

Prerequisiti:

- Conoscenze approfondite degli insiemi numerici.
- Conoscenze adeguate di calcolo algebrico.

Questa unità riguarda il 2° biennio del Liceo Scientifico, compresa l'opzione scienze applicate, dell'Istituto Tecnico, Settore Tecnologico, e dell'Istituto Professionale.

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:

- *definire i numeri complessi e operare con essi*
- *rappresentare i numeri complessi nelle diverse modalità e, in particolare, in forma binomiale, vettoriale e trigonometrica*
- *calcolare la potenza n-esima e la radice n-esima di un numero complesso*

40.1 L'insieme dei numeri complessi.

40.2 Forma binomiale ed operazioni elementari in \mathbb{C} .

40.3 Equazioni di 2° grado in \mathbb{C} .

40.4 Ordine in \mathbb{C} .

40.5 Altre rappresentazioni dei numeri complessi.

40.6 Potenza n-esima e radici n-esime di un numero complesso.

40.7 Radici n-esime dell'unità.

Verifiche.

Una breve sintesi per domande e risposte.

Complementi: relazioni d'ordine.

Numeri complessi

Unità 40

40.1 L'INSIEME DEI NUMERI COMPLESSI

40.1.1 Consideriamo l'equazione: $x^2+1=0$. Essa è impossibile nell'insieme \mathbb{R} dei numeri reali, poiché per ogni x reale risulta $x^2+1>0$. Sicché, se vogliamo che l'equazione abbia soluzione, è necessario ampliare l'insieme totalmente ordinato dei numeri reali.

Lo facciamo costruendo un nuovo insieme numerico, detto dei numeri complessi, che, oltre a dar soluzione all'equazione suddetta, contiene (in senso opportuno) l'insieme dei reali.

Tuttavia, come avremo modo di spiegare, se questo nuovo insieme numerico conserva le proprietà delle operazioni fondamentali valide in \mathbb{R} (in particolare: addizione e moltiplicazione), perde una delle caratteristiche fondamentali di \mathbb{R} : l'ordinamento rispetto alla relazione “è maggiore” e, di conseguenza, quelle proprietà che a tale ordinamento sono connesse.

40.1.2 Si definisce insieme dei **numeri complessi** l'insieme \mathbb{C} delle coppie ordinate (a, b) di numeri reali tali che:

$$(a,b)=(c,d) \text{ se e solo se } a=c \text{ e } b=d,$$

$$(a,b)+(c,d)=(a+c, b+d),$$

$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd, ad+bc).$$

Un esercizio per te prima di procedere ed è l'unico che ti viene proposto di tal genere. Non ne troverai infatti altri nella sezione “verifiche”. Calcola i numeri reali x, y in modo che risulti:

$$(a) \quad (x+y, x-y)=(2,1); \quad (x+2y, 2x-y)=(\sqrt{2},0); \quad (x+y\sqrt{2}, x\sqrt{2}-y)=(\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

$$(b) \quad (x,y)+(2,3)=(0,0); \quad (x,y)+(3,-\sqrt{2})=\left(\frac{1}{3}, \sqrt{2}\right); \quad (x,y)+(\sqrt{2}-1, \sqrt{2})=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right).$$

$$(c) \quad (x,y)\cdot(2,1)=(1,0); \quad (x,y)\cdot(1,0)=(2,3); \quad (x,y)\cdot(2,1)=(1,1).$$

$$(d) \quad (x,y)\cdot(1,0)+(x+2, y-1)=(-1,1); \quad (2x+1, y-1)\cdot(1,1)+(x-y, 2x)=(2,x).$$

Ci soffermiamo adesso brevemente sulle ragioni che hanno indotto i matematici a formulare le precedenti definizioni per la relazione di “uguaglianza” e per le operazioni di “addizione” e “moltiplicazione”. Lo facciamo attraverso una “nota storica”.

Per la verità, sulla relazione “=” c'è poco da dire: due coppie ordinate, infatti, si identificano, per l'appunto, se e solo se le loro componenti sono identicamente uguali.

Una spiegazione più approfondita meritano, invece, le due operazioni e soprattutto la moltiplicazione.

40.1.3 **NOTA STORICA.** Diciamo subito che i numeri complessi sono nati, in realtà, non come esigenza di dar soluzione all'equazione $x^2+1=0$, bensì nel tentativo di risolvere le equazioni algebriche di 3° grado.

Fu il matematico **Rafael Bombelli** (ca. 1526-1572) che, nella sua *Algebra* (1572), introdusse e utilizzò per primo quelli che oggi denominiamo “numeri complessi”. In quest'opera Bombelli, riguardo alla risoluzione dell'equazione: $x^3=15x+4$, applicando la formula risolutiva delle equazioni di 3° grado, giunse alla soluzione: $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$.

Semberebbe che, come per le equazioni di 2° grado con discriminante negativo, l'equazione non ammetta radici reali. Si può controllare tuttavia, per sostituzione diretta, che essa ha invece la soluzione 4. Per risolvere questo problema Bombelli, pur senza alcun fondamento logico, operò

in maniera spregiudicata con le radici quadrate dei numeri negativi utilizzando le stesse regole valide per i numeri reali. Così, dopo aver fatto vedere che:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1} \quad \text{e} \quad \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1},$$

trovò: $(2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}) = 4$; cioè esattamente la soluzione reale dell'equazione in questione.

Detto che Bombelli non possedeva alcun simbolismo algebrico (a parte qualche forma sincopata) e perciò era costretto a spiegare con parole le varie operazioni, possiamo tuttavia concludere che i numeri complessi da lui trattati avevano la forma $a + b\sqrt{-1}$, dove a, b sono numeri reali.

Orbene, operando con essi alla maniera di Bombelli, cioè ritenendo valide le proprietà formali delle operazioni "addizione" e "moltiplicazione" in \mathbb{R} , si trova:

$$(a + b\sqrt{-1}) + (c + d\sqrt{-1}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{-1};$$

$$(a + b\sqrt{-1}) \cdot (c + d\sqrt{-1}) = ac + ad\sqrt{-1} + bc\sqrt{-1} + bd(-1) = (ac - bd) + (ad + bc)\sqrt{-1}.$$

Il che giustifica ampiamente la definizione data sopra. In effetti, supponendo di scrivere:

$(a, b) = a + b\sqrt{-1}$, considerando l'espressione $a + b\sqrt{-1}$ come un binomio nella "indeterminata" $\sqrt{-1}$ e ammettendo inoltre che sia $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1$, si ottiene:

$$(a, b) + (c, d) = (a + b\sqrt{-1}) + (c + d\sqrt{-1}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{-1} = (a + c, b + d);$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (a + b\sqrt{-1}) \cdot (c + d\sqrt{-1}) = \\ = ac + ad\sqrt{-1} + bc\sqrt{-1} + bd(-1) = (ac - bd) + (ad + bc)\sqrt{-1} = (ac - bd, ad + bc).$$

40.1.4 Si può notare che, per i numeri complessi del tipo $(a, 0)$, risulta:

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0) \quad \text{e} \quad (a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0).$$

Essi si comportano, cioè, rispetto alle operazioni "+" e "·", esattamente come i numeri reali.

Per questo motivo possiamo supporre che sia:

$$[1] \quad (a, 0) = a, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

In questo senso affermiamo che \mathbb{R} è un sottoinsieme di \mathbb{C} . In simboli: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Anche se in effetti ad essere incluso in \mathbb{C} è l'insieme $\{(a, 0) \mid \forall a \in \mathbb{R}\}$ e non l'insieme \mathbb{R} .

Ragionando poi sui numeri complessi, rappresentati da coppie ordinate di numeri reali, si possono dimostrare tutte le proprietà dell'addizione e della moltiplicazione, valide anche in \mathbb{R} . In particolare, il numero $(0, 0)$ è l'elemento neutro rispetto all'addizione e il numero $(1, 0)$ lo è rispetto alla moltiplicazione. Naturalmente, in virtù della [1], possiamo scrivere:

$$(0, 0) = \mathbf{0}, \quad (1, 0) = \mathbf{1}.$$

40.2 FORMA BINOMIALE ED OPERAZIONI ELEMENTARI IN \mathbb{C}

40.2.1 Ogni numero complesso (a, b) può essere messo nella cosiddetta **forma binomiale** (detta anche **forma algebrica** o **forma cartesiana**):

$$a + b i .$$

Basterebbe per questo indicare con "i" il numero $\sqrt{-1}$ e rifarsi alla scrittura di Bombelli. Ma vogliamo fornire una spiegazione più formale. A questo riguardo osserviamo anzitutto che si ha:

$$(0, 1)^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1 ;$$

per cui, se poniamo per comodità: $(0, 1) = i$, risulta:

$$i^2 = -1 .$$

Il numero complesso i , uguale a $\sqrt{-1}$, si chiama **unità immaginaria**. Si deve al matematico svizzero **Leonhard Euler** (1707-1783) l'indicazione di $\sqrt{-1}$ con la notazione i .

Ogni numero complesso del tipo:

$$(a,0) \cdot (0,1) = a i,$$

ovvero il prodotto di un numero reale per l'unità immaginaria, è detto **numero immaginario**.

Ora è chiaro che si ha:

$$(a,b) = (a,0) + (0,b) \quad \text{e} \quad (b,0) \cdot (0,1) = (0,b);$$

perciò:

$$(a,b) = (a,0) + (b,0) \cdot (0,1)$$

e infine:

$$(a, b) = a + b i.$$

La *forma binomiale* di un numero complesso evidenzia che esso è costituito dalla somma di due termini:

- un numero reale (detto pure *parte reale* del numero complesso);
- un numero immaginario (detto anche *parte immaginaria*).

La rappresentazione dei numeri complessi in forma binomiale consente soprattutto di operare con essi in maniera più spedita rispetto all'uso delle coppie. Basta, infatti, considerare i numeri complessi come polinomi nell'indeterminata i con coefficienti reali; ovviamente ogni volta che figura i^2 lo si sostituisce con -1 .

Semplifica per esercizio le seguenti espressioni, mettendole nella forma $a+bi$, con a, b numeri reali:

$$(3-2i) + (2-i) + (-1+2i); \quad (2-i)(3+2i)(1-i); \quad \frac{1}{2-i} + \frac{1}{1-2i}; \quad (2-i)^2;$$

$$(1+i)^2; \quad (1+i)^3; \quad (1+i)^4; \quad (1+i)^5; \quad (1+i)^6.$$

40.2.2 I numeri complessi $a+bi$ e $-(a+bi)$ si dicono **opposti**. La loro somma è 0, mentre il loro prodotto è ancora un numero complesso.

I numeri $a+bi$ ed $a-bi$ si dicono invece **complessi coniugati**. Si ha:

$$(a+bi) + (a-bi) = 2a; \quad (a+bi)(a-bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2.$$

Vale a dire:

La somma e il prodotto di due numeri complessi coniugati sono numeri reali.

40.2.3 Alcuni esercizi, attraverso i quali puoi verificare quanto hai appreso fin qui.

1. Indicato con \bar{z} il coniugato del generico numero complesso z , prova che, comunque si scelgano i numeri complessi x, y , risulta: $\overline{\bar{x}+y} = x+y$, $\overline{\bar{x} \cdot y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$.
2. Posto $S = \{1, -1, i, -i\}$, si può dire che quest'insieme è chiuso rispetto all'ordinaria moltiplicazione?
3. È noto che $1^3 = 1$. Dopo aver verificato che:

$$\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 = 1 \quad \text{e} \quad \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 = 1,$$

cosa se ne può dedurre? Considerare poi l'insieme:

$$S = \left\{1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$$

e verificare che è chiuso rispetto all'ordinaria moltiplicazione “.”.

4. Posto che a, b siano numeri reali positivi, trovare quale relazione li lega sapendo che il numero $(a+bi)^3$ è un numero reale. [R. $b=a\sqrt{3}$]

40.3 EQUAZIONI DI 2° GRADO IN \mathbb{C}

40.3.1 Abbiamo introdotto questa unità sottolineando l'impossibilità di risolvere in \mathbb{R} l'equazione $x^2+1=0$. Quest'equazione ha invece due soluzioni nell'insieme \mathbb{C} : sono, per la precisione, i numeri $+i$ e $-i$. Cosa facilmente verificabile.

Generalizziamo questo fatto riprendendo la più generale equazione di 2° grado nell'incognita x con coefficienti reali: $ax^2+bx+c=0$ (con $a \neq 0$).

Considerato il suo discriminante $\Delta=b^2-4ac$, sappiamo che essa non ha radici reali quando $\Delta < 0$. Applicando, tuttavia, anche in questo caso la formula risolutiva dell'equazione, si trova:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm i \sqrt{-\Delta}}{2a}$$

L'equazione ha, perciò, due soluzioni in \mathbb{C} : esattamente due numeri complessi coniugati.

Ti proponiamo, per esercizio, di risolvere in \mathbb{C} le seguenti equazioni in x :

- (a) $x^2 - 1 = 0$; $x^2 + 4 = 0$; (b) $x^2 - a^2 = 0, (a \in \mathbb{R})$; $x^2 + a^2 = 0, (a \in \mathbb{R})$;
 (c) $x^2 + 2x + 3 = 0$; (d) $x^2 + 2x + 2 = 0$.

40.3.2 Ritorniamo alle radici dell'equazione di 2° grado, $ax^2+bx+c=0$, dove a, b, c sono numeri reali ($a \neq 0$). Anche quando esse sono complesse avviene che la loro somma e il loro prodotto sono nell'ordine:

$$-\frac{b}{a} \text{ e } \frac{c}{a},$$

così come quando esse sono reali. La cosa si spiega facilmente e ne lasciamo il compito a te, invitandoti anche a verificarlo in qualche caso particolare, ad esempio riprendendo le equazioni del precedente esercizio.

40.4 ORDINE IN \mathbb{C}

All'inizio di questa unità, abbiamo anticipato la circostanza che, se l'insieme \mathbb{C} dei numeri complessi è strutturato con le operazioni “+” e “·”, viene a perdere l'ordinamento rispetto alla relazione “è maggiore”, che pure è una proprietà caratteristica del suo sottoinsieme \mathbb{R} . È giunto il momento di spiegare questo fatto.

A questo proposito osserviamo anzitutto che certamente $i \neq 0$. Ragion per cui, se in \mathbb{C} valesse la relazione “è maggiore” ($>$) con le medesime proprietà che essa ha in \mathbb{R} , dovrebbe verificarsi una ed una soltanto delle due relazioni seguenti: $i > 0, 0 > i$. E tuttavia ecco cosa succede:

- $i > 0 \rightarrow i \cdot i > 0 \cdot i \rightarrow i^2 > 0 \rightarrow -1 > 0$; il che è manifestamente assurdo.
- $0 > i \rightarrow 0 \cdot i < i \cdot i \rightarrow 0 < -1$; e anche questo è assurdo.

Insomma entrambe le proposizioni $i > 0, 0 > i$ sono false. Questo significa che:

**Non è possibile ordinare \mathbb{C} rispetto alla relazione “è maggiore”
in modo che esso conservi le stesse proprietà delle operazioni che valgono in \mathbb{R} .**

40.5 ALTRE RAPPRESENTAZIONI DEI NUMERI COMPLESSI

40.5.1 Per rappresentare graficamente i numeri complessi è evidente che non possiamo ricorrere alla retta che, come si sa, è completamente riempita dai numeri reali. Ci possiamo però servire del piano. La qual cosa appare peraltro del tutto naturale dal momento che abbiamo a che fare con coppie ordinate di numeri reali.

Un piano cartesiano (Oxy) si può, dunque, ritenere l'immagine grafica dell'insieme \mathbb{C} dei numeri complessi. Anzi, quando esso è usato con questo fine, viene di solito chiamato **piano complesso** o **piano di Gauss** (Fig. 1).

Sono immediate due considerazioni relative al piano di Gauss:

- l'asse x è l'immagine dei numeri complessi del tipo $(a,0)=a$, ossia dei numeri reali;
- l'asse y è l'immagine dei numeri complessi del tipo $(0,b)=bi$, ossia dei numeri immaginari.

La denominazione "piano di Gauss" è usata perché fu proprio il grande matematico tedesco **Carl Friedrich Gauss** (1777-1855) ad interpretare i numeri complessi come punti del piano, in un saggio pubblicato nel 1832. Anche se, per la verità, la rappresentazione grafica di questi numeri era stata fornita già qualche anno prima: precisamente nel 1799 dal danese **Caspar Wessel** (1745-1818) e nel 1806 dal francese **Jean Robert Argand** (1768-1822). Ma i loro lavori non furono subito conosciuti e quella che passò alla storia fu la rappresentazione di Gauss, che alcuni tuttavia chiamano anche rappresentazione di Gauss-Argand o di Gauss-Wessel o addirittura di Gauss-Argand-Wessel.

Rappresentazione che, comunque sia andata, fece acquisire ai numeri complessi piena cittadinanza nel mondo dei numeri, diversamente da quello che era accaduto fino a quel momento, giacché i numeri complessi non erano stati considerati veri e propri numeri, ma solo artifici per risolvere le equazioni. Tant'è che, ancora mezzo secolo dopo la pubblicazione dell'*Algebra* di Bombelli, i numeri aventi la forma $a+b\sqrt{-1}$ furono squalificati come "numeri immaginari" da Cartesio. E solo dal 1832, per merito di Gauss, il termine "numeri immaginari" fu riservato ai soli numeri bi e lo stesso Gauss coniò il termine "numeri complessi" per i numeri $a+bi$, formati da una parte reale e una parte immaginaria. Bisogna precisare però che quella volta il termine "numero reale" non era ancora usato, poiché fu coniato solo qualche tempo dopo (1883) dal matematico tedesco **Georg Cantor** (1845-1918) proprio in contrapposizione al termine "numero immaginario".

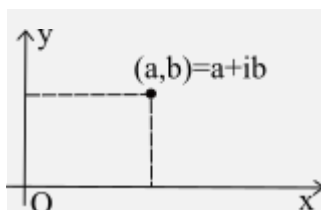


FIG. 1

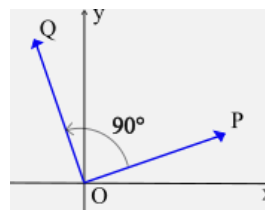


FIG. 2

Ti proponiamo qualche esercizio sull'argomento:

- 1) Rappresenta nel piano complesso il numero $3+2i$, il suo opposto ed il suo coniugato.
- 2) Indicato con z un generico numero complesso e con \bar{z} il numero complesso coniugato di z , rappresenta nel piano complesso le curve di equazioni $z+\bar{z}=1$, $z-\bar{z}=1$.

40.5.2 Un'altra modalità di rappresentazione dei numeri complessi, ma sempre in un piano cartesiano (Oxy)

– detta **forma vettoriale** – consiste nell'identificare il numero (a, b) col vettore \overrightarrow{OP} (Fig. 2), dove il punto P ha coordinate cartesiane (a, b) . Usando questa rappresentazione, è possibile fare alcune interessanti riflessioni.

- Anzitutto si scopre un ruolo notevole dell'unità immaginaria i .

Precisamente, si osserva che moltiplicando il numero complesso (a, b) per l'unità immaginaria i si trova $(-b, a)$. Infatti: $(a, b) i = (a+bi) i = ai - b = (-b, a)$.

Ora, se \overrightarrow{OP} è il vettore che rappresenta il numero complesso (a, b) , quello che rappresenta il numero $(-b, a)$ è il vettore \overrightarrow{OQ} ottenuto facendo ruotare \overrightarrow{OP} di 90° intorno ad O; cioè: $i \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ}$. Pertanto:

l'unità immaginaria i può essere considerata come un operatore che, applicato a un vettore \overrightarrow{OP} , lo fa ruotare di 90° intorno ad O (Fig. 2).

- Una seconda riflessione porta al concetto di “modulo” di un numero complesso. Considerato, al riguardo, il numero complesso $z = a + bi$, rappresentato dal vettore \overrightarrow{OP} , sappiamo che il modulo di questo vettore è il numero reale: $|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x_p^2 + y_p^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$. Ebbene, questo numero reale si chiama anche **modulo** del numero complesso z . Si indica con la scrittura $|z|$. E si capisce che risulta: $|z| \geq 0$, dove il segno di uguaglianza vale se e solo se $a = b = 0$.

Alcuni esercizi da risolvere.

1. Data la rappresentazione vettoriale del numero complesso $a + bi$, fornisci quella del suo coniugato e del suo opposto.
2. Si sa che il numero $(a + bi)^2$ è un numero reale. È possibile dedurre dov'è situato il numero $a + bi$ nel piano di Gauss?
3. È vero che due numeri complessi disuguali possono avere lo stesso modulo?
4. Calcola il modulo del seguente numero complesso:

$$a) (2 + i)^2; \quad b) (1 - 2i)^3.$$

40.5.3 LABORATORIO DI MATEMATICA.

Ti proponiamo alcuni esercizi, che vanno affrontati uno di seguito l'altro, nell'ordine in cui sono indicati. Prova a risolverli, magari discutendone con i tuoi compagni e, se occorre, con qualche suggerimento da parte del professore.

1. Sono dati i numeri complessi $z_1 = 2 + i$ e $z_2 = 3 + 4i$. Disegna nel piano complesso i vettori $\overrightarrow{OP_1}$ e $\overrightarrow{OP_2}$ che li rappresentano. Disegna quindi il vettore \overrightarrow{OP} che rappresenta il numero complesso $z_1 + z_2$.
2. Ripeti l'esercizio precedente assumendo i numeri complessi $z_1 = 3 - 2i$ e $z_2 = -2 + 4i$.
3. Riflettendo sui due precedenti esercizi, prova a generalizzare assumendo due numeri complessi qualsiasi. Prova inoltre a formulare una regola che ti permetta rapidamente di disegnare il vettore che rappresenta la somma di due numeri complessi.
4. Sono dati i numeri complessi $z_1 = 1 + 2i$ e $z_2 = 3$. Disegna nel piano complesso i vettori $\overrightarrow{OP_1}$ e $\overrightarrow{OP_2}$ che li rappresentano. Disegna quindi il vettore \overrightarrow{OP} che rappresenta il numero complesso $z_1 z_2$.
5. Ripeti l'esercizio precedente assumendo i numeri complessi $z_1 = 2 - i$ e $z_2 = -2$.
6. Ripeti l'esercizio precedente assumendo i seguenti numeri complessi:
 - a) $z_1 = 4 + 3i$ e $z_2 = 2i$; b) $z_1 = 4 + 3i$ e $z_2 = -2i$.
7. Ripeti l'esercizio precedente assumendo i seguenti numeri complessi:
 - a) $z_1 = 3 + 4i$ e $z_2 = 1 + i$; b) $z_1 = 2 + 3i$ e $z_2 = 3 - 2i$.

8. Riflettendo sui precedenti esercizi n. 4, n. 5, n. 6 e n.7, prova a generalizzare assumendo due numeri complessi qualsiasi. Prova inoltre a formulare una regola che ti permetta (purtroppo non molto rapidamente) di disegnare il vettore che rappresenta il prodotto di due numeri complessi.

40.5.4 Un'ulteriore modalità di rappresentazione dei numeri complessi è la *forma trigonometrica*.

Per determinarla, abbiamo però bisogno di fissare nel piano un *riferimento polare*. Per questo si fissano due punti distinti, O ed U, detti rispettivamente *polo* (od *origine*) e *punto unità* ed un *verso positivo di rotazione* (per esempio quello antiorario). In questo modo, assunto OU come segmento unitario, ad ogni punto P del piano, distinto da O (Fig. 3), restano associati, in maniera biunivoca, due numeri:

- il numero reale positivo r tale che $\overline{OP}=r$;
- il numero α , compreso fra 0° e 360° esclusi, ampiezza dell'angolo orientato positivo $U\hat{O}P$.

Questi due numeri r ed α , presi nell'ordine, si dicono **coordinate polari** di P. Precisamente la prima coordinata si chiama anche *raggio vettore*, la seconda *anomalia* (o *azimut*).

Per il punto O conveniamo che il raggio vettore sia 0 e l'anomalia indeterminata.

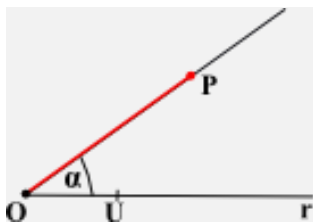


FIG. 3

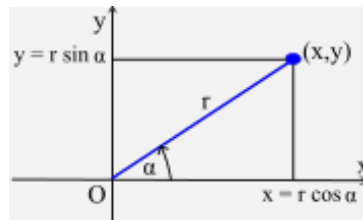


FIG. 4

Ora, assieme al riferimento polare, supponiamo fissato nel piano un opportuno riferimento cartesiano ortogonale levogiro (Oxy): quello che ha come origine il polo O e come asse x la retta OU orientata da O verso U (Fig. 4).

Ebbene, tra le coordinate polari (r, α) e le coordinate cartesiane (x, y) di un generico punto del piano c'è un legame, evidenziato dalle seguenti formule:

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \sin \alpha.$$

O anche, esprimendo r ed α in funzione di x, y :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \alpha = \frac{y}{x}.$$

Ritornando allora alla forma binomiale del numero complesso (x, y) , si ha:

$$x+iy=r \cos \alpha +i r \sin \alpha ;$$

o anche:

$$x+iy=r (\cos \alpha +i \sin \alpha).$$

La scrittura:

$$r (\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

è la **forma trigonometrica** (o **polare**) del numero complesso: r è il suo *modulo*; α si chiama *anomalia* (o *argomento*) del numero complesso.

Osserviamo però che, mentre il modulo r di un numero complesso è dato in un solo modo, la sua anomalia α è assegnata a meno di multipli di 360° .

In questo senso, per esempio, le due espressioni:

$$2 (\cos 45^\circ +i \sin 45^\circ) \quad \text{e} \quad 2 (\cos 405^\circ +i \sin 405^\circ)$$

rappresentano lo stesso numero complesso.

In generale il numero complesso di modulo r ed anomalia α ed il numero complesso di modulo s ed anomalia β sono uguali se e solo se:

$$r=s \text{ ed } \alpha=\beta+k 360^\circ, \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$

ESERCIZIO. Dopo averne determinato il modulo e l'argomento, scrivere in forma trigonometrica i seguenti numeri complessi e rappresentarli nel piano di Gauss:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & 4, -4, 2i, -2i; & \text{(b)} \quad \sqrt{3}+i, \sqrt{3}-i; & \text{(c)} \quad -3-i\sqrt{3}, -3+i\sqrt{3}; \\ & \text{(d)} \quad \frac{1}{i}; & \text{(e)} \quad \frac{1+i}{1-i}; & \text{(f)} \quad \frac{2-i}{1+i}. \end{array}$$

40.6 POTENZA n-ESIMA E RADICI n-ESIME DI UN NUMERO COMPLESSO

40.6.1 Sappiamo calcolare agevolmente il quadrato di un numero complesso quando esso è posto in forma algebrica. Vediamo cosa si ottiene quando il numero è scritto in forma trigonometrica:

$$\begin{aligned} [r(\cos\alpha + i \sin\alpha)]^2 &= r^2(\cos^2\alpha + i^2\sin^2\alpha + 2i\sin\alpha\cos\alpha) = \\ &= r^2[\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + i(2\sin\alpha\cos\alpha)] = r^2(\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha) \end{aligned}$$

Il risultato trovato è un caso particolare della cosiddetta **formula di De Moivre**⁽¹⁾:

$$[r(\cos \alpha + i \sin \alpha)]^n = r^n(\cos n\alpha + i \sin n\alpha), \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione della formula è condotta utilizzando il principio d'induzione.

La formula è certamente vera per $n=1$. Ammettiamo che sia vera per $n=k$ e dimostriamo che è ancora vera per $n=k+1$. Allora, tenendo presente che la formula vale per $n=k$ e ricordando le formule di addizione e sottrazione di seno e coseno, si ha in successione:

$$\begin{aligned} [r(\cos \alpha + i \sin \alpha)]^{k+1} &= r^{k+1}(\cos \alpha + i \sin \alpha)^k(\cos \alpha + i \sin \alpha) = \\ &= r^{k+1}(\cos k\alpha + i \sin k\alpha)(\cos \alpha + i \sin \alpha) = \\ &= r^{k+1}(\cos k\alpha \cos \alpha + i \cos k\alpha \sin \alpha + i \sin k\alpha \cos \alpha + i^2 \sin k\alpha \sin \alpha) = \\ &= r^{k+1}(\cos k\alpha \cos \alpha + i \cos k\alpha \sin \alpha + i \sin k\alpha \cos \alpha - \sin k\alpha \sin \alpha) = \\ &= r^{k+1}[\cos(k\alpha + \alpha) + i \sin(k\alpha + \alpha)] = r^{k+1}[\cos(k+1)\alpha + i \sin(k+1)\alpha]. \end{aligned}$$

La formula, pertanto, vale anche per $n=k+1$ e, perciò, vale per ogni n .

40.6.2 La formula di De Moivre trova un'importante applicazione nel calcolo della radice n-esima di un numero complesso. A questo riguardo consideriamo il numero: $r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$.

La sua radice n-esima: $\sqrt[n]{r(\cos \alpha + i \sin \alpha)}$ è il numero complesso: $s(\cos \beta + i \sin \beta)$ tale che:

$$[s(\cos \beta + i \sin \beta)]^n = r(\cos \alpha + i \sin \alpha);$$

ossia, per la formula di De Moivre:

$$s^n(\cos n\beta + i \sin n\beta) = r(\cos \alpha + i \sin \alpha).$$

Quindi deve risultare:

$$s^n = r, \quad n\beta = \alpha + k 360^\circ \quad (k \in \mathbb{Z});$$

e perciò:

$$s = \sqrt[n]{r}, \quad \beta = \frac{\alpha + k 360^\circ}{n} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Qui $\sqrt[n]{r}$ rappresenta la radice n-esima aritmetica del numero reale positivo r , mentre a k si possono at-

¹ **De Moivre**, Abraham, matematico francese, 1667-1754.

tribuire solo i valori $0, 1, 2, \dots, n-1$ per avere determinazioni di β distinte fra loro e tali che la differenza tra due qualsiasi di esse non sia un multiplo di 360° . Infatti, appena a k si assegna il valore n , si ottiene una determinazione di β che differisce proprio di 360° da quella corrispondente al valore $k=0$. E così accade per valori interi di k maggiori di n o minori di 0 .

Questo significa che il numero complesso:

$$r (\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

ha esattamente n radici n -esime: quelle espresse dal numero complesso:

$$s (\cos \beta + i \sin \beta)$$

dove $s = \sqrt[n]{r}$, $\beta = \frac{\alpha + k 360^\circ}{n}$ (con $k=0, 1, 2, \dots, n-1$).

Pertanto, le n radici n -esime del numero complesso $r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ sono fornite dalla seguente espressione:

$$\sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\alpha + k 360^\circ}{n} + i \sin \frac{\alpha + k 360^\circ}{n} \right),$$

con $k=0, 1, 2, \dots, n-1$.

In particolare, le tre radici cubiche nel numero complesso: $8=8(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)$ sono date dalla formula:

$$2[\cos(k 120^\circ) + i \sin(k 120^\circ)], \text{ con } k = 0, 1, 2.$$

Sicché, indicate per comodità con r_0, r_1, r_2 queste radici, si ha:

$$r_0 = 2(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ) = 2,$$

$$r_1 = 2(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ) = 2 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -1 + i\sqrt{3},$$

$$r_2 = 2(\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ) = 2 \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -1 - i\sqrt{3}.$$

In realtà, almeno in questo caso, le radici si possono trovare anche per via algebrica, come soluzioni dell'equazione: $x^3=8$, ossia $x^3-8=0$. Basta osservare che: $x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$ e risolvere le due equazioni:

$$x-2=0, \quad x^2+2x+4=0.$$

Ma le cose non sempre sono così semplici e di solito bisogna far ricorso al primo procedimento.

40.7 RADICI n-ESIME DELL'UNITÀ

40.7.1 Tra le radici di un numero complesso rivestono un particolare interesse quelle dell'unità.

Per trovarle basta naturalmente applicare la formula descritta prima, tenendo presente che adesso risulta $r=1$ e quindi anche $\sqrt[n]{r}=1$. Di modo che le n radici n -esime dell'unità sono condensate nella seguente formula:

$$\varepsilon_k = \cos \frac{k 360^\circ}{n} + i \sin \frac{k 360^\circ}{n}, \text{ con } k=0, 1, 2, \dots, n-1.$$

40.7.2 È interessante la rappresentazione geometrica delle n radici n -esime dell'unità.

È intanto evidente che gli n numeri complessi ε_k espressi dalla formula precedente hanno tutti modulo 1; per cui i punti che li rappresentano nel piano di Gauss sono situati sulla circonferenza avente il centro in O e raggio 1.

Se ora supponiamo fissato, oltre al riferimento cartesiano (Oxy), anche il riferimento polare associato ad esso, possiamo subito osservare che, qualunque sia l'indice della radice considerata, risulta: $\varepsilon_0 = \cos 0^\circ + i \sin 0^\circ$; per cui uno dei punti che rappresentano le n radici n-esime di 1 è sempre il punto A_0 di coordinate polari $(1, 0^\circ)$. Gli altri n-1 punti hanno le seguenti coordinate polari:

$$A_1 \left(1, \frac{1 \cdot 360^\circ}{n} \right), A_2 \left(1, \frac{2 \cdot 360^\circ}{n} \right), \dots, A_{n-1} \left(1, \frac{(n-1)360^\circ}{n} \right).$$

Come dire:

- A_1 si ottiene facendo ruotare A_0 di $\frac{360^\circ}{n}$ intorno ad O,
- A_2 si ottiene facendo ruotare A_0 di 2 volte $\frac{360^\circ}{n}$ intorno ad O,
- ... ,
- A_{n-1} si ottiene facendo ruotare A_0 di n-1 volte $\frac{360^\circ}{n}$ intorno ad O.

In definitiva gli n punti $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ – immagini delle n radici n-esime dell'unità – sono i vertici del poligono regolare di n lati inscritto nella circonferenza di centro O e raggio 1, col punto A_0 di coordinate cartesiane $(1, 0)$.

Nel disegno di figura 5 abbiamo supposto $n=5$. In quello di figura 6, $n=6$.

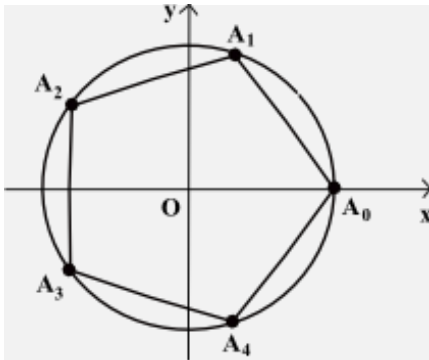


FIG. 5

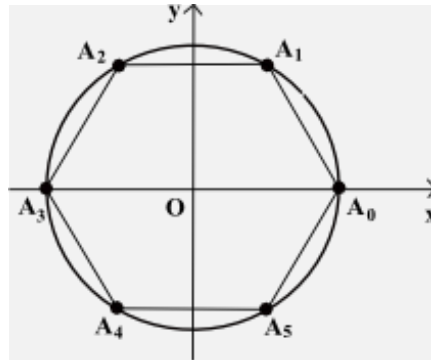


FIG. 6

Un esercizio per te. Indicato con E_n l'insieme delle radici n-esime dell'unità, fa' vedere che l'operazione “.” è ovunque definita in E_n . Dimostra, inoltre, che la somma delle n radici n-esime dell'unità è uguale a zero. Se non sei in grado di farlo per n qualsiasi, prova per qualche n particolare.

VERIFICHE

Semplificare le seguenti espressioni, scrivendole nella forma $a+bi$, dove a, b sono numeri reali (nn. 1-27):

1. $i^3; i^{-3}; i^4; i^{-4}; i^5; i^{-5}; i^6; i^{-6}$

2. $(3+2i)+(2-i)+(-2+3i)$.

[R. $3+4i$]

3. $(2 - i\sqrt{2}) - (3 + 2i\sqrt{2}) + \left(\frac{1}{2} - 3i\sqrt{2}\right)$.

[R. $-\frac{1}{2} - 6i\sqrt{2}$]

4. $\left(\frac{1}{3} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{2}{3} - i\sqrt{3}\right) - \left(\frac{5}{3} + \frac{3}{2}i\sqrt{3}\right).$

5. $(\sqrt{2} - 2i) - \left(\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2}i\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right).$

6. $(2 - 3i)(3 + 2i)(1 - i).$

[R. 7-17 i]

7. $(\sqrt{2} - i)(1 + 2i)(2 - i\sqrt{2}).$

[R. $(\sqrt{2}+8)+(2\sqrt{2}-4)i$]

8. $\left(\frac{1}{2} - 2i\right)(3 - i)\left(2 - \frac{1}{3}i\right).$

9. $\left(\frac{3}{2} - i\right)\left(\frac{3}{2} + i\right)\left(\frac{2}{3} + 3i\right).$

10. $\left[\left(2 - \frac{1}{2}i\right) - (3 + 2i)\right](2 - 3i).$

[R. $-\frac{19}{2} - 2i$]

11. $\left[(3 - i) + \left(\frac{1}{2} - 2i\right)\right]\left[\left(2 - \frac{1}{2}i\right) - \left(2 + \frac{1}{2}i\right)\right].$

[R. $-3 - \frac{7}{2}i$]

12. $\left(\frac{2}{3} - 3i\right)\left[\left(3 - \frac{1}{2}i\right) + \left(\frac{3}{2} + \frac{5}{2}i\right)\right].$

13. $[(2 - i\sqrt{2}) - (2 + i\sqrt{2})]\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{2}i\sqrt{2}\right).$

14. $\left[\left(2 - \frac{1}{2}i\right) - \left(\frac{1}{2} - 2i\right)\right][(3 - 2i) + (2 - 3i)].$

15. $[(\sqrt{2} - i)(i + \sqrt{2}) - (2 - 3i)](2 + i\sqrt{2}).$

16. $\frac{2}{3-i} + \frac{1}{2-3i}.$

[R. $\frac{49}{65} + \frac{28}{65}i$]

17. $\frac{2 - \frac{1}{2}i}{2 + \frac{1}{2}i} - \frac{1}{2 + i}.$

[R. $\frac{41}{85} - \frac{23}{85}i$]

18. $\frac{2 + 2i}{1 + i} - \left(\frac{3}{2} + 2i\right).$

19. $\frac{13}{3 + 2i} + (2 - 3i)\left(\frac{1}{2} - i\right).$

20. $\frac{1}{2 - 4i} - \left(\frac{1}{8} + 2i\right)(1 - i).$

21. $\frac{2 + i}{3 - 2i} \cdot \frac{1}{i} + \left(\frac{1}{2} - 2i\right).$

22. $(2 + 3i)^2 + (3 - 2i)^2.$

[R. 0]

$$23. (\sqrt{2} - \sqrt{3}i)^2 - \left(3 - \frac{\sqrt{6}}{2}i\right)^2. \quad \left[\mathbf{R.} -\frac{17}{2} + \sqrt{6}i\right]$$

$$24. (3 - i)^2 - \frac{2 - i}{2 + i} - (1 - i)(2 + i).$$

$$25. \frac{2 - 3i}{i} + \left(\frac{1}{2} - 3i\right)^2 + \left(3 - \frac{1}{2}i\right)\left(3 + \frac{1}{2}i\right).$$

$$26. \left(2 - \frac{1}{2}i\right)\left(\frac{1}{2} - 2i\right) + \left(\frac{1}{2} + 2i\right)^2 - \frac{2}{1 + 4i}.$$

$$27. (1 + i)^3 + i(1 - i)^2 - (i + 2)(2 + i).$$

Risolvere in \mathbb{C} le seguenti equazioni in x , scrivendo le soluzioni nella forma $a+bi$ (nn. 28-34):

$$28. x^2 - 1 = 0; \quad x^2 + 1 = 0.$$

$$29. 4x^2 - 1 = 0; \quad 4x^2 + 1 = 0.$$

$$30. x^2 - a^2 = 0, \text{ con } a \in \mathbb{R}; \quad x^2 + a^2 = 0, \text{ con } a \in \mathbb{R}.$$

$$31. 2x(x - 2) + 2(x + 1)^2 = 0. \quad \left[\mathbf{R.} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i\right]$$

$$32. (2x + a)^2 + (2x - a)^2 = 4x^2 + a^2, \text{ con } a \in \mathbb{R}. \quad \left[\mathbf{R.} \pm \frac{a}{2}i\right]$$

$$33. 2x^2 - 2x + 1 = 0; \quad x^2 + 2x + 3 = 0.$$

$$34. 3x^2 - 4x + 2 = 0; \quad 4x^2 + 4x + 17 = 0.$$

Dopo aver determinato il modulo r e l'argomento α , tale che $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$, scrivere in forma trigonometrica i seguenti numeri complessi e rappresentarli nel piano di Gauss (nn. 35-40):

$$35. 4, -4, 2i, -2i.$$

$$36. \sqrt{3} + i, \sqrt{3} - i. \quad [\mathbf{R.} 2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ), \dots]$$

$$37. \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i. \quad [\mathbf{R.} \sqrt{3}(\cos 60^\circ - i \sin 60^\circ), \dots]$$

$$38. -2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}, -2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}. \quad [\mathbf{R.} 4(\cos 135^\circ - i \sin 135^\circ), \dots]$$

$$39. -3 - i\sqrt{3}, -3 + i\sqrt{3}. \quad [\mathbf{R.} 2\sqrt{3}(\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ), \dots]$$

$$40. \frac{-3 + 3i\sqrt{3}}{2}, \frac{3 + 3i\sqrt{3}}{2}. \quad [\mathbf{R.} -3(\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ), \dots]$$

Dei seguenti numeri calcolare le potenze di esponenti 2, 3, 4, scrivendole nella forma algebrica $a+bi$. Successivamente scrivere ciascun numero in forma trigonometrica e, dopo aver calcolato di nuovo le medesime potenze utilizzando le formule di De Moivre, verificare che i risultati coincidono con quelli trovati (nn. 41-43):

41. $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$; $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

42. $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$; $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

43. $3 - \sqrt{3}i$; $-3 - \sqrt{3}i$.

Calcolare le radici n-esime del numero complesso z, scrivendole nella forma algebrica a+bi, sapendo che (nn. 44-50):

44. $z = 27$, $n = 3$. $z = 16$, $n = 4$. [R. 3 ; $-\frac{3}{2} \pm \frac{3}{2}i\sqrt{3}$]

45. $z = i$, $n = 2$. $z = 16i$, $n = 2$. [R. $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$; $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$]

46. $z = -i$, $n = 3$. [R. i , $\pm \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$]

47. $z = 1+i$, $n=2$. [R. $\frac{\sqrt{2\sqrt{2}+2}}{2} + i\frac{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2\sqrt{2}+2}}{2} - i\frac{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{2}$]

48. $z = 1-i$, $n=2$. [R. $\frac{\sqrt{2\sqrt{2}+2}}{2} - i\frac{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2\sqrt{2}+2}}{2} + i\frac{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{2}$]

49. $z = -2 - 2i\sqrt{3}$, $n = 2$. [R. $-1 \pm i\sqrt{3}$]

50. $z = -2 + 2i\sqrt{3}$, $n = 4$. [R. $\frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}$, $-\frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}$]

Questioni varie.

51. **Giovanni Crivelli**, matematico, fisico e religioso veneziano (1691-1743), nella sua opera *Elementi di aritmetica numerica e letterale* (1728), fornisce i seguenti esempi di prodotti e quozienti di numeri immaginari:

$$\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-2} = \sqrt{6}, \quad -\sqrt{-3} \cdot \sqrt{2} = -\sqrt{-6}, \quad \sqrt{-4} \cdot \sqrt{-9} = 6, \quad \sqrt{-5} \cdot (-\sqrt{4}) = -\sqrt{-20};$$

$$\sqrt{-4} : \sqrt{-2} = \sqrt{2}, \quad -\sqrt{3} : \sqrt{-1} = -\sqrt{-3}, \quad \sqrt{8} : (-\sqrt{-2}) = -\sqrt{-4}, \quad \sqrt{-20} : (-\sqrt{-4}) = -\sqrt{5}$$

A parer tuo, è tutto corretto?

52. Mettere nella forma a+bi i seguenti numeri complessi:

$$(\sqrt{2} + 2i)^3, \quad (1 - i)^4.$$

53. Posto che α sia un numero reale non negativo, mettere nella forma a+bi i seguenti numeri complessi:

$$\frac{\sqrt{\alpha} + i}{1 - i\sqrt{\alpha}}, \quad \frac{1 - i\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha} + i}. \quad [\text{R. } i; \dots]$$

54. Mettere nella forma a+bi i seguenti numeri complessi:

$$\sqrt{3 + 4i}, \quad \sqrt{4 - 3i}.$$

[R. Conviene porre uguale ad x+yi il numero ed elevare al quadrato entrambi i membri dell'uguaglianza ottenuta. Imponendo le giuste condizioni, si ottiene un sistema di due

equazioni nelle incognite x, y, risolto il quale...si trova: $2 + i$; $\frac{3}{2}\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$]

55. PROBLEMA RISOLTO. Si sa che a, b, c sono numeri interi positivi legati dalla seguente relazione:

$$c = (a + b i)^3 - 11 i.$$

Ritieni che sia possibile determinare i numeri suddetti oppure i dati sono insufficienti per tale scopo?

RISOLUZIONE. L'espressione che fornisce c può essere semplificata e scritta nella forma seguente: $c = (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3 - 11)i$. Siccome c è un intero, la parte immaginaria del numero è nulla, perciò deve essere: $3a^2b - b^3 - 11 = 0$; equazione che può essere scritta anche in questo modo:

$$b(3a^2 - b^2) = 11.$$

Osserviamo adesso che b è un intero (positivo) e che, essendolo anche a , pure $3a^2 - b^2$ è un intero. Considerato che 11 è un numero primo, dalla precedente equazione possono derivare soltanto le seguenti situazioni:

$$\begin{cases} b=1 \\ 3a^2 - b^2 = 11 \end{cases} \quad \begin{cases} b=11 \\ 3a^2 - b^2 = 1 \end{cases}$$

Si verifica facilmente che l'ultimo sistema non fornisce soluzioni per a, b interi positivi. Dal primo si desume invece: $b=1, a=2$ e di conseguenza si trova $c=2$.

In conclusione esiste una ed una sola terna di numeri a, b, c , che soddisfa alle condizioni poste: $a=2, b=1, c=2$.

Da tutto questo si desume la seguente uguaglianza (rivedere Nota storica 40.1.3):

$$\sqrt[3]{2 + 11i} = 2 + i.$$

In modo analogo si dimostra che:

$$\sqrt[3]{2 - 11i} = 2 - i.$$

56. Detto che l'*antireciproco* di un numero complesso è l'opposto del suo reciproco, esiste un numero complesso che sia uguale al suo antireciproco?

57. Per quali valori dell'intero positivo n risulta $i^n = i$, dove i è l'unità immaginaria?

58. Verificare che risulta: $\sqrt[3]{2+11i} = 2+i$ e $\sqrt[3]{2-11i} = 2-i$.

[Rivedere Nota storica 40.1.3]

59. Un valore semplificato del numero complesso $\frac{1+i}{1-i}$ è i . È vero o è falso?

60. Considerato il polinomio $x^4 - 1$, fattorizzarlo sia nell'insieme \mathbb{R} dei numeri reali sia nell'insieme \mathbb{C} dei numeri complessi.

61. Risolvere in \mathbb{C} l'equazione $x^6 - 1 = 0$.

[R. Basta fattorizzare $x^6 - 1$ in \mathbb{R} e ...]

62. Considerato il polinomio $x^4 + 1$, fattorizzarlo sia nell'insieme \mathbb{R} dei numeri reali sia nell'insieme \mathbb{C} dei numeri complessi.

63. ESERCIZIO RISOLTO. Risolvere l'equazione $x^4 + 1 = 0$ nell'insieme \mathbb{C} dei numeri complessi e rappresentare le soluzioni nel piano di Gauss.

RISOLUZIONE. Ci occupiamo solo della prima parte, fornendo peraltro qualche semplice indicazione. Si possono seguire due strade: la prima richiede il calcolo delle radici quarte dell'unità immaginaria; la seconda comporta la fattorizzazione del polinomio $x^4 + 1$ nell'insieme \mathbb{R} dei reali. Si ha, infatti:

$$x^4 + 1 = x^4 + 1 + 2x^2 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2 = (x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1).$$

Si trovano in ogni caso le seguenti soluzioni:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), \quad \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i).$$

64. Risolvere l'equazione $x^6 + 1 = 0$ nell'insieme \mathbb{C} dei numeri complessi e rappresentare le soluzioni nel

piano di Gauss.

$$\left[\mathbf{R.} \pm i, \frac{1}{2}(\sqrt{3}\pm i), \frac{1}{2}(-\sqrt{3}\pm i) \right]$$

65. Si ricorda che $\sin 18^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$.

1. A) Calcolare $\cos 18^\circ$.
B) Calcolare $\sin 36^\circ$ e $\cos 36^\circ$.
2. A) Trovare le radici quinte dell'unità e rappresentarle nel piano di Gauss.
B) Verificare che la loro somma è 0.

$$\left[\mathbf{R.} \begin{array}{l} \text{1A) } \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}; \text{ 1B) } \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}, \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1); \\ \text{2A) } 1, \sin 18^\circ \pm i \cos 18^\circ, -\cos 36^\circ \pm i \sin 36^\circ, \dots \end{array} \right]$$

66. I numeri complessi $2+i$, $6+3i$, $6-2i$, rappresentati in un piano di Gauss, sono i vertici di un triangolo. Verificare che si tratta di un triangolo isoscele e trovare i numeri complessi che ne rappresentano il baricentro, il circocentro, l'ortocentro e l'incentro.
67. Il numero complesso $4+3i$, il suo opposto e il suo complesso coniugato, rappresentati in un piano di Gauss, sono i vertici di un triangolo. Di che tipo di triangolo si tratta? Calcolarne l'area e il perimetro.
68. Posto che a, b siano numeri reali, trovare quale relazione li lega sapendo che $(a+bi)^4$ è un numero reale. Dire quindi quale figura, nel piano di Gauss, contiene tutti e soli i punti $a+bi$.
69. È dato il seguente numero complesso in forma polare:

$$z = r (\cos \alpha + i \sin \alpha) .$$

Dimostrare che:

- a) il numero complesso coniugato di z , in forma polare, è il seguente:

$$\bar{z} = r (\cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha)) ;$$

- b) il numero complesso reciproco di z (con $z \neq 0$), in forma polare, è il seguente:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} (\cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha)) .$$

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

DOMANDE.

1. È vero che il prodotto di due numeri complessi, comunque presi, è un numero complesso?
2. È vero che la somma di due numeri complessi, comunque presi, è un numero complesso?
3. Esistono coppie di numeri complessi la cui somma e il cui prodotto sono numeri reali?
4. Non c'è una contraddizione nel fatto che il prodotto e la somma di due qualsiasi numeri complessi sono numeri complessi col fatto che esistono coppie di numeri complessi la cui somma e il cui prodotto sono numeri reali?
5. Esiste un'equazione di 2° grado con coefficienti reali che ammette le seguenti radici: $3i+2$, $3i-2$. È vero, è falso o non è possibile concludere né che l'affermazione sia vera né che sia falsa?
6. Esistono due numeri complessi la cui somma e il cui prodotto sono uguali ad 1?
7. È vero che il numero complesso $100i + 100$ è maggiore del numero complesso $i+1$?
8. Qual è la forma trigonometrica del numero complesso $\sqrt{3}+i$?
9. Quali sono le due radici quadrate dell'unità immaginaria i ?
10. Quali sono le 4 radici quarte dell'unità? È vero che l'operazione di moltiplicazione è ovunque definita nel loro insieme?

11. Esiste un numero complesso uguale al suo antireciproco?

RISPOSTE.

1. Sì.
2. Sì.
3. Sì: sono tali i numeri complessi coniugati.
4. Nessuna contraddizione. I numeri reali, infatti, sono particolari numeri complessi: precisamente numeri complessi con parte immaginaria nulla.
5. È certamente falso. Se infatti un'equazione di 2° grado con coefficienti reali ha radici complesse (discriminante negativo) esse sono numeri complessi coniugati, mentre i numeri $3i+2$ e $3i-2$ non lo sono. D'altro canto, ammesso che tali numeri siano radici di un'equazione di 2° grado (in x), deve risultare: $[x-(3i+2)][x-(3i-2)]=0$, ossia, a conti fatti: $x^2-6ix-13=0$. E, come si può constatare, i coefficienti di quest'equazione non sono tutti numeri reali.
6. Sì. Per trovarli basta risolvere il sistema delle due equazioni $a+b=1$, $ab=1$. Si trovano i numeri complessi coniugati $\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$.
7. No. La domanda non ha senso poiché per i numeri complessi non vale la relazione d'ordine totale che vale per i numeri reali.
8. La forma cercata è $2(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, dove $\alpha=30^\circ+k 360^\circ$.
9. Sono i due numeri complessi $\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$. Infatti, essendo $i=\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ$, tali radici sono i numeri $\cos \beta + i \sin \beta$, dove è $\beta = 45^\circ + k 180^\circ$, con $k=0$ oppure $k=1$.
10. Le 4 radici quarte dell'unità sono i numeri $1, -1, i, -i$. La moltiplicazione “.” è definita nel loro insieme E_4 : cosa che si controlla facilmente.
11. Non solo esiste, ma ne esistono addirittura 2: sono i numeri i e $-i$. Se, infatti, chiamiamo x un tale numero, deve essere $x=-1/x$ e perciò: $x^2=-1$, da cui $x=\pm i$.

COMPLEMENTI: RELAZIONI D'ORDINE

1. In questa unità, ma anche in passato, abbiamo fatto cenno a insiemi ordinati rispetto ad una data relazione. L'abbiamo fatto contando sull'idea intuitiva di questo concetto. In realtà, né le “Indicazioni Nazionali” (Licei) né le “Linee Guida” (Tecnici e Professionali) richiedono uno studio puntuale di questo argomento. Ci pare tuttavia che almeno un'idea più sicura di quella intuitiva non rischi di rovinare la salute mentale degli studenti. Ed è per questo che qui ci accingiamo a farne una breve trattazione. Poi ognuno si regolerà come meglio crede.

2. È già noto agli studenti quand'è che una data relazione, definita in un assegnato insieme, gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva. Ci fa comodo sottolineare altre due proprietà che ci torneranno utili fra breve.

- Una relazione R , definita in un dato insieme I , gode della **proprietà antisimmetrica** (o è **antisimmetrica**) se, per due qualsiasi elementi distinti $x, y \in I$, non risulta nello stesso tempo xRy ed yRx .

Questo fatto, in simboli, è espresso così:

$$\forall x, y \in I \quad xRy \wedge yRx \rightarrow x=y.$$

Si capisce, in base alla definizione, che per fornire esempi di relazioni antisimmetriche, bisogna ricercare tra le relazioni non simmetriche.

Alcuni esempi:

- La relazione R: “x è multiplo di y”, definita in \mathbb{N}_0 , non è simmetrica; quindi potrebbe risultare antisimmetrica. Di fatto, se x è multiplo di y ed y lo è di x allora significa che $x=y$, per cui la relazione è antisimmetrica.
- La relazione “ $x>y$ ”, definita in \mathbb{R} , non è simmetrica. Inoltre, comunque si prendano due numeri reali distinti, x ed y, non risulta contemporaneamente $x>y$ ed $y>x$. La relazione pertanto è antisimmetrica.
- La relazione “x è più alto di y”, definita in un insieme di persone non è simmetrica, ma neppure antisimmetrica: infatti due persone, x ed y, possono avere la stessa altezza per cui non risulta contemporaneamente che x è più alto di y ed y è più alto di x. Ma questo non significa che $x=y$, cioè che x ed y sono la stessa persona.
- Una relazione R, definita in un insieme I, si dice **mai riflessiva** (o **antiriflessiva** o **irriflessiva**) se ad ogni x la R non associa x, ovvero, espresso in simboli, se, $\forall x \in I, x \bar{R}x$.
Per esempio: la prima delle tre precedenti relazioni non è “mai riflessiva” (in realtà è riflessiva); la seconda e la terza sono invece mai riflessive.

3. Passiamo adesso alle relazioni d’ordine.

Una relazione binaria, definita in un dato insieme, che sia transitiva e antisimmetrica, si dice **relazione d’ordine**.

In particolare, se la relazione è riflessiva si dice d’**ordine largo**, se è mai riflessiva si dice d’**ordine stretto**.

ESEMPLI.

1) La relazione « $x \leq y$ », definita nell’insieme dei numeri reali, è una relazione d’ordine largo. Infatti, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, risulta:

$$a \leq a, \quad a \leq b \wedge b \leq c \rightarrow a \leq c, \quad a \leq b \wedge b \leq a \rightarrow a = b.$$

2) La relazione R: « x è divisore di y », definita nell’insieme \mathbb{N}_0 dei numeri naturali non nulli, è una relazione d’ordine largo. Infatti, $\forall a, b, c \in \mathbb{N}_0$, risulta:

$$aRa, \quad aRb \wedge bRc \rightarrow aRc, \quad aRb \wedge bRa \rightarrow a=b$$

3) La relazione « $x > y$ », definita nell’insieme dei numeri reali, essendo antiriflessiva, antisimmetrica e transitiva, risulta essere una relazione d’ordine stretto.

4) L’insieme $P(A)$ delle parti dell’insieme $A = \{a, b, c\}$ è parzialmente ordinato in senso stretto rispetto alla relazione « $X \subset Y$ », dal momento che questa relazione è antiriflessiva, antisimmetrica e transitiva.

Facciamo notare che ad ogni relazione d’ordine largo corrisponde una relazione d’ordine stretto: basta eliminare tutte le coppie del tipo (a,a); e ad ogni relazione d’ordine stretto ne corrisponde una d’ordine largo: basta aggiungere tutte le coppie del tipo (a,a).

Un insieme dotato di una relazione d’ordine si dice **ordinato** (rispetto a quella relazione).

Per esempio sono ordinati (rispetto alle relative relazioni) gli insiemi di cui si parla negli esempi precedenti. Fra essi vi sono però differenze sostanziali. Nel senso che in due di essi (il 1° ed il 3°) due qualunque elementi distinti dell’insieme sono confrontabili rispetto alla relazione considerata; invece negli altri due (il 2° ed il 4°) esistono coppie di elementi non confrontabili rispetto alla relazione.

Per precisare meglio:

- Nell’esempio 1, comunque vengano presi i numeri reali x, y, con $x \neq y$, risulta vera una ed una sola delle due seguenti alternative: $x \leq y$ oppure $y \leq x$.
- Nell’esempio 2, per i numeri 2 e 3 non è vero né che “2 è divisore di 3” né che “3 è divisore di 2”.
- Nell’esempio 3, comunque vengano presi i numeri reali distinti x ed y, è vera una ed una soltanto delle seguenti alternative: $x > y$ oppure $y > x$.
- Nell’esempio 4, per gli insiemi {a, b} e {a, c}, che pure non sono uguali, non è vero che il primo di essi è

incluso nel secondo né che il secondo è incluso nel primo.

Per gli insiemi dei tipi (1) e (3) si parla di **ordinamento totale**; per quelli dei tipi (2) e (4) di **ordinamento parziale**.

Ragion per cui possiamo concludere che:

- L'insieme dei numeri reali è totalmente ordinato in senso stretto rispetto alla relazione “è maggiore”.
- L'insieme dei numeri naturali non nulli è parzialmente ordinato in senso largo rispetto alla relazione “è divisore”.

Dal punto di vista grafico, gli elementi di un insieme totalmente ordinato in senso stretto (rispetto ad una determinata relazione) possono essere disposti lungo una retta: basti pensare all'insieme dei numeri interi ordinati secondo la relazione *è maggiore* e disposti lungo la retta dei numeri.

È invece necessario un grafo diverso per rappresentare un insieme parzialmente ordinato in senso stretto. A titolo di esempio, in figura 7 è rappresentato l'insieme dei numeri interi da 1 a 16, ordinato parzialmente in senso stretto rispetto alla relazione “è divisore proprio”, mentre in figura 8 è rappresentato l'insieme delle parti dell'insieme $\{a, b, c\}$, ordinato parzialmente in senso stretto rispetto alla relazione “ \subset ” d'inclusione stretta.

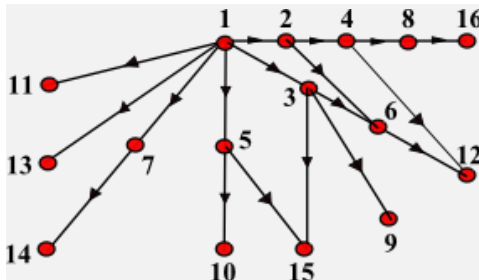


FIG. 7

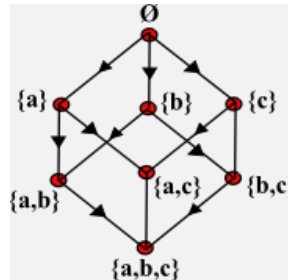


FIG. 8

4. Quando diciamo che “non è possibile ordinare \mathbb{C} rispetto alla relazione *è maggiore* in modo che esso conservi le stesse proprietà delle operazioni che valgono in \mathbb{R} ”, non affermiamo che non sia possibile ordinare \mathbb{C} in alcun modo, ma che non sia possibile farlo con un ordine totale ed in modo che continuino a valere le proprietà delle operazioni che valgono in \mathbb{R} .

Se, infatti, consideriamo l'insieme \mathbb{C} grezzo, cioè non strutturato con le operazioni “+” e “·”, allora esso può essere ordinato totalmente in senso stretto, ma rispetto a relazioni che hanno poco o nullo interesse sul piano pratico e per questo preferiamo non occuparcene.

Inoltre l'insieme \mathbb{C} , strutturato con le operazioni “+” e “·”, può essere parzialmente ordinato anche rispetto alla relazione *è maggiore*, ma anche questo non ha particolare interesse sul piano pratico.