Prerequisiti:

- Conoscenze approfondite degli insiemi numerici.
- Conoscenze adeguate di calcolo algebrico.

L'unità riguarda il 2° biennio di tutte le scuole superiori.

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:

- *enunciare correttamente il principio d'induzione e applicarlo in casi semplici*
- *produrre congetture e sostenerle con ragionamenti corretti*

Gli allievi hanno inoltre la possibilità di consolidare la loro tecnica nel calcolo algebrico.

39.1 Il principio d'induzione.

Verifiche.

Una breve sintesi per domande e risposte.

Il principio d'induzione

Unità 39

39.1 IL PRINCIPIO D'INDUZIONE

39.1.1 Una forma di ragionamento di cui si fa largo uso nelle dimostrazioni matematiche è quella basata sul cosiddetto "principio d'induzione". È un tipo di ragionamento che è usato quando si devono dimostrare proprietà dei numeri naturali.

Al **principio d'induzione** fece sistematicamente ricorso il matematico piemontese **Giuseppe Peano** (1858-1932) nella costruzione assiomatica dei numeri naturali [(1)]. E questo fatto a volte induce a pensare che egli ne sia stato l'autore. Ma è un errore, anche se, ad onor del vero, la formulazione del principio fornita da Peano è quella che al giorno d'oggi tutti adoperano. In realtà, il matematico e filosofo francese **Blaise Pascal** (1623-1662) enunciò il "principio" e lo utilizzò fin dal 1654, anche se l'opera che lo contiene – *Trattato sul triangolo aritmetico* – fu pubblicata postuma nel 1665. Ed inoltre il "principio" era già stato applicato esplicitamente dallo scienziato e umanista messinese **Francesco Maurolico** (1494-1575) nell'opera *Arithmeticorum libri duo* (1575).

Nella formulazione di Peano, il **PRINCIPIO D'INDUZIONE** è il seguente:

SE

zero gode di una proprietà

e SE

ogni volta che un numero (naturale) gode di quella proprietà lo stesso vale per il successivo del numero

ALLORA

tutti i numeri (naturali) godono di quella proprietà.

Possiamo esprimere il principio in forma simbolica. Ricordato che $\mathbb{N}$ rappresenta l'insieme dei numeri naturali, indichiamo con **a*** il successivo del generico numero naturale **a**. Ebbene, considerata una proprietà P e indicato con P(x) il fatto che x goda della proprietà P, il principio d'induzione, in forma simbolica, è il seguente:

$$\mathbf{P: \{P(0) \wedge (\forall a \in \mathbb{N}, P(a) \rightarrow P(a^*))\} \rightarrow (\forall x \in \mathbb{N}, P(x))}$$

Come puoi constatare, l'applicazione del principio d'induzione richiede due soli passaggi, ma fondamentali.

Per concludere, in base al **principio d'induzione**, che una determinata proprietà P vale per ogni numero naturale, bisogna dimostrare che:

1) P vale per 0: questo fatto si chiama ***base dell'induzione***;
2) se P vale per un generico numero naturale n allora vale anche per n+1: questo fatto si chiama ***passo induttivo***.

Quando questi due fatti saranno stati provati si potrà concludere che la proprietà P vale per ogni numero naturale.

[1] Cfr.: Unità 87 – Il metodo assiomatico, N° 87.3

A volte la base dell'induzione è P(1), cioè P vale per 1, o anche P(2) o più in generale P(k). In questo caso per il passo induttivo bisogna supporre $n>k$ e la proprietà P vale ovviamente per tutti i numeri naturali non minori di k. In altri termini, P(n) è vera per $n \geq k$.

39.1.2 Alcune brevi riflessioni allo scopo di prevenire, forse, qualche tua obiezione.

- Prima obiezione: *Se verifico che P vale per "molti" n, non posso concludere che vale per "ogni" n, senza tante storie?*

Questa obiezione è piuttosto debole, ingenua perfino: "molti" o anche "moltissimi" o addirittura "infiniti" non vuol dire "tutti".

A titolo di semplice esempio, considera il seguente polinomio in n:

$$A(n) = n^2 - 17n + 293.$$

Se attribuisci ad n i valori interi da 0 a 20, puoi verificare facilmente che ottieni sempre un numero primo. Se da ciò concludi che A(n) è un numero primo per ogni n, dici una sciocchezza. Infatti:

$$A(21) = 21^2 - 17 \times 21 + 293 = 377 = 13 \times 29.$$

In realtà, esistono proposizioni matematiche che sono verificate in moltissimi casi, addirittura in tutti i casi in cui è possibile verificarle. Ma questo non basta per concludere che sono vere, giacché non è stato possibile, almeno fino ad oggi, fornire una dimostrazione della loro validità. I matematici le chiamano *questioni aperte*. Avremo occasione di incontrare alcune di queste questioni, che qui ci limitiamo solamente ad enunciare:

- *I numeri primi di Fermat sono in numero finito* (cfr.: prossimo N° 39.1.5).
- *Congettura di Polignac* (cfr.: U54 – Insiemi numerici e infinito, N° 54.2.4).
- (Le seguenti proposizioni sono presenti tutte in U87 – Il metodo assiomatico, N° 87.3.6):
  Esistono infiniti numeri perfetti;
  Esistono infinite coppie di numeri amici;
  Esistono infinite coppie di numeri primi gemelli;
  Congettura di Goldback.

- Seconda obiezione: *Se suppongo che la proprietà P vale per un generico numero n, non posso concludere, senza tanti fronzoli, che vale per ogni n? Che senso ha, allora, pensare di dimostrare che vale per n+1?*

Ecco, questa obiezione è più interessante e la risposta potrebbe non convincerti. Proviamo a darla lo stesso. "Supporre" che la proprietà P valga per un generico n non significa "avere la garanzia" che P valga effettivamente per ogni n. È solo un'ipotesi. Questa garanzia c'è, al contrario, quando hai verificato che P vale per $n=0$ e, ammesso che P valga per n, hai realmente provato che vale anche per $n+1$. Come recita, appunto, il principio d'induzione. In realtà, se la proprietà vale per n=0, allora per il passo induttivo vale per $n=1$ e quindi per $n=2$, e poi per $n=3$, e così via per ogni n.

- Terza obiezione: *Non basta la dimostrazione del solo passo induttivo per concludere che una data proprietà è vera? Perché mi serve anche verificare la base dell'induzione?*

Se fosse così potremmo dimostrare l'assurdo che $2^n<0$. In effetti si dimostra facilmente che se la proprietà è vera quando ad n si assegna k (cioè $2^k<0$), essa continua ad esser vera quando ad n si assegna k+1 (infatti: $2^{k+1}=2^k \cdot 2<0$). Succede però che la base dell'induzione ($2^0<0$) è falsa e quindi non possiamo concludere che la proprietà suddetta sia vera in base al principio d'induzione.

Insomma, il principio d'induzione richiede che siano chiamati in causa e verificati entrambi i fatti suddetti: base dell'induzione e passo induttivo.

- Ancora una considerazione. Il ragionamento basato sul principio d'induzione (detto anche ***dimostrazione per induzione***) è pur sempre un ragionamento di tipo deduttivo, come mostreranno meglio gli esempi che forniremo di qui a poco. Esso è cosa completamente diversa dal ***metodo induttivo***, basato sulla cosiddetta "induzione empirica", secondo la quale da una serie di osservazioni particolari si procede all'enunciazione di una regola generale, che però rimane a livello di ipotesi non dimostrata, di congettura, e va bene fintantoché non viene soppiantata da un'altra ipotesi più convincente. L'induzione empirica è tipica delle scienze naturali, della fisica, della medicina, eccetera. Anche l'induzione statistica, cui faremo un cenno nel prosieguo degli studi, si può considerare una forma particolare di induzione empirica.

39.1.3 Illustriamo, adesso, anche a maggior chiarimento di quanto detto fin qui, alcune applicazioni del principio d'induzione.

♦ PROPRIETÀ 1. La somma dei primi n numeri naturali, a partire da 1, vale:

$$\frac{n(n+1)}{2}\ .$$

DIMOSTRAZIONE. Qui la base dell'induzione è 1 e la proprietà, che in simboli è scritta in questo modo:

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

è certamente vera per $n=1$. Supponiamo che essa sia vera quando ad n si assegna il valore k, vale a dire supponiamo che sia:

$$1+2+3+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2}.$$

Ci proponiamo di far vedere che è vera quando ad n si assegna $k+1$. Di fatto si ha:

$$1+2+3+\ldots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

In conclusione, per il principio d'induzione, la formula vale per ogni naturale $n>0$.

♦ PROPRIETÀ 2. Il numero delle diagonali di un poligono di n lati è:

$$\frac{n(n-3)}{2}\ .$$

DIMOSTRAZIONE. Qui la base dell'induzione è 3 e la proprietà è vera per $n=3$: il triangolo, infatti, non ha diagonali. Supponiamo che essa sia vera quando ad n si attribuisce il valore k e facciamo vedere che è ancora vera quando ad n si assegna k+1. Per questo ci riferiamo alla figura 1, nella quale AB è un lato del poligono di k lati (nel caso specifico k=5), che sparisce quando si passa al poligono di $k+1$ lati ed è sostituito dai lati AC e CB. Ebbene, il poligono di $k+1$ lati ha, in aggiunta alle diagonali del poligono di k lati (in rosso in figura), da cui è ottenuto, la diagonale AB (tratteggiata in figura) e le diagonali (in blu in figura) che si ottengono congiungendo il vertice C con i $k-2$ vertici del poligono di $k+1$ lati (e $k+1$ vertici), che siano diversi dai vertici C, A, B; pertanto le diagonali del poligono di $k+1$ lati sono in numero di:

$$\frac{k(k-3)}{2}+(k-2)+1=\frac{k(k-3)+2(k-1)}{2}=\frac{(k+1)(k-2)}{2}\ .$$

In conclusione, per il principio d'induzione, la proprietà vale per ogni naturale $n\geq3$.

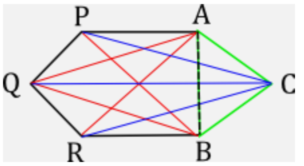

FIG. 1

♦ PROPRIETÀ 3. Se un insieme è formato da n elementi, l'insieme delle sue parti è formato da 2^n elementi.

DIMOSTRAZIONE. La proprietà è vera per $n=0$: l'insieme delle parti dell'insieme vuoto $\emptyset$ è, infatti, l'insieme $\{\emptyset\}$, che evidentemente ha un solo elemento. Ammettiamo ora che la proprietà sia vera quando ad n si attribuisce il valore k e facciamo vedere che continua ad essere vera quando ad n si assegna $k+1$. Per questo basta costatare che, nel passaggio dall'insieme di k elementi a quello di $k+1$ elementi, l'insieme delle parti del nuovo insieme comprende, come elementi, tutti i sottoinsiemi dell'insieme di k elementi, vale a dire 2^k elementi, più i sottoinsiemi che si ottengono dai precedenti inserendo in ognuno di essi il (k+1)-esimo nuovo elemento, e questi sottoinsiemi sono evidentemente ancora in numero di 2^k. L'insieme delle parti dell'insieme di $k+1$ elementi è dunque formato da $2\cdot 2^k=2^{k+1}$ sottoinsiemi.

In conclusione, per il principio d'induzione, la proprietà vale per ogni naturale n.

39.1.4 Dallo studio del precedente paragrafo 39.1.3 si evince un limite rimarchevole del principio d'induzione: la proprietà (o la formula) che si deve dimostrare deve essere conosciuta preventivamente o quantomeno deve essere congetturata, ipotizzata. Il principio dunque non consente di scoprire proprietà, non ha cioè valore euristico ma solo dimostrativo.

Sorge allora un dubbio: **come si fa ad ipotizzare una certa formula?**

Ebbene, uno dei modi possibili è di fare alcuni tentativi che possano aiutare a congetturarla.

A chiarimento di ciò esplicitiamo il procedimento che porta a congetturare una formula che fornisca il numero di elementi dell'insieme delle parti P(A) di un insieme A di n elementi.

Se $A=\emptyset$, $P(A)=\{\emptyset\}$;
se $A=\{a\}$, $P(A)=\{\emptyset,\{a\}\}$;
se $A=\{a,b\}$, $P(A)=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$;
se $A=\{a,b,c\}$, $P(A)=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$.

Dunque:

se A contiene 0 elementi, P(A) ne contiene 1, cioè 2^0;
se A contiene 1 elemento, P(A) ne contiene 2, cioè 2^1;
se A contiene 2 elementi, P(A) ne contiene 4, cioè 2^2;
se A contiene 3 elementi, P(A) ne contiene 8, cioè 2^3.

Possiamo allora estendere il ragionamento e ipotizzare che se A contiene n elementi, P(A) ne contiene 2^n. A questo punto si prova a dimostrare la congettura utilizzando il principio d'induzione. Se la dimostrazione va a buon fine la congettura non è più tale e diventa una proprietà.

39.1.5 UNA CURIOSITÀ STORICA. Il francese **Pierre de Fermat** (1601-1665), letterato e giurista, matematico per hobby, enunciò moltissime proprietà dei numeri naturali, dei quali non fornì però le dimostrazioni, pur dichiarando di averle scoperte. Le dimostrazioni, nondimeno, furono date in seguito, in tempi diversi, da altri matematici, a giustificazione del fatto che le proprietà enunciate da Fermat erano vere.

Una però fece eccezione. Precisamente egli congetturò che ogni numero avente la forma $2^{2^n}+1$, dove n è un qualsiasi numero naturale, fosse un numero primo. In realtà, come si può verificare facilmente, si ottiene un numero primo per $n=0$, $n=1$, $n=2$, $n=3$, $n=4$, ma per $n=5$ si ottiene il numero 4.294.967.297 che è uguale a $641\times 6.700.417$ e perciò non è primo. Questo fu trovato per la prima volta dal matematico svizzero **Leonhard Euler** (1707-1783) circa un secolo più tardi (1732). Se qualcuno pensa che la cosa sia stata semplice o addirittura banale, tenga presente che a quel tempo i conti andavano fatti solo con "carta e penna", senza l'ausilio di strumenti di calcolo automatico.

Ovviamente l'avvento di tale strumento semplificò decisamente la ricerca in questo campo. Ebbene, la cosa straordinaria è che a tutt'oggi non sono stati trovati altri numeri primi aventi la forma suddetta, oltre ai 5 già elencati dallo stesso Fermat e soprattutto i matematici non sono in grado di dire se ne esistano altri o se non ne esistano: è una "questione aperta".

Detto che i numeri aventi la forma $2^{2^n}+1$ sono oggi chiamati "numeri di Fermat" (in particolare, "numeri primi di Fermat", qualora essi siano effettivamente primi), le malelingue sostengono che Fermat abbia ragionato in questo modo: il numero $f_n=2^{2^n}+1$ è primo per $n=0$ $(f_0=3)$, $n=1$ $(f_1=5)$, $n=2$ $(f_2=17)$, $n=3$ $(f_3=257)$, $n=4$ $(f_4=65.537)$; affermo che è primo per ogni n. Congettura errata, come si scoprì in seguito, ma soprattutto non dimostrabile con il principio d'induzione.

Forse non sapremo mai se questa supposizione malevola risponda o meno a verità. Che però Fermat conoscesse il principio d'induzione è quasi certo: egli era infatti amico di **Pascal**, con il quale era in corrispondenza epistolare e, come abbiamo detto, Pascal aveva enunciato il principio d'induzione nel 1654, anche se poi l'opera che lo contiene sarebbe stata pubblicata postuma nel 1665, proprio l'anno della morte di Fermat.

39.1.6 Concludiamo con alcuni esercizi particolarmente interessanti per la modalità di dimostrazione che, comunque, utilizza il principio d'induzione.

ESERCIZIO 1. Si considerino le due funzioni della variabile naturale n: n^2 e $2n+1$. Si può facilmente controllare che per $0\le n\le 2$ risulta: $n^2<2n+1$.

Invece per $n\ge 3$ si ha: $n^2>2n+1$. Dimostrare questo fatto per induzione.

RISOLUZIONE. Intanto è evidente che la relazione è vera per $n=3$. Ammettiamo che sia vera quando ad n si assegna il valore k, ossia $k^2>2k+1$, e dimostriamo che è ancora vera quando ad n si assegna $k+1$, ossia: $(k+1)^2>2(k+1)+1$. Ora si ha:

$$(k+1)^2=k^2+2k+1>(2k+1)+2k+1=2k+2k+2.$$

Tenendo presente che stiamo ragionando per $k\ge 3$, risulta evidentemente $2k\ge 6$ e pertanto:

$$2k+2k+2\ge 2k+8>2(k+1)+1.$$

In definitiva: $(k+1)^2>2(k+1)+1$. Che è ciò che volevamo dimostrare.

Per questo motivo, in virtù del principio d'induzione, possiamo concludere che per ogni naturale $n\ge 3$ risulta: $n^2>2n+1$.

ESERCIZIO 2. Si considerino le due funzioni della variabile naturale n: 2^n ed n^2. Si può agevolmen-

te controllare che per $0 \leq n \leq 4$ il valore della prima funzione è a volte maggiore, a volte minore ed a volte addirittura uguale a quello della seconda.
Invece per $n \geq 5$ si ha: $2^n > n^2$. Dimostrare ciò per induzione.
RISOLUZIONE. Intanto è evidente che la relazione è vera per $n=5$. Ammettiamo allora che sia vera quando ad n si assegna il valore k, ossia $2^k > k^2$, e dimostriamo che è ancora vera quando ad n si assegna k+1, ossia $2^{k+1} > (k+1)^2$. Ora si ha:

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2 \cdot k^2.$$

D'altro canto, in virtù della proprietà dimostrata nel precedente esercizio 1, per $k \geq 5$ risulta certamente $k^2 > 2k+1$. Ragion per cui si ha:

$$2 \cdot k^2 > k^2 + (2k+1) = (k+1)^2.$$

In definitiva: $2^{k+1} > (k+1)^2$. Che è ciò che volevamo dimostrare.
Per questo motivo, in virtù del principio d'induzione, possiamo concludere che per ogni naturale $n \geq 5$ risulta: $2^n > n^2$.

ESERCIZIO 3. Dimostrare che il numero $5^{n+2} + 7^{2n+1}$ è divisibile per 4, qualunque sia il naturale n.
DIMOSTRAZIONE. Per $n=0$ il numero diventa uguale a 32, che è divisibile per 4; quindi la proprietà è vera per $n=0$. Ammettiamo che sia vera quando ad n si assegna il valore k e facciamo vedere che continua ad essere vera quando ad n si assegna $k+1$.
Si tratta di far vedere sostanzialmente che il numero $5^{(k+1)+2} + 7^{2(k+1)+1}$ è divisibile per 4 sapendo che lo è il numero $5^{k+2} + 7^{2k+1}$.
Ora, il fatto che quest'ultimo numero sia divisibile per 4 implica l'esistenza di un intero m, non nullo, tale che: $5^{k+2} + 7^{2k+1} = 4m$, da cui segue: $7^{2k+1} = 4m - 5^{k+2}$. Si ha di conseguenza:

$$5^{(k+1)+2} + 7^{2(k+1)+1} = 5^{k+3} + 7^{2k+3} = 5^{k+3} + 49\left(4m - 5^{k+2}\right) = 5^{k+2}\,(5-49) + 49 \cdot 4m = 4\left(49m - 11 \cdot 5^{k+2}\right).$$

Osservato che il numero dentro le parentesi, nell'ultima espressione, è un intero (sai spiegare perché?), dobbiamo concludere che il numero ottenuto da quello considerato quando ad n si assegna k+1 è divisibile per 4.
In conclusione, per il principio d'induzione, la proprietà vale per ogni naturale n.

VERIFICHE

1. Ipotizzare una formula per la somma dei primi n numeri pari, a partire da 2, e verificare la congettura utilizzando il principio d'induzione.
2. Ipotizzare una formula per la somma dei primi n numeri dispari, a partire da 1, e verificare la congettura utilizzando il principio d'induzione.
3. È noto che, per ogni x reale e per ogni naturale n, risulta:

   $$1 - x^n = (1-x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}).$$

   Da qui, supponendo $x \neq 1$, segue:

   $$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x}.$$

   Dimostrare questa formula utilizzando il principio d'induzione.
4. ESERCIZIO RISOLTO. Dimostrare, utilizzando il principio d'induzione, che risulta:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Dopo aver dimostrato che la somma S di tutti i possibili prodotti ab, dove a, b sono elementi dell'insieme {1,2,... ,n}, è tale che:

$$S=\frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

tenendo presenti le due formule precedenti, calcolare:

a) la somma S' di tutti i possibili prodotti ab, con $a<b$;

b) la somma S" di tutti i possibili prodotti ab, con $a\leq b$.

RISOLUZIONE. Riguardo alla prima parte, constatiamo che la formula è vera per n=1. Ammettiamo che sia ancora vera per un generico n e dimostriamo che è vera per n+1. Ora, per n+1, si ha:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+(n+1)^2=$$

$$=\frac{1}{6}(n+1)(2n^2+7n+6)=\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)=\frac{1}{6}(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1].$$

Dunque la formula vale ancora per n+1 e perciò è vera per ogni n.

La dimostrazione della seconda formula l'abbiamo già proposta in passato, ma adesso la vogliamo ricostruire. Si tratta di considerate la seguente somma:

$$\begin{aligned}S = {} & 1\times1 + 1\times2 + 1\times3 + \ldots + 1\times n + \\ & + 2\times1 + 2\times2 + 2\times3 + \ldots + 2\times n + \\ & + 3\times1 + 3\times2 + 3\times3 + \ldots + 3\times n + \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ & + n\times1 + n\times2 + n\times3 + \ldots + n\times n.\end{aligned}$$

Sommando colonna per colonna, si ha:

$$\begin{aligned}S = {} & (1+2+3+\ldots+n)\times1 + \\ & + (1+2+3+\ldots+n)\times2 + \\ & + (1+2+3+\ldots+n)\times3 + \ldots + \\ & + (1+2+3+\ldots+n)\times n = (1+2+3+\ldots+n)^2=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.\end{aligned}$$

A questo punto, è evidente che, per ragioni di simmetria rispetto alla diagonale dei fattori 1×1, 2×2, 3×3, ... , $n\times n$, si ha:

$$2\,S'+(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)=S,$$

e perciò, tenendo conto delle due formule precedenti, a conti fatti si trova:

$$S'=\frac{1}{24}n\,(n-1)\,(n+1)\,(3n+2).$$

D'altro canto, $S'' = S' + (1+2+3+\ldots+n)^2$ e, dunque, dopo qualche calcolo:

$$S''=\frac{1}{24}n\,(n+1)\,(n+2)\,(3n+1).$$

5. Calcolare la somma dei quadrati dei primi 20 numeri naturali pari a partire da 2.

[**R**. Si ha: $S=\ldots=2^2(1^2+2^2+\ldots+20^2)=\ldots=11480$]

6. Dimostrare, utilizzando il principio d'induzione, che risulta:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=(1+2+3+\ldots+n)^2.$$

Questa formula esprime il cosiddetto ***teorema di Nicomaco*** (da **Nicomaco** di Gerasa, I sec. d.C.)

7. Dimostrare, utilizzando il principio d'induzione, che il numero n^2+n+4 è pari per ogni n naturale.

8. Dimostrare, utilizzando il principio d'induzione, che:
a) il prodotto di 3 qualsiasi numeri naturali consecutivi è divisibile 6;
b) il prodotto di 4 qualsiasi numeri naturali consecutivi è divisibile per 24.

9. Dopo aver dimostrato, mediante il principio d'induzione, che il numero $2n^3+3n^2+n$ è divisibile per 3 per ogni n naturale, dimostrare, ancora col principio d'induzione, che il numero n^4-n^2+1, qualunque sia il numero naturale n, non è invece divisibile per 3.

10. Dimostrare per induzione che, per ogni naturale n, il numero $5^n+2\cdot 3^{n-1}+1$ è divisibile per 8.

11. Dimostrare per induzione che, per ogni naturale n, il numero $1^{2n+1}+2^{2n+1}+3^{2n+1}$ è divisibile per 6.

12. Dimostrare per induzione che, per ogni naturale n, il numero $2^{n+2}+3^{2n+1}$ è divisibile per 7.

13. Dimostrare per induzione che, per ogni naturale $n>1$, si ha: $3^n>n+2$.

14. Posto che a sia un numero reale positivo, dimostrare per induzione che, per ogni naturale $n>1$, si ha: $(1+a)^n>1+na$.

15. Esiste un numero naturale $\overline{n}$ tale che per $n\geq\overline{n}$ risulta: $(1+\alpha)^n>1+n\alpha+n\alpha^2$, dove n è un numero naturale ed α un qualsiasi numero reale positivo. Determinare $\overline{n}$ e fornire un'esauriente spiegazione del procedimento seguito.

16. ESERCIZIO RISOLTO (parzialmente). Dimostrare che, per ogni α reale tale che $0<\alpha<1$ e per ogni naturale $n>0$, risulta:

$$(1-\alpha)^n<\frac{1}{1+n\alpha}.$$

RISOLUZIONE (traccia). La base dell'induzione è provata facilmente. Basta provare che si ha: $(1-\alpha)(1+\alpha)<1$. Per dimostrare il passo induttivo bisogna provare che, ammesso che sia $(1-\alpha)^n<\frac{1}{1+n\alpha}$ si ha: $(1-\alpha)^{n+1}<\frac{1}{1+(n+1)\alpha}$. E per questo, tenendo presente l'ipotesi e fatte alcune debite considerazioni, basta provare che si ha: $(1-\alpha)(1+\alpha+n\alpha)\leq 1+n\alpha$. Disuguaglianza che si giustifica agevolmente esser vera.

17. ESERCIZIO RISOLTO (parzialmente). Dimostrare, sia per induzione sia con un procedimento diretto, che il numero $3^{2n}\cdot 4^n-1$ è divisibile per 5 e per 7, qualunque sia il numero naturale n.
RISOLUZIONE. Lasciamo a te la prima parte e ci occupiamo della seconda. Si ha:

$$3^{2n}\cdot 4^n-1=3^{2n}\cdot 2^{2n}-1=(3^2\cdot 2^2)^n-1=36^n-1.$$

È noto d'altronde che risulta:

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+a^2b^{n-3}+ab^{n-2}+b^{n-1}).$$

Ragione per cui si ha:

$$36^n-1=(36-1)\cdot P(n)=35\cdot P(n),$$

dove P(n) è un'espressione che contiene potenze, prodotti e somme di numeri naturali ed è perciò certamente un numero naturale. Il che prova che 36^n-1 e quindi anche $3^{2n}\cdot 4^n-1$ è divisibile per 35 e, di conseguenza, è divisibile sia per 5 sia per 7.

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

DOMANDE.

1 Cosa s'intende per *base* dell'induzione?

2 Cosa per *passo induttivo*?

3 Utilizzando il principio d'induzione, bisogna dimostrare che il numero n^2+n+2 è pari. Come va impostata la questione?

4 La funzione $f(n)=n^2-79n+1601$ dà luogo ad un numero primo quando ad n si attribuiscono i valori interi da 0 a 50. Per il principio di induzione possiamo concludere che essa genera numeri primi per ogni valore di n. È vero o falso?

5 La "dimostrazione per induzione" ed il "metodo induttivo" sono la stessa cosa?

6 Quanto vale la somma dei quadrati dei primi 10 numeri naturali dispari?

RISPOSTE.

1. La base del principio d'induzione è il più piccolo valore naturale per il quale si assume che la proprietà da dimostrare sia vera. Essa è di solito 0, ma può essere anche 1 o un qualsiasi altro naturale k. Naturalmente se la base è k, la proprietà vale, se vale, solo per i numeri naturali non minori di k.
2. Il passo induttivo è invece il principio in base al quale, se si assume che la proprietà vale per un dato naturale n, allora essa vale anche per n+1.
3. Posto $A(n)=n^2+n+2$, si osserva che $A(0)$ è pari. Si tratta allora di dimostrare che, se $A(k)$ è pari, anche $A(k+1)$ è pari. In effetti si ha:
$$A(k+1)=(k+1)^2+(k+1)+2=k^2+2k+1+k+1+2=(k^2+k+2)+2(k+1).$$
E questo numero è pari perché somma di due numeri pari.
4. In realtà, la formula genera numeri primi anche per valori di n che vanno da 51 a 79, ma per $n=80$ si ha $f(80)=1681$, che risulta essere il quadrato di 41. Dunque è falsa la conclusione precedente. D'altra parte si è richiamato erroneamente il principio di induzione.
5. No, non lo sono. La dimostrazione per induzione è una forma di ragionamento deduttivo basato sul principio d'induzione, mentre il metodo induttivo è una forma di ragionamento basato sull'esperienza. Col primo, una proprietà ipotizzata è dimostrata rigorosamente; col secondo, una proprietà verificata un certo numero di volte attraverso l'osservazione, è assunta come proprietà generale, ma rimane pur sempre una congettura non dimostrata e può essere smontata da un'eventuale osservazione che la contraddica.
6. Indicata con S la somma richiesta, si ha:
$$S=1^2+3^2+5^2+\cdots 19^2=(1^2+2^2+3^2+\cdots+19^2+20^2)-(2^2+4^2+\cdots+20^2)=$$
$$=\frac{1}{6}\cdot 20\cdot 21\cdot 41-2^2(1^2+2^2+\cdots+10^2)=\frac{1}{6}\cdot 20\cdot 21\cdot 41-4\cdot\frac{1}{6}\cdot 10\cdot 11\cdot 21=1330.$$