dei segmenti PP" e QQ', dimostrare che:

a) area triangolo OHP = $1/2$ area rettangolo PP'Q'H;
b) area triangolo OHQ = $1/2$ area rettangolo QQ"P"H;
c) area R_1 + area R_2 = 2 area settore circolare POQ.

35. L'equatore terrestre ha una circonferenza lunga circa 40 milioni di metri. Immagina di distendere attorno a questa circonferenza un nastro lungo 2π metri in più della sua lunghezza in modo da formare una nuova circonferenza concentrica alla prima.

a) Senza fare calcoli, ma solo immaginando la situazione, pensi che la "distanza" fra le due circonferenze sia dell'ordine dei millimetri, dei centimetri o dei metri?
b) Verifica se la tua congettura è corretta facendo i calcoli necessari.

36. Si consideri la regione piana evidenziata in figura 9.

Calcolarne l'area e la lunghezza del contorno, tenendo presente che la regione presenta una simmetria assiale, che a è una lunghezza nota, che è anche la lunghezza del diametro AB di una delle due semicirconferenze, mentre CD è il diametro dell'altra semicirconferenza. Calcolare, in particolare, quanto valgono l'area e la lunghezza suddette quando a=2 cm.

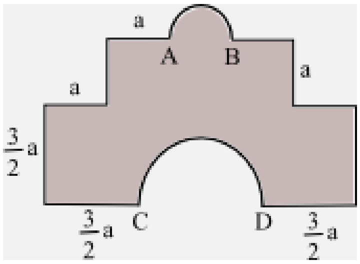

FIG. 9

37. È dato il triangolo rettangolo ABC, di cui l'ipotenusa BC misura 8 cm e l'angolo in C è ampio 60°. Indicato con M il punto medio del cateto AB, si traccino la circonferenza di diametro AM e quella di diametro MB e si chiami N l'ulteriore punto in cui quest'ultima interseca l'ipotenusa BC. Calcolare la lunghezza del contorno e l'area della regione finita di piano delimitata dai segmenti CA e CN e dagli archi di circonferenze AM ed MN interni al triangolo. $\left[\mathbf{R.}\ \left(9+\frac{4\pi\sqrt{3}}{3}\right)\text{cm},\ \left(\frac{29\sqrt{3}}{4}-2\pi\right)\text{cm}^2\right]$

38. È assegnato il triangolo rettangolo ABC, di cui l'ipotenusa BC misura 8 cm e l'angolo in C è ampio 30°. Indicato con M il punto medio dell'ipotenusa BC, si traccino la circonferenza K' di diametro BM e la circonferenza K" di diametro MC e si chiami N l'ulteriore punto in cui la prima interseca il cateto AB e P l'ulteriore punto in cui la seconda interseca il cateto AC.

1. A) Dimostrare che la circonferenza K passante per i punti A, N, P passa pure per M.
2. A) Calcolare la lunghezza del contorno e l'area della regione finita di piano comune ai cerchi delimitati dalle circonferenze K e K'.
   B) Calcolare la lunghezza del contorno e l'area della regione finita di piano comune ai cerchi delimitati dalle circonferenze K e K".

$\left[\mathbf{R.}\ 1A)\ ...;2A)\ \frac{8\pi}{3}\text{cm},\ \left(\frac{8\pi}{3}-2\sqrt{3}\right)\text{cm}^2;\ 2B)\ \frac{4\pi}{3}\text{cm},\ \left(\frac{4\pi}{3}-2\sqrt{3}\right)\text{cm}^2\right]$

39. All'interno di un triangolo equilatero di lato $4(1+\sqrt{3})$ cm sono situate tre circonferenze congruenti in modo che ciascuna sia tangente a due lati del triangolo ed alle altre due circonferenze. Indicati con P, Q, R i punti in cui le circonferenze si toccano due a due, calcolare l'area della regione piana delimitata dai minori degli archi di circonferenze PQ, QR, RP e la lunghezza del suo contorno.

$\left[\mathbf{R.}\ 2\left(2\sqrt{3}-\pi\right)\text{cm}^2;\ 2\pi\ \text{cm}\right]$

40. Nel triangolo OAB, isoscele sulla base AB, l'angolo in O misura 120°. Si prendano, sulla base AB, i due punti C e D tali che AC=CD=DB.

1. A) Dimostrare che i triangoli OAD e OBC sono rettangoli e congruenti.
   B) Dimostrare che i triangoli OAC e OBD sono isosceli e congruenti.
2. Posto che il lato AB misuri $2\sqrt{3}$ cm, calcolare:
   A) l'area del cerchio circoscritto al triangolo OAB;
   B) le aree dei due segmenti circolari in cui AB divide tale cerchio.

$\left[\mathbf{R.}\ ...;\ 2B)\left(\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}\right)\text{cm}^2,\ ...\right]$

41. Nel maggiore dei cerchi che individuano una corona circolare sono tracciate le corde AB ed AC tangenti al cerchio minore. Sapendo che la corda AB è lunga 10 cm, calcolare l'area della corona circolare.
Sapendo poi che l'area del triangolo ABC è 48 cm^2, calcolare le misure dei raggi dei due cerchi che determinano la corona.

$\left[\begin{array}{l}\textbf{R.}\ 25\pi\ \text{cm}^2;\ \text{dapprima:}\ \sin B\widehat{A}C=\dfrac{24}{25},\ \text{quindi} \ldots \\ 2\ \text{sol.:}\ R'=\dfrac{25}{4}\text{cm},\ r'=\dfrac{15}{4}\text{cm};\ R''=\dfrac{25}{3}\text{cm},\ r''=\dfrac{20}{3}\text{cm}\end{array}\right]$

42. LABORATORIO DI MATEMATICA. Due palline si muovono con velocità costanti su altrettante piste circolari uguali, disposte parallelamente l'una sopra l'altra: la pallina P_1 si muove in senso orario, la pallina P_2 in senso antiorario. Nell'istante t_0 si trovano in due posizioni diametralmente opposte. Da questo istante all'istante t_1 in cui s'incrociano per la prima volta, la pallina P_1 ha percorso 60 cm, mentre dall'istante t_1 all'istante t_2 in cui s'incrociano per la seconda volta, la pallina P_2 ha percorso 40 cm. È possibile calcolare la lunghezza del raggio delle due piste? [**R.** $80/\pi$ cm]

43. È dato l'esagono regolare ABCDEF di centro O. Si prenda, internamente al lato AB, un punto M tale che 2 AM < AB e siano H, L, K nell'ordine le sue proiezioni ortogonali sulle rette AD, BE, CF.

1. A) Dimostrare che il pentagono MLOKH è inscrivibile in un cerchio.
   B) Dimostrare che il triangolo HLK è equilatero.
2. Posto che il punto M divida AB in due parti, AM ed MB, direttamente proporzionali ai numeri 1 e 2 e posto che AM misuri 4 cm, calcolare la misura del raggio della circonferenza circoscritta:
   A) all'esagono ABCDEF;
   B) al triangolo HLK.

[**R.** … ; 1B) Gli angoli $L\widehat{O}H$ e $L\widehat{K}H$ sono angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco, per cui …; d'altro canto l'angolo $L\widehat{O}H$ è ampio 60°, per cui …; allo stesso modo, mettendo a confronto gli angoli $H\widehat{L}K$ e $H\widehat{O}K$, si conclude che $H\widehat{L}K$ è ampio 60°. Di conseguenza: …; 2A) 12 cm, 2B) $2\sqrt{7}$cm]

44. Un segmento circolare è delimitato dall'arco AB, minore di una semicirconferenza, e dalla corda AB, lunga 26,88 cm. La distanza del punto medio dell'arco AB dalla corda AB è 3,92 cm. Calcolare il raggio del cerchio da cui è stato ricavato il segmento circolare. [**R.** 25 cm]

45. La parte annerita della figura 10 (*Yin* e*Yang*) ha un'area uguale a 8π cm². È possibile calcolare la lunghezza della circonferenza esterna?

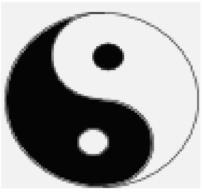

FIG. 10

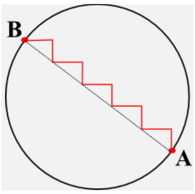

FIG. 11

46. I punti A e B (Fig. 11) sono punti diametralmente opposti di una circonferenza di raggio 125 cm. La "scalinata" che li congiunge è formata da 5 gradini uguali, in ciascuno dei quali l' "appoggio" è 4/3 dell' "alzata". La "scalinata" divide il cerchio in due regioni: calcolare le loro aree con approssimazione per difetto a meno di 1 cm² e la lunghezza dei loro contorni con approssimazione per difetto a meno di 1 cm. [**R.** 21543 cm²; 27543 cm²; 742 cm]

47. Dal punto P di una circonferenza si conducono, da una stessa parte rispetto al diametro passante per P, la corda PA uguale al lato del triangolo equilatero inscritto nella circonferenza e la corda PB uguale al lato del quadrato inscritto nella stessa circonferenza. Calcolare quale percentuale del cerchio occupa la figura delimitata dai segmenti PA e PB e dal minore degli archi AB. [**R.** ≈10,46%]

48. L'arco AB è la quarta parte di una circonferenza di centro O e raggio 6 cm. Su di esso si prendono due punti P e Q distanti rispettivamente $3\sqrt{2}$ cm e $3\sqrt{3}$ cm dal raggio OA. Si chiami H il punto in cui si secano la parallela ad OA condotta per P e la parallela ad OB condotta per Q. Calcolare: a) l'ampiezza dell'angolo $P\hat{O}Q$; b) quale percentuale del cerchio delimitato dalla circonferenza assegnata occupa la regione finita di piano delimitata dall'arco di circonferenza PQ e dai segmenti HP ed HQ.

[**R.** 15°; ≈0,57%]

49. In un cerchio di centro O è inscritto l'esagono ABCDEF tale che gli angoli $A\hat{O}B, C\hat{O}D, E\hat{O}F$ sono retti e gli angoli $B\hat{O}C, D\hat{O}E, F\hat{O}A$ sono uguali.

a) Calcolare le ampiezze degli angoli $B\hat{O}C, D\hat{O}E, F\hat{O}A$ e quelle degli angoli interni dell'esagono.
b) Dimostrare che i lati dell'esagono sono due a due paralleli.
c) Se l'area dell'esagono è $27a^2$ quanto vale l'area del cerchio?

[**R.** ...; c) $12\pi a^2$]

50. Il triangolo ABC è rettangolo in A. Si dicano M il punto medio dell'ipotenusa ed N il punto medio del cateto AC.

a) Dimostrare che la corda NM è parallela al cateto AB ed è la metà di esso.
b) Ammesso che il quadrilatero ABMN sia circoscrivibile ad un cerchio, dimostrare la seguente relazione: $\frac{\overline{AB}}{3}=\frac{\overline{AN}}{2}$.
c) Sapendo che l'area del cerchio suddetto è 4π cm^2, calcolare l'area del cerchio circoscritto al triangolo ABC.

[**R.** ...; c) 25π cm^2]

51. Per il punto A di una circonferenza K si conduca una secante e sia B l'ulteriore punto in cui essa interseca K. Si indichi con C un punto di tale secante esterno a K tale che AC>BC. Condotta per C una tangente a K, sia D il punto di contatto. Si sa che il triangolo BCD è rettangolo e che i segmenti AB e CD misurano rispettivamente 12 cm e 8 cm. Calcolare la lunghezza della circonferenza K e l'area del relativo cerchio. [**R.** $8\pi\sqrt{3}$ cm, 48π cm^2]

52. Due ciclisti, A e B, partecipano ad una gara ad inseguimento su una pista circolare, vale a dire che partono contemporaneamente da posizioni diametralmente opposte. Entrambi riescono a tenere una velocità costante, ma la velocità del ciclista A è il 90% di quella di B. Quest'ultimo finisce per raggiungere l'avversario appena dopo 2 minuti dalla partenza, quando A ha percorso solamente 1800 m.
a) Quant'è lunga la pista? b) Qual è all'incirca la distanza in linea d'area dei due contendenti all'inizio della gara? c) Quanti giri ha percorso B nell'istante in cui raggiunge A?

[**R.** a) 400 m; ... ; c) 5 giri]

53. PROBLEMA RISOLTO. Con riferimento alla figura sottostante (Fig. 12), il semicerchio ha raggio 2a, essendo a una lunghezza assegnata, il cerchio più grande è inscritto nel semicerchio ed ha raggio a, mentre i due cerchi più piccoli sono tangenti al semicerchio, al suo diametro e al cerchio più grande. Dopo aver dimostrato che i cerchi più piccoli hanno il diametro uguale al raggio del cerchio più grande, dimostrare che la parte del semicerchio che non è stata colorata risulta equivalente alla metà del cerchio più grande.

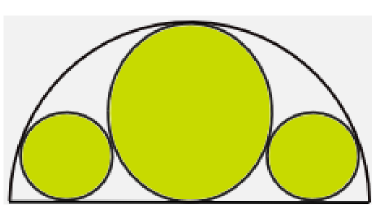

FIG. 12

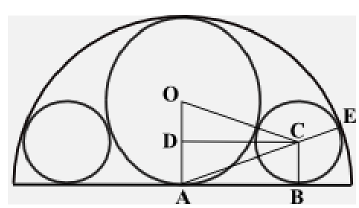

FIG. 13

RISOLUZIONE. Completiamo la figura come in figura 13 e indichiamo con x il raggio dei cerchi più piccoli (ovviamente uguali per simmetria). Osserviamo che si ha:

$$AO=a,\ OC=a+x,\ BC=x,\ OD=a-x,\ AC=AE-CE=2a-x.$$

Ragionando sul triangolo rettangolo CDO si trova: $\overline{DC}^2=4ax$.

Ragionando sul triangolo rettangolo ABC si trova: $\overline{AB}^2=4a^2-4ax$.

D'altro canto DC=AB, per cui si ha: $4ax=4a^2-4ax$, da cui segue: $x=a/2$. Pertanto i cerchi più piccoli hanno diametro uguale ad a, ossia uguale al raggio del cerchio più grande.

L'area S richiesta è tale che:

$$S=\frac{1}{2}\pi(2a)^2-\left(\pi a^2+2\cdot\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2\right)=\frac{1}{2}\pi a^2,$$

vale a dire che S è la metà dell'area del cerchio più grande.

54. Attorno a due pulegge (Fig. 14) è avvolta una cinghia (è colorata in rosso nella figura). I centri delle pulegge distano 50 cm ed i loro raggi misurano 6 cm e 20 cm. Calcolare la lunghezza della cinghia approssimata al millimetro. [**R.** 192,4 cm]

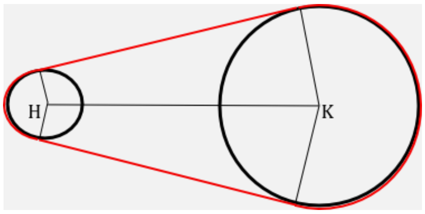

FIG. 14

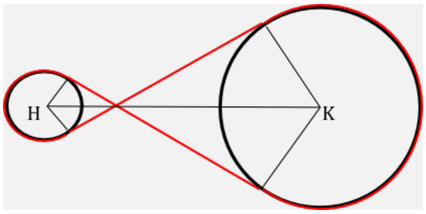

FIG 15

55. Attorno a due pulegge (Fig. 15) è avvolta una cinghia (è colorata in rosso nella figura). I centri delle pulegge distano 50 cm ed i loro raggi misurano 6 cm e 24 cm. Calcolare la lunghezza della cinghia approssimata al millimetro. [**R.** 212,8 cm]

56. Tre circonferenze uguali sono tangenti internamente ad una circonferenza di raggio lungo 1 m e sono tangenti fra loro (Fig. 16). Calcolare il raggio delle circonferenze uguali. Calcolare inoltre l'area della porzione di piano esterna alle tre circonferenze uguali e delimitata da esse (in figura è ombreggiata in verde), approssimata per difetto a meno di 1 cm^2. $\left[\mathbf{R.}\ \left(2\sqrt{3}-3\right)\text{ m},\ 347\text{ cm}^2\right]$

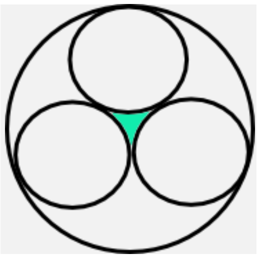
FIG. 16

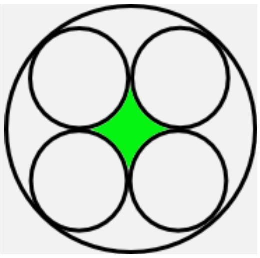
FIG. 17

57. Quattro circonferenze uguali sono tangenti internamente ad una circonferenza di raggio lungo 1 m e, prese due a due, sono tangenti fra loro (Fig. 17). Calcolare il raggio delle circonferenze uguali. Calcolare inoltre l'area della porzione di piano esterna alle quattro circonferenze uguali e delimitata da esse (in figura è ombreggiata in verde), approssimata per difetto a meno di 1 cm^2.

$\left[\mathbf{R.}\ \left(\sqrt{2}-1\right)\text{ m},\ 1.472\text{ cm}^2\right]$

58. Generalizzare i due problemi precedenti, considerando al riguardo n circonferenze uguali tangenti internamente ad una circonferenza di raggio assegnato r e, prese due a due, tangenti fra loro. Dimostrare che il raggio R_n di ognuna delle n circonferenze uguali è dato dalla formula seguente:

$$R_n = r\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{1+\sin\frac{\pi}{n}}$$

mentre l'area A della porzione di piano esterna alla n circonferenze uguali e delimitata da esse è data dalla formula seguente:

$$A = r^2\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{1+\sin\frac{\pi}{n}}\right)^2\left(\frac{n}{\tan\frac{\pi}{n}}-\frac{n-2}{2}\pi\right).$$

59. L'*arbelo di Archimede*, cui abbiamo accennato nel precedente esercizio N° 19, ha proprietà piuttosto interessanti, delle quali si è occupato lo stesso Archimede. Qui noi descriveremo due di queste proprietà in altrettanti esercizi. Lo faremo con riferimento all'arbelo delimitato dalle semicirconferenze c_1 di diametro AB e centro M, c_2 di diametro AC e centro H e c_3 di diametro CB e centro K. Sia inoltre D il punto in cui la perpendicolare ad AB, condotta per C interseca la semicirconferenza c_1.

ESERCIZIO 1. Si indichi con E il punto in cui AD interseca la semicirconferenza c_2 e con F il punto in cui BD interseca c_3 (Fig. 18). Dimostrare che: a) il quadrilatero convesso CFDE è un rettangolo; b) la retta EF è tangente alle semicirconferenze c_2 e c_3.

RISOLUZIONE (guida). Indichiamo con O il punto d'incontro delle diagonali del quadrilatero CFDE.
Circa il punto a), basta far vedere che i lati opposti del quadrilatero sono paralleli (perché sono paralleli?) e che un suo angolo interno è retto (quale?).
Riguardo al punto b), occorre constatare che gli angoli $O\hat{C}E$ e $O\hat{E}C$ sono uguali (perché sono uguali?) e parimenti sono uguali gli angoli $H\hat{C}E$ e $H\hat{E}C$ (perché lo sono?). Siccome $O\hat{C}E+H\hat{C}E=1$ retto allora … $H\hat{E}O$ è un angolo retto. Analogamente per l'angolo $K\hat{F}O$. Si conclude che … .

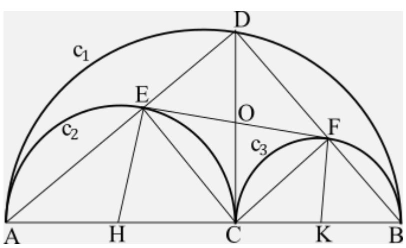

FIG. 18

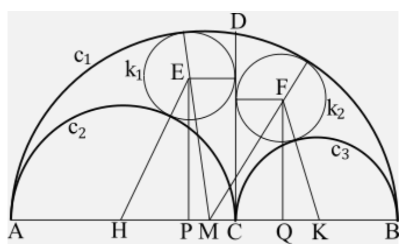

FIG. 19

ESERCIZIO 2. La corda CD divide l'arbelo in due parti (Fig. 19). In ciascuna di esse si inscriva una circonferenza. Entrambe le circonferenze inscritte sono tangenti alla corda CD e alla semicirconferenza c_1; si chiami allora k_1 la circonferenza tangente a c_2 e k_2 quella tangente alla semicirconferenza c_3. Dimostrare che le due circonferenze k_1 e k_2 sono uguali (per questo sono chiamate *cerchi gemelli di Archimede*).

RISOLUZIONE (guida). Indichiamo con E il centro della circonferenza k_1 e con F quello di k_2. Siano inoltre P e Q le proiezioni ortogonali su AB dei punti E ed F nell'ordine. Una volta constatato che i segmenti PC e CQ sono uguali rispettivamente ai raggi r_1 e r_2 delle due circonferenze k_1 e k_2, avremo dimostrato la proprietà quando avremo dimostrato che $r_1=r_2$.

Poniamo allora $\overline{AC}=2a$ e $\overline{CB}=2b$. In virtù del teorema di Pitagora, applicato sia al triangolo EPH sia al triangolo EPM, si ha: $\overline{EH}^2-\overline{HP}^2=\overline{EM}^2-\overline{PM}^2$. Da questa relazione, dopo alcune considerazioni, segue:

$$(a+r_1)^2-(a-r_1)^2=(a+b-r_1)^2-(a-b-r_1)^2$$

e da qui, risolvendo rispetto ad r_1, si trova:

$$r_1 = \frac{ab}{a+b}.$$

Ragionando in modo analogo sui triangoli FQK e FQM, si ottiene la relazione: $\overline{FK}^2 - \overline{QK}^2 = \overline{FM}^2 - \overline{QM}^2$.
Dalla quale segue:

$$(b+r_2)^2 - (b-r_2)^2 = (a+b-r_2)^2 - (a-b+r_2)^2$$

e, risolvendo rispetto ad r_2, si ottiene:

$$r_2 = \frac{ab}{a+b}.$$

La conclusione è ovvia.

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

DOMANDE.

1. Il tuo fratellino di 10 anni è alle prese col cerchione di una ruota di bicicletta. Gli è stato assegnato come compito dal suo maestro di misurare la lunghezza del cerchione ed è in difficoltà, non sa come muoversi. Chiede perciò il tuo aiuto. Come pensi di aiutarlo?
2. Scegli a caso una delle cifre decimali di π. Qual è la probabilità che sia un numero pari? Qual è la probabilità che sia il numero “0”?
3. Una circonferenza è lunga 25 cm. Quanto misura l’angolo al centro corrispondente ad un arco lungo 10 cm?
4. Un cerchio ed il settore circolare che si ottiene intersecandolo con un angolo al centro ampio 48° sono due superfici commensurabili. È vero?
5. Un cerchio di dato raggio è diviso in due parti da una sua corda. Vuoi determinare le aree di queste due parti. Cosa ti occorre e come procedi?
6. Intorno ad una circonferenza è distesa un’altra circonferenza, concentrica alla prima. Il raggio della seconda circonferenza supera di un metro quello della prima. È possibile sapere di quanto la seconda circonferenza è più lunga della prima o i dati sono insufficienti? È possibile sapere di quanto il cerchio delimitato dalla seconda circonferenza è più esteso di quello delimitato dalla prima o i dati sono insufficienti?
7. È vero che un grado sessagesimale è la sessantesima parte dell’angolo retto, mentre il radiante è la novantesima parte dell’angolo retto?
8. In una circonferenza di centro O e raggio 1 si traccia il diametro AB e sulla retta tangente in A si prendono, da parti opposte di A, il punto C tale che l’angolo $A\hat{O}C$ misuri 30° ed il punto D tale che il segmento CD sia lungo 3. È vero che la lunghezza di BD esprime un’approssimazione di π, esatta fino alla 4ª cifra decimale?

RISPOSTE.

1. Non puoi certo pretendere di spiegargli la formula $C=2\pi r$. Puoi servirti di un metodo sperimentale. Ad esempio puoi adattare al cerchione un filo flessibile e inestensibile in modo da farlo coincidere esattamente con la circonferenza. A questo punto è sufficiente misurare la lunghezza del filo (vale a dire la *circonferenza rettificata*). Si tratta ovviamente di una misura approssimata.

2. Nell'ipotesi, sensata se si vuole ma comunque non dimostrata, che le cifre decimali di π siano distribuite in modo uniforme, siccome tali cifre sono 10, di cui 5 pari e 5 dispari, è evidente che la probabilità che la scelta casuale cada su una cifra pari è $1/2$ e quella che cada su "0" è $1/10$.
3. L'angolo al centro misura $10/25$ dell'angolo giro, vale a dire 144°.
4. Sì. Infatti il rapporto fra il cerchio ed il settore è un numero razionale e precisamente $\frac{360}{48}$.
5. Occorre conoscere la lunghezza della corda e la misura dell'angolo α sotto cui essa è vista dal centro del cerchio o, comunque, dati sufficienti a calcolare quelle grandezze. In questo modo è possibile calcolare l'area A' del settore circolare relativo all'angolo al centro α e l'area A" del triangolo avente un lato coincidente con la corda e vertice nel centro del cerchio. La continuazione è banale: una delle due parti in cui il cerchio è diviso dalla corda ha area $A=A'-A''$; l'altra si ottiene sottraendo A dall'area del cerchio.
6. Indichiamo con r metri il raggio (non conosciuto) della circonferenza interna. Il raggio della circonferenza esterna è allora: $R=r+1$ metri e la lunghezza di questa circonferenza supera quella della prima della quantità ΔL tale che: $\Delta L=2\pi(r+1)-2\pi r=2\pi$ (m). I dati, perciò, bastano per risolvere la questione: la circonferenza esterna è più lunga di quella interna di circa 6,28 m, qualunque sia il raggio della circonferenza interna. Essi sono, invece, insufficienti nel secondo caso. Adesso, infatti, con le medesime posizioni precedenti, la differenza ΔA fra le due aree è: $\Delta A=\pi(r+1)^2-\pi r^2=\pi(2r+1)$ (m²). Quantità incognita finché non si stabilisce il valore di r.
7. No, tutto sbagliato. Il grado sessagesimale è la novantesima parte dell'angolo retto, mentre il radiante è l'ampiezza dell'angolo che, su una qualsiasi circonferenza avente il centro nella sua origine, intercetta un arco lungo quanto il raggio della circonferenza.
8. È vero. Per la spiegazione vedere "lettura" successiva.

LETTURA

Curiosità intorno a π.

Sul numero π ci sono molte curiosità interessanti. Ci soffermiamo brevemente su alcune di esse.

- La prima è legata al modo anglosassone (3/14) di indicare il 14 marzo. E poiché 3,14 è l'approssimazione più conosciuta di π, ciò fa del 14 marzo il **pigreco day**, vale a dire il giorno dell'anno dedicato al numero π.
  Notiamo, come ulteriore curiosità, che il 14 marzo è anche il giorno in cui è nato Albert Einstein (1879-1955).
- Alcuni storici attribuiscono al matematico inglese **William Oughtred** (1574-1660) l'aver usato per la prima volta la lettera π per indicare il rapporto fra la lunghezza di una circonferenza e il suo diametro, altri lo attribuiscono ad un matematico gallese di nome **William Jones** (1675-1749). In ogni caso, fu il largo uso che ne fece il grande **Leonhard Euler** (1707-1783) che determinò l'affermarsi di quel simbolo.
- Prima di Euclide e di Archimede, che ne calcolò il valore esatto fino alla seconda cifra decimale, al rapporto fra la circonferenza e il suo diametro erano attribuiti valori diversi e, soprattutto, non c'era consapevolezza né del fatto che si trattasse di un valore costante né del fatto che esso fosse uguale al rapporto fra l'area del cerchio e il quadrato del raggio.

Ad esempio, il problema n. 50 del Papiro di Rhind suggerisce di trovare l'area di un cerchio di diametro 9 *khet*, uguagliandola a quella di un quadrato di lato 8 *khet*, per cui l'area del cerchio è di 64 *setat*. Non c'è traccia ovviamente della nostra formula $A=\pi r^2$. Però di essa ci possiamo servire per valutare quale valore gli **Egizi** attribuivano al rapporto A/r^2. Siccome allora A=64 (setat) ed $r=9/2$ (khet), si ottiene:

$$\frac{A}{r^2}=\frac{64}{\left(\frac{9}{2}\right)^2}=\frac{64\times 4}{81}\approx 3{,}16\,.$$

Che è per l'appunto il valore che gli Egizi attribuivano a π.
Per i **Babilonesi** invece quel rapporto valeva all'incirca 3,125.
Presso gli **Ebrei** del X sec. a.C. era attribuito a π il valore 3. Così perlomeno si accenna nella Bibbia, nel III libro dei Re, cap. VII, versetto 23, dove si parla di un gran bacino di bronzo, interamente rotondo, di dieci cubiti di diametro e tale che una corda di trenta cubiti l'avrebbe cinto tutto intorno. Il riferimento è ad un particolare del Tempio di Salomone in Gerusalemme.
Come abbiamo già detto, le cose migliorarono con Archimede, che fornì di π un'approssimazione corretta fino alla seconda cifra decimale ($\pi\approx 3{,}14$).
L'approssimazione di Archimede fu poi migliorata dal matematico e astronomo alessandrino **Claudio Tolomeo** (II sec. d.C.), il quale riuscì a trovare per π il valore $\frac{377}{120}$ (≈3,1416). Questo risultato è contenuto nella sua principale opera, oggi conosciuta col nome di ***Almagesto***.
Nel XV secolo il matematico arabo **al-Kashi** (morto verso il 1436) riuscì a determinare una approssimazione spinta fino alla 15ª cifra decimale esatta.
In seguito, ancor prima dell'invenzione dei calcolatori automatici, si riuscirono a trovare di π, ad opera di matematici più o meno noti, oltre 700 cifre decimali esatte.
Oggi, nell'era del computer, il numero di queste cifre è cresciuto a dismisura. Addirittura alcuni anni addietro, dei ricercatori giapponesi hanno pubblicato un libro pieno solo di tali cifre.

- Nel 1761 lo scienziato svizzero **Johann Heinrich Lambert** (1728-1777) dimostrò che **π è un numero irrazionale** e perciò non può essere espresso come rapporto di due interi.
- Esistono tuttavia tentativi di esprimere con rapporti di numeri interi alcune approssimazioni di π.
  Uno è quello di Archimede, per il quale la frazione $\frac{22}{7}$ fornisce un'approssimazione di π esatta fino alla 2ª cifra decimale.
  Un altro è quello di Tolomeo, per il quale la frazione $\frac{377}{120}$ fornisce un'approssimazione di π esatta fino alla 3ª cifra decimale.
  Ne descriviamo ancora uno trovato dal matematico e astronomo cinese **Tsu Ch'ung Chi** (430-501). Si considera il numero 113355 e si effettua il rapporto fra il numero formato dalle sue ultime tre cifre e quello formato dalle sue prime tre. Vale a dire il rapporto $\frac{355}{113}$. Si ottiene un'approssimazione di π esatta fino alla 6ª cifra decimale:
  $$\pi\approx\frac{355}{113}\approx 3{,}141592\,.$$
- Si fanno tutt'oggi studi abbastanza seri, ma anche un po' divertenti, finalizzati a trovare delle tecniche idonee a memorizzare il maggior numero possibile di cifre di π. In questo contesto, in molte lingue è stata trovata almeno una frase o una poesia o una filastrocca utile allo scopo. Un esempio, in lingua italiana, è il seguente:
  «Ave o Roma o madre gagliarda di latine virtù».

Per ottenere le cifre di π è sufficiente sostituire ogni parola della frase con il numero di lettere che la compongono. In questo modo:

Ave	o	Roma	o	madre	gagliarda	di	latine	virtù
3,	1	4	1	5	9	2	6	5

- Del numero π esistono anche costruzioni geometriche che ne forniscono dei valori approssimati [9]. Una di queste è stata ideata dal matematico e gesuita polacco **Adam Adamandy Koskanski** (1631-1700), che la descrive in una sua opera del 1685. Lo facciamo anche noi.

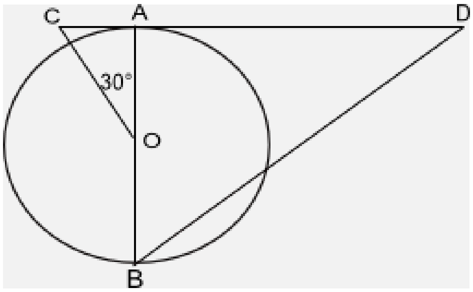

FIG. 20

In una circonferenza di centro O e raggio 1 (Fig. 20) si traccia il diametro AB e sulla retta tangente in A si prendono, da parti opposte di A, il punto C tale che l'angolo AÔC misuri 30° ed il punto D tale che il segmento CD sia lungo 3. La lunghezza di BD esprime un'approssimazione di π, esatta fino alla 4ª cifra decimale. In effetti, siccome: $\overline{AB}=2$, $\overline{AC}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\overline{AD}=3-\frac{\sqrt{3}}{3}$, risulta:

$$\overline{BD}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{AD}^2}=\sqrt{2^2+\left(3-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{40}{3}-2\sqrt{3}}\approx 3{,}14153\,.$$

S'intende che il doppio della lunghezza di BD è, ovviamente con approssimazione, uguale alla misura della circonferenza considerata.

[9] Cfr.: W. Rouse Ball, *Recreations mathématiques et problèmes des temps anciens e modernes*, deuxième partie, Paris, Librairie Scientifique A. Hermann, 1908, pag. 301 e segg..