Prerequisiti:

- Rappresentare in un piano cartesiano retta e funzione della proporzionalità quadratica diretta.
- Saper risolvere sistemi ed equazioni di 2° grado.

L'unità riguarda il 2° biennio di tutte le scuole superiori

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:

- *dimostrare la formula dell'equazione della parabola come luogo geometrico in un sistema di riferimento particolare*
- *risolvere semplici problemi riguardanti retta e parabola*
- *esplicitare le aspettative riguardo alle possibili soluzioni di un problema ed individuare elementi di controllo da tenere presenti nel corso del processo risolutivo*

Parabola

Unità 41

41.1 LA PARABOLA

41.1.1 A suo tempo [1] abbiamo denominato ***parabola*** il luogo dei punti (Fig. 1) le cui coordinate cartesiane (x,y) soddisfano alla seguente equazione, dove $a \in \mathbb{R}_0$:

[1] $$\mathbf{y = a\,x^2}.$$

Equazione che, quando $a>0$, esprime la ***legge della proporzionalità quadratica diretta***.

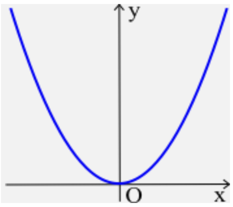

FIG. 1

Forniamo adesso un'altra definizione:

PARABOLA **è il luogo geometrico dei punti del piano aventi la stessa distanza da un punto fisso F e da una retta fissa δ tali che $F \notin \delta$.**

Il punto F è detto ***fuoco***, la retta δ ***direttrice***.
Sorge naturalmente il seguente interrogativo:
Una parabola intesa nel primo modo e una parabola intesa in base alla nuova definizione sono la stessa cosa?
La risposta è sì, ovviamente, ma si capisce che è necessaria una dimostrazione di ciò. Affermarlo non è sufficiente. Al riguardo, basta far vedere che, dopo aver riferito il piano contenente il punto F e la retta δ ad un conveniente sistema di assi cartesiani (Oxy), i punti P che hanno uguale distanza da F e da δ, ossia i punti P per i quali risulta:

[2] $$\text{dist}(P,F) = \text{dist}(P,\delta),$$

hanno coordinate (x,y) che soddisfano a un'equazione del tipo [1].
A questo proposito cominciamo con l'osservare che, detto D il piede della perpendicolare condotta da F a δ (Fig. 2), il punto medio V del segmento FD è certamente un punto della parabola, avendo uguale distanza da F e da δ. Si chiama ***vertice*** della parabola.

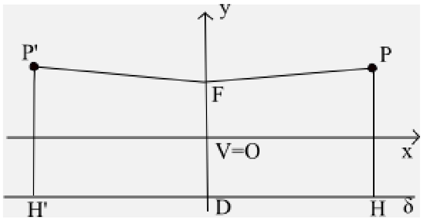

FIG. 2

Osserviamo inoltre che, nella simmetria assiale σ rispetto alla retta FV, il punto F è punto unito (cioè è trasformato in se stesso dalla simmetria σ) e la retta δ è retta unita (cioè è trasformata in se stessa da σ). Per questo, ogni punto P, che sia equidistante da F e da δ, è trasformato da σ in un punto P' ancora equidistante da F e da δ, per cui P e P' sono punti della parabola. Come dire: la retta FV è asse di

[1] Cfr.: Unità 11: Funzioni e grafici, N° 11.4.5.

simmetria della parabola. Si chiama per l'appunto ***asse*** della parabola.
A questo punto la scelta del sistema di riferimento (Oxy), che dovrebbe far passare dalla condizione [2] all'equazione [1] è chiara: si sceglie come origine il punto V e come asse y la retta FV; si può scegliere come verso positivo sull'asse y quello che va da V ad F; l'asse x è la perpendicolare alla retta VF condotta per V.
In questa situazione, posto che sia: $\text{dist}\,(F,\delta)=2f$, dove f è un numero reale positivo assegnato (detto ***distanza focale***), si ha:

$$F(0,f),\quad \delta \equiv y=-f.$$

Pertanto, chiamate (x,y) le coordinate del generico punto P del piano, risulta che:

$$\text{dist}\,(P,F)=\text{dist}\,(P,\delta) \rightarrow \sqrt{x^2+(y-f)^2}=|y+f|.$$

Da qui, elevando entrambi i membri al quadrato, segue:

$$x^2+(y-f)^2=(y+f)^2,$$

da cui, dopo aver semplificato, si ottiene:

$$y=\frac{1}{4f}x^2.$$

Troviamo così proprio l'equazione [1]; basta porre: $\frac{1}{4f}=a$, ossia: $f=\frac{1}{4a}$.

41.1.2 In conclusione, l'equazione $y=ax^2$, dove a è un numero reale non nullo, rappresenta effettivamente una parabola secondo la nuova definizione. Pertanto:

L'equazione:

$$\mathbf{y=a\,x^2},$$

dove $a\in\mathbb{R}_0$, rappresenta la **parabola** avente il vertice nel punto $V(0,0)$, il fuoco nel punto $F\left(0,\frac{1}{4a}\right)$ e come direttrice la retta δ di equazione $y=-\frac{1}{4a}$.

Nell'equazione $y=ax^2$:

- se $a>0$, risulta $ax^2>0$ per ogni $x\neq0$, per cui la parabola è situata tutta nel semipiano $y\geq0$ (Fig. 3): si dice che essa ha la *concavità rivolta verso le y positive* (o *verso l'alto*);
- se $a<0$, risulta $ax^2<0$ per ogni $x\neq0$, per cui la parabola è situata tutta nel semipiano $y\leq0$ (Fig. 4): si dice che essa ha la *concavità rivolta verso le y negative* (o *verso il basso*).

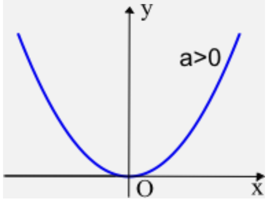

FIG. 3

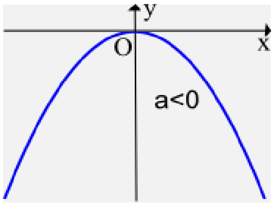

FIG. 4

41.1.3 Riproponiamo adesso un ragionamento che abbiamo già fatto quando ci siamo occupati delle disequazioni di 2° grado [2].

[2] Cfr.: Unità 25: Disequazioni di 2° grado, N° 25.1.

Data la parabola p di equazione $y=ax^2$, disegnata nel piano cartesiano ortogonale (Oxy) (Fig. 5), consideriamo la traslazione τ di componenti (x_0,y_0), le cui equazioni sono, come noto:

[3] $$x'-x=x_0,\quad y'-y=y_0.$$

Per mezzo di questa traslazione – che, come si sa, è una particolare congruenza – la parabola p è trasformata in una curva congruente e quindi ancora in una parabola p' uguale a p.

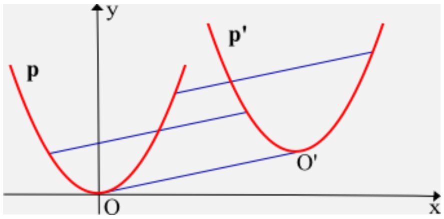

FIG. 5

L'equazione di questa nuova parabola si trova sostituendo in $y=ax^2$, al posto di x ed y, i valori seguenti, ottenuti dalle equazioni della traslazione: $x=x'-x_0$, $y=y'-y_0$. Si ha:

$$y'-y_0=a(x'-x_0)^2.$$

Da qui, dopo alcuni semplici passaggi, segue:

$$y'=ax'^2-2ax_0x'+(ax_0^2+y_0),$$

o anche:

$$y'=ax'^2+bx'+c,$$

avendo posto:

[4] $$-2ax_0=b,\quad ax_0^2+y_0=c.$$

Naturalmente l'equazione: $y'=ax'^2+bx'+c$, dove per b, c valgono le [4], diventa: $y=ax^2$ con la traslazione τ^{-1} di componenti $(-x_0,-y_0)$, inversa di τ. Tutto questo basta per farci concludere che:

Ogni **parabola con asse parallelo all'asse y** ha un'equazione del tipo:

[5] $$\mathbf{y=a\,x^2+b\,x+c}$$

dove $a\in\mathbb{R}_0$ e $b,c\in\mathbb{R}$, e ogni equazione di questo tipo rappresenta una parabola con asse parallelo all'asse y, con la concavità rivolta verso le y positive se a>0 e verso le y negative se a<0.

41.1.4 Di una parabola, assegnata mediante l'equazione [5], si possono trovare quanti punti si vogliono: basta attribuire valori arbitrari ad x e calcolare i corrispondenti valori di y. Ma per la determinazione del suo vertice, che è un punto basilare ed indispensabile per il disegno del grafico, abbiamo bisogno di una formula precisa. La ricaviamo tenendo presente che il punto che cerchiamo è quello in cui la traslazione di componenti (x_0,y_0) trasforma il punto (0,0); perciò, tenendo presenti le equazioni [3], questo punto ha coordinate (x_0,y_0). D'altro canto, per la prima delle [4], si ha:

$$x_0=-\frac{b}{2a}.$$

Ed è proprio questa la formula cercata. Infatti il valore di y_0 si può calcolare, oltre che dalla seconda delle [4], sostituendo il precedente valore di x_0 nell'equazione [5] della parabola. In ogni caso si trova:

$$y_0=\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

In definitiva, una volta posto $\mathbf{\Delta=b^2-4ac}$, cosa che evidenzia come questo numero sia il discriminante del trinomio ax^2+bx+c, le coordinate del vertice V della parabola di equazione [5] sono le seguenti:

[6] $$\mathbf{x_V = -\frac{b}{2a}}\,,\quad \mathbf{y_V = -\frac{\Delta}{4a}}\,.$$

Dalle formule [3] della traslazione, che fa passare dall'equazione [1] all'equazione [5], si ricavano poi le coordinate del fuoco F della parabola [5] e l'equazione della sua direttrice δ. Per questo bisogna tenere presenti le [6] e ricordare le coordinate $\left(0,\frac{1}{4a}\right)$ del fuoco della parabola [1] e l'equazione $y=-\frac{1}{4a}$ della sua direttrice. Esattamente, riguardo al fuoco si trova:

$$\mathbf{x_F = -\frac{b}{2a}},\quad \mathbf{y_F = \frac{1-\Delta}{4a}}\,.$$

mentre l'equazione della direttrice è:

$$\mathbf{y + \frac{1+\Delta}{4a} = 0}\,.$$

In figura 6 è disegnata la parabola di equazione $y=-x^2+2x$.

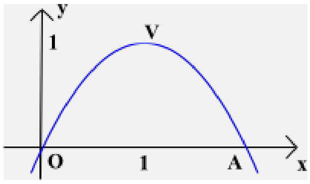

FIG. 6

Prova a rispondere alle seguenti domande:
a) Come si determinano i punti in cui questa parabola interseca gli assi di riferimento?
b) Qual è l'equazione del suo asse?
c) Una parabola di equazione [5] interseca sempre l'asse x? Interseca sempre l'asse y?
d) Quali sono le equazioni della traslazione che muta la parabola di equazione $y=x^2-x+2$ nella parabola di equazione $y=ax^2$?

41.1.5 Chiediamo adesso la tua collaborazione per risolvere un esercizio che lega alcune delle cose dette.

- ESERCIZIO. Riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), determinare l'equazione della parabola avente l'asse parallelo all'asse y e il vertice nel punto $V\left(\frac{3}{2},-2\right)$ e passante per il punto A(2,0) e disegnare la curva.

RISOLUZIONE (traccia). La parabola, che chiamiamo p, ha equazione del tipo $y=ax^2+bx+c$. Il fatto che l'ascissa del suo vertice sia $\frac{3}{2}$ implica che si abbia:

$$-\frac{b}{2a}=\frac{3}{2}\,.$$

Siccome, poi, i punti $V\left(\frac{3}{2},-2\right)$ ed A(2,0) appartengono a p, le loro coordinate devono soddisfare all'equazione di p; quindi si hanno altre due equazioni nelle incognite a, b, c:

$$-2=a\cdot\frac{9}{2}+b\cdot\frac{3}{2}+c=0,\quad 0=a\cdot 4+b\cdot 2+c\,.$$

Una volta risolto il sistema delle tre precedenti equazioni in dette incognite e sostituiti i valori così trovati nell'equazione della generica parabola sopraddetta, si ottiene: $p \equiv y = \ldots$.

Si potrebbe seguire quest'altra strada. L'equazione della parabola p si ottiene trasformando la parabola $y=ax^2$ con la traslazione che muta il punto O nel punto V, e imponendo che passi per il punto A.
Le equazioni della traslazione sono le seguenti:

$$X-x=\frac{3}{2},\ Y-y=-2\ ;\ \text{vale a dire: } x=X-\frac{3}{2},\quad y=Y+2.$$

In base ad esse l'equazione diventa: Y=… , ovvero, assumendo di nuovo x, y come coordinate correnti al posto di X, Y:

$$y=a\,x^2-3\,a\,x+\frac{9}{4}a-2\,.$$

Imponendo che A appartenga alla parabola p, si trova a=8. Per cui: $p\equiv y=\dots$.

41.2 MUTUE POSIZIONI DI RETTA E PARABOLA

41.2.1 Nel piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate la parabola **p** e la retta **r** di equazioni rispettivamente: $y=ax^2+bx+c$, $y=mx+n$.

Gli eventuali punti comuni a **p** ed **r** – ossia le coppie ordinate di numeri reali (x,y) che verificano contemporaneamente le equazioni delle due curve – si trovano risolvendo il sistema delle due equazioni medesime.

Per questo è necessario ricavare preventivamente l'equazione risolvente di tale sistema. Essa, ottenuta eliminando y tra le due equazioni che lo compongono, è la seguente equazione in x:

$$a\,x^2+(b-m)x+(c-n)=0\,.$$

Siccome si tratta di un'equazione di 2° grado, ha al più due radici reali. Di modo che la retta **r** può avere in comune con la parabola **p** al più due punti. Precisamente si presentano tre situazioni:

- Se l'equazione risolvente ha due radici reali e distinte, la retta **r** e la parabola **p** hanno in comune due punti distinti (Fig. 7): si dicono ***secanti*** (o ***l'una secante l'altra***).

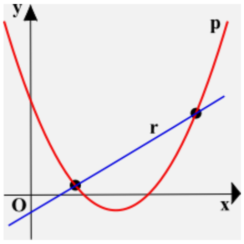

FIG. 7

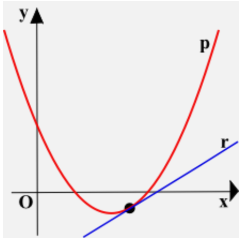

FIG. 8

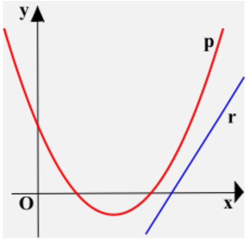

FIG. 9

- Se l'equazione risolvente ha due radici coincidenti, la retta **r** e la parabola **p** hanno in comune due punti coincidenti (Fig. 8): si dicono ***tangenti*** (o ***l'una tangente all'altra***) ed il loro punto comune si chiama ***punto di tangenza*** (o ***di contatto***). Si dice pure che la parabola e la retta ***si toccano*** in tale punto.
- Se l'equazione risolvente non ha radici reali, la retta **r** e la parabola **p** non hanno punti comuni (Fig. 9): si dicono ***esterne*** (o ***l'una esterna all'altra***).

In particolare, se la retta **r** è l'asse x (la cui equazione è y=0) le ascisse degli eventuali punti comuni a **p** ed **r** si trovano risolvendo l'equazione: $ax^2+bx+c=0$. Per cui, posto $\Delta=b^2-4ac$, ne deriva che **p** seca l'asse x se $\Delta>0$, è tangente all'asse x se $\Delta=0$, è esterna all'asse x se $\Delta<0$.

Al fine di controllare quanto detto sopra, risolvi ciascuno dei seguenti sistemi di equazioni e rappresenta le curve relative su uno stesso piano cartesiano ortogonale (Oxy):

1. $\begin{cases} y = 2x^2 - x - 3 \\ y = -x - 1 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} y = 2x^2 - x - 3 \\ y = -x - 3 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} y = 2x^2 - x - 3 \\ y = -x - 4 \end{cases}$

Per ciascun sistema, le intersezioni (eventuali) delle due curve che rappresentano le equazioni del sistema stesso costituiscono l'interpretazione grafica del sistema medesimo.

41.2.2 I seguenti esercizi riassumono alcune delle cose dette sopra.

- ESERCIZIO 1. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnati il punto A di coordinate $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ e la parabola p di equazione $y=\frac{1}{2}x^2-2x+2$.
  1) Determinare le equazioni delle rette tangenti a p condotte per A e le coordinate dei punti di contatto.
  2) Dopo aver verificato che la retta r di equazione y=x interseca p, trovare le coordinate del punto medio del segmento intercettato da p su r.

RISOLUZIONE. Anzitutto si disegnano nel piano (Oxy) la parabola p ed il punto A. Ma questo lo lasciamo fare a te. Si considera quindi la generica retta passante per A:

$$y - 1 = m\left(x - \frac{1}{2}\right), \text{dove } m \in \mathbb{R}\,.$$

Affinché essa risulti tangente a p occorre che il sistema formato dalla sua equazione e da quella di p abbia due radici coincidenti; il che accade se la risolvente di questo sistema ha il discriminante nullo. Troviamo questa risolvente:

$$x^2 - 2(m+2)x + (m+2) = 0\,;$$

il suo discriminante D è tale che: $D=4(m+2)(m+1)$. Poiché $D=0$ per $m=-2$ oppure $m=-1$, le due tangenti cercate sono:

- t_1 di equazione $y-1=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)$ ossia $y=-2x+2$,
- t_2 di equazione $y-1=-\left(x-\frac{1}{2}\right)$ ossia $y=-x+\frac{3}{2}$.

Per la determinazione dei loro punti di contatto con p ci rifacciamo alla precedente equazione risolvente. Da essa, tenendo presente che nel caso delle rette t_1 e t_2 risulta $D=0$, si trova: $x=m+2$. Sicché:

- con riferimento alla retta t_1 (ottenuta per $m=-2$): $x=0$ e, di conseguenza: $y=2$;
- con riferimento alla retta t_2 (ottenuta per $m=-1$): $x=1$ e, di conseguenza: $y=1/2$.

Dunque i punti di contatto di t_1 e t_2 con p sono rispettivamente:

$$T_1(0,2) \text{ e } T_2\left(1, \frac{1}{2}\right).$$

Completa l'esposizione con il disegno della figura.

Circa il punto 2), consideriamo il sistema delle equazioni di p e di r e ricaviamo la sua risolvente in x:

$$x^2 - 6x + 4 = 0.$$

Il suo discriminante è $36-16=20>0$; per cui r e p sono secanti. Per la ricerca delle coordinate del punto medio M del segmento che p intercetta su r, diciamo A e B gli estremi di questo segmento.

Potremmo giungere alle coordinate di M dopo aver trovato ovviamente quelle di A e B. Prova tu a seguire questo procedimento. Noi preferiamo seguire una via più breve.

Sappiamo che x_A e x_B sono le radici della precedente risolvente in x e sappiamo inoltre che:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}.$$

Siccome, per le formule di Viète, $x_A+x_B=6$, allora $x_M=3$. Da qui, riprendendo l'equazione della retta r, cui M appartiene, segue $y_M=x_M$ e pertanto $y_M=3$. In definitiva: $M(3,3)$.

- ESERCIZIO 2. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) è assegnata la parabola di equazione $y=\frac{1}{4}x^2$. Condotta la retta y=t, con t>0, determinare i punti A e B in cui essa interseca la parabola in modo che il triangolo OAB sia equilatero.

RISOLUZIONE (traccia). Con riferimento alla figura 10, una volta trovato che il segmento AB è lungo $4\sqrt{t}$, basta imporre che l'altezza del triangolo OAB, che evidentemente è uguale a t, sia $\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AB}$. Si trova t=12. Di conseguenza, i punti A e B hanno coordinate nell'ordine: $\left(4\sqrt{3}, 12\right)$, $\left(-4\sqrt{3}, 12\right)$.

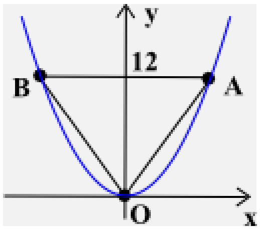

FIG. 10

41.3 MUTUE POSIZIONI DI DUE PARABOLE

41.3.1 Il discorso precedente relativo alle mutue posizioni di retta e parabola può essere ripetuto, con qualche necessario adattamento, quando è riferito alle posizioni reciproche di due parabole.

Siano allora le due parabole: $p \equiv y=ax^2+bx+c$, $p' \equiv y=a'x^2+b'x+c'$. Anche adesso il sistema di queste due equazioni ha come risolvente un'equazione di 2° grado in x :

$$(a-a')\,x^2+(b-b')\,x+(c-c')=0\,.$$

Ammesso che sia **a≠a'**, chiamiamo D il discriminante di questa equazione.

- Se D>0 le due parabole hanno in comune due punti distinti (Fig. 11): si dicono ***secanti***;
- Se D<0 le due parabole non hanno punti comuni (Fig. 12): si dicono ***non secanti***.
- Se D=0 hanno in comune due punti coincidenti (Fig. 13): si dicono ***tangenti***.

  In questo terzo caso, nel loro punto di contatto le due parabole ***hanno la stessa retta tangente***.

  Il fatto si può dimostrare in generale ma noi ti proponiamo di verificarlo solo in qualche caso particolare, come, per esempio, quello riferito alle due parabole seguenti:

$$y=2x^2+x+1 \;\text{ e }\; y=-\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{1}{6}$$

  che sono proprio quelle disegnate in figura 13.

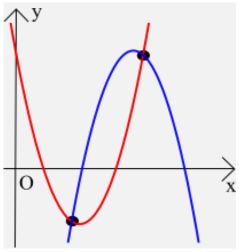

FIG. 11

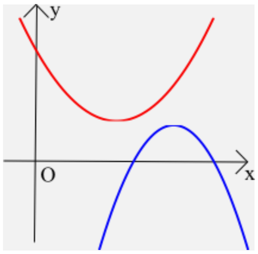

FIG. 12

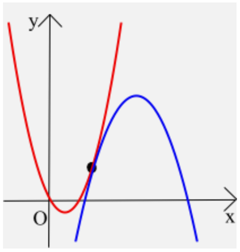

FIG. 13

Quando **a=a’** la precedente equazione risolvente del sistema delle due parabole degenera in una equazione di 1° grado in x, per cui le due parabole hanno al più un punto in comune.
Bisogna però distinguere due casi, a seconda che sia b≠b’ oppure b=b’.

- Se b≠b’ la suddetta equazione di 1° grado è determinata e perciò le due parabole hanno uno ed un solo punto in comune (Fig. 14): si dicono ancora *secanti*.
- Se b=b’ (ed ovviamente c≠c’, perché altrimenti le due parabole sarebbero *coincidenti*), la suddetta equazione di 1° grado è impossibile e perciò le due parabole non hanno punti comuni, cioè sono *non secanti*: in questo caso, su una qualunque retta parallela all’asse y, esse intercettano un segmento la cui lunghezza è costante ed è uguale a |c-c’| (Fig. 15).

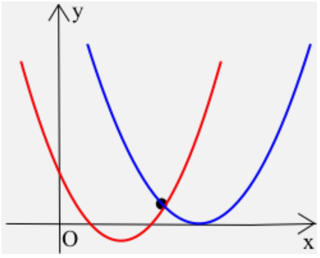

FIG. 14

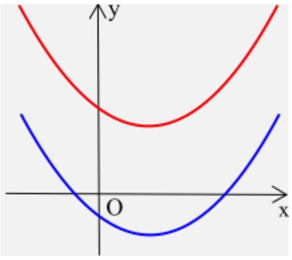

FIG. 15

Puoi controllare quanto abbiamo detto sopra risolvendo ciascuno dei seguenti sistemi e disegnando le curve che rappresentano le equazioni di ognuno di essi:

1. $\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = -x^2 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 1 \\ y = 3x^2 - 2x + 1 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} y = 2x^2 + x + 1 \\ y = -\frac{1}{4}x^2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} y = 3x^2 - 4x \\ y = 3x^2 + 2x \end{cases}$ 5. $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 + x - 2 \\ y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 1 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} y = 3x^2 - 4x + 1 \\ y = 3x^2 + 2x \end{cases}$

Per ciascun sistema, le intersezioni (eventuali) delle due curve che rappresentano le equazioni del sistema stesso costituiscono l’<u>interpretazione grafica</u> del sistema medesimo.

41.3.2 Proponiamo adesso un esercizio in cui si utilizzano alcuni dei concetti appresi sopra e per la cui risoluzione richiediamo la tua collaborazione.

- ESERCIZIO. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) sono assegnate le parabole: $p \equiv y=\frac{1}{2}x^2-2x+3,\ p' \equiv y=-x^2-2x+3$. Verificare che sono tangenti e che nel punto di contatto presentano la stessa retta tangente.

RISOLUZIONE (traccia). L’equazione risolvente del sistema delle due equazioni date è: $x^2=0$ ed è evidente che ammette la soluzione x=0 contata due volte. Il punto di contatto è perciò A(0,3).
Si trova che la retta tangente a p in A ha equazione: $y=-2x+3$ e si verifica che è tangente anche a p’.

41.4 PARABOLE CONGRUENTI E PARABOLE SIMILI

41.4.1 Ritorniamo sulle parabole p e p’ esaminate nel paragrafo 41.3.1 e fermiamo la nostra attenzione sul caso in cui sia **a’=a**. Ebbene, queste due parabole sono ***congruenti*** (o ***uguali*** o ***isometriche***). Infatti la parabola p’ si ottiene da p con una traslazione, quella che porta il vertice di p nel vertice di p’ (rivedi le figure 14 e 15). Questo fatto, oltre che intuirlo dalle figure, potrebbe essere dimostrato in generale, ma non lo facciamo perché vi sono troppe lungaggini nei calcoli. Ti invitiamo, ad ogni buon conto, a verificarlo in qualche caso pensato da te stesso e, in particolare, nei casi degli esercizi 4 e 6 di cui al paragrafo 41.3.1 succitato.

Aggiungiamo, per completezza, che la condizione $a'=a$ è sufficiente per concludere che le due parabole sono congruenti, ma non è necessaria. In altri termini, vi sono parabole congruenti del tipo p e p', pur essendo $a'\neq a$, purché sia però $|a'|=|a|$.

In effetti, se $a'=-a$, dapprima si opera un ribaltamento della parabola p intorno all'asse x. Siccome le equazioni di tale ribaltamento sono: $x=X,\ y=-Y$, la parabola p", trasformata di p, ha equazione: $-Y=aX^2+bX+c$, ossia: $Y=-aX^2-bX+c$; o anche, tenendo presente che $a'=-a$, si ha: $Y=a'X^2-bX-c$. A questo punto si trasforma p" in p' con la traslazione che porta il vertice di p" in quello di p' (Fig. 16).

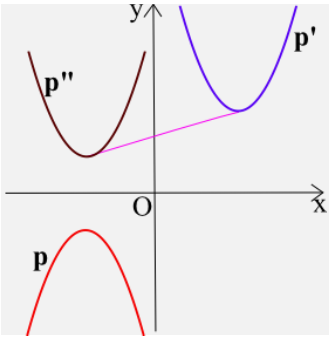

FIG. 16

41.4.2 Come ogni isometria trasforma una parabola in una parabola, lo stesso fa ogni similitudine. Vale infatti il seguente teorema.

- TEOREMA. **Ogni similitudine trasforma una parabola in una parabola.**

DIMOSTRAZIONE. Sia K la parabola luogo dei punti P equidistanti da un punto fisso F (il fuoco) e da una retta fissa d (la direttrice, $F\notin d$). Ogni similitudine trasforma, come noto, punti in punti, rette in rette e segmenti congruenti in segmenti congruenti. Ne discende che ogni similitudine trasforma F in un punto F' e d in una retta d', e trasforma i punti P, equidistanti da F e da d, nei punti P' equidistanti da F' e d'; cioè nei punti di una parabola K' di fuoco F' e direttrice d'. Dunque ogni similitudine trasforma la parabola K in una parabola K'. [c.v.d.]

Tuttavia, mentre devono essere soddisfatte condizioni particolari affinché due parabole siano isometriche, vale invece la seguente proprietà, della quale ci limitiamo a dare l'enunciato:

Assegnate due qualsiasi parabole, esiste almeno una similitudine che trasforma l'una nell'altra.

Essa assicura che due qualsiasi parabole sono figure simili, anche se la cosa può apparire sorprendente ove si mettano a confronto una parabola piuttosto "stretta" ed una abbastanza "larga".

41.5 PROPRIETÀ ELEMENTARI DELLA PARABOLA.

41.5.1 Consideriamo una parabola di vertice V ed asse a e conduciamo una corda AB perpendicolare ad a in H (Fig. 17). La regione di piano delimitata dalla parabola e dalla corda AB si chiama **segmento parabolico** di ***base*** AB ed ***altezza*** VH.

Archimede, nell'opera *Spirali*, dimostrò una regola per calcolarne l'area.

PROPRIETÀ 1: REGOLA DI ARCHIMEDE.
L'**area S del segmento parabolico** di base AB ed altezza VH è data dalla seguente formula:

[7] $$\mathbf{S = \frac{2}{3}\,\overline{AB}\cdot\overline{VH}}.$$

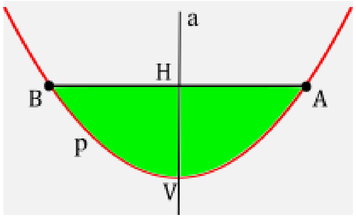

FIG. 17

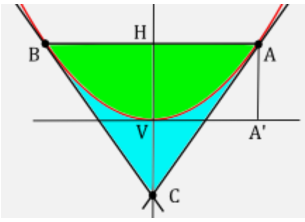

FIG. 18

41.5.2 Non ci possiamo soffermare per adesso sulla dimostrazione della regola di Archimede. Lo faremo più avanti, nel corso degli studi. Un'altra proprietà che ci limitiamo ad enunciare, invitandoti a dimostrarla in qualche situazione particolare, è la seguente:

PROPRIETÀ 2.
Considerata una corda AB di una parabola perpendicolare al suo asse di simmetria, la regione piana delimitata dalla parabola e dalle tangenti ad essa nei punti A, B è uguale alla metà dell'area del segmento parabolico individuato dalla corda medesima sulla parabola assegnata (Fig. 18)
Indicato inoltre con C il punto in cui s'intersecano le due tangenti suddette, l'area del segmento parabolico è uguale ai 2/3 dell'area del triangolo ABC (Fig. 18).
Inoltre, l'area del triangolo mistilineo VA'A, delimitato dai segmenti VA' e A'A e dall'arco di parabola VA, è uguale ad 1/3 dell'area del rettangolo VA'AH (Fig. 18).

Sulla base della regola di Archimede e della proprietà precedente, risolvi i seguenti esercizi:

1. Sulla parabola di equazione $y=\frac{1}{4}x^2$ la retta r di equazione y=4 individua un segmento parabolico: calcolarne l'area.
2. Le rette tangenti alla parabola di cui all'esercizio precedente, nei punti in cui la interseca la retta r, individuano con tale retta un triangolo: calcolare le aree delle due regioni in cui esso è diviso dalla parabola.
3. Determinare la retta parallela all'asse x che, sulla parabola di equazione $y=3\,x^2$, individua un segmento parabolico di area 32.
4. Le tangenti ad una parabola nei punti estremi di una sua corda perpendicolare al suo asse individuano con la corda medesima un triangolo di area 24. Calcolare le aree delle due regioni in cui il triangolo è diviso dalla parabola.
5. Le tangenti ad una parabola di equazione $y=a\,x^2$ nei suoi punti di ordinata 3 delimitano, con la parabola medesima, una regione di area 4. Trovare le ascisse di tali punti.

41.5.3 Ti proponiamo adesso di risolvere un importante esercizio e di memorizzare il risultato che può tornarti utile in più di una circostanza e che si può considerare una nuova proprietà della parabola.

PROPRIETÀ 3.
In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la parabola di equazione $y=ax^2+bx+c$. Considerato un suo generico punto P di ascissa x_0, la pendenza m della retta tangente alla parabola in P è: $\mathbf{m=2ax_0+b}$.

41.5.4 Ti proponiamo ancora di dimostrare le seguenti proprietà:

PROPRIETÀ 4.
Le tangenti ad una parabola in due suoi punti qualsiasi A, B s'intersecano in un punto C situato sulla parallela all'asse della parabola condotta per il punto medio M della corda AB (Fig. 19).
Su questa medesima parallela è situato inoltre il punto P in cui l'arco AB della parabola tocca la tangente ad essa parallela ad AB (Fig. 19).

PROPRIETÀ 5.
Se un punto A di una parabola dista d dall'asse a della parabola, il punto B in cui la tangente in A incontra la tangente nel vertice V dista d/2 dall'asse stesso. Inoltre, il punto C in cui la tangente in A incontra l'asse della parabola dista dal vertice V quanto A dista dalla tangente in V e pertanto B è punto medio del segmento AC (Fig. 20).

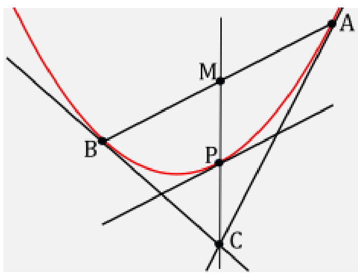

FIG. 19

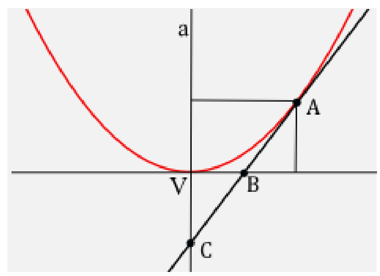

FIG. 20

41.5.5 Ancora una proprietà, della quale forniamo anche la dimostrazione.

PROPRIETÀ 5.
La normale ad una parabola in un suo qualunque punto P è bisettrice dell'angolo avente il vertice in P e per lati la semiretta uscente da P e passante per il fuoco F e la semiretta uscente da P e parallela all'asse della parabola.

DIMOSTRAZIONE. Incominciamo col dire che per ***normale*** ad una parabola (o più in generale ad una curva) in un punto s'intende la retta perpendicolare alla tangente alla curva in quel punto. Ciò detto, siano t la tangente ad una parabola assegnata γ in suo punto generico P, n la normale a γ in P ed s la retta parallela all'asse della parabola condotta per P. Assumiamo un riferimento cartesiano (Oxy) in modo che, rispetto ad esso, la parabola abbia equazione $y=ax^2$, con a numero reale positivo (Fig. 21). Cosicché il fuoco F della parabola ha coordinate $\left(0,\frac{1}{4a}\right)$. Indicata ora con p l'ascissa di P, le sue coordinate sono chiaramente $\left(p, ap^2\right)$. Ragion per cui, dopo aver constatato che la pendenza della tangente t è $m_t=2ap$, le pendenze della normale n e della retta r passante per P e per F sono nell'ordine:

$$m_n=-\frac{1}{m_t}=-\frac{1}{2ap} \quad \text{e} \quad m_r=\frac{y_P-y_F}{x_P-x_F}=\frac{ap^2-\frac{1}{4a}}{p}=\frac{4a^2p^2-1}{4ap}.$$

Ne consegue che gli angoli $\alpha=N\widehat{P}F$ e $\beta=Y\widehat{P}N$ sono tali che:

$$\tan\alpha = \tan\widehat{nr} = \frac{m_r - m_n}{1 + m_r m_n} = \frac{\dfrac{4a^2p^2-1}{4ap} + \dfrac{1}{2ap}}{1 - \dfrac{4a^2p^2-1}{4ap}\cdot\dfrac{1}{2ap}} = 2ap\,, \quad \tan\beta = \tan\widehat{sn} = -\frac{1}{m_n} = 2ap\,.$$

Pertanto i due angoli α e β sono uguali.

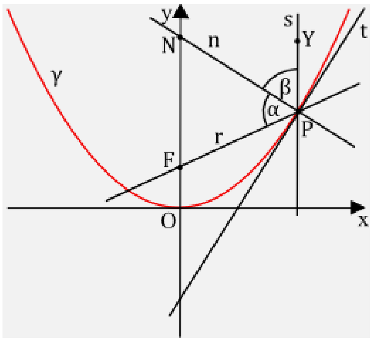

FIG. 21

NOTA BENE. Quest'ultima proprietà ha un rilevante significato fisico, che nello stesso tempo ne costituisce una verifica sperimentale:
Se si fa incidere sulla parte concava di un ostacolo parabolico, posto dentro un ondoscopio, un treno d'onde rettilinee che viaggiano nella direzione dell'asse della parabola, esse si riflettono diventando onde circolari con centro nel fuoco della parabola. Viceversa, se si producono onde circolari con centro nel fuoco, esse si riflettono diventando onde rettilinee che si propagano nella direzione dell'asse della parabola.

41.5.6 Riprendiamo la regola di Archimede per alcuni approfondimenti.

- Per prima cosa faremo osservare come la formula [7] assuma una forma particolarmente interessante quando la parabola è riferita ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) in modo che l'origine O coincida con il vertice V della parabola e l'asse y coincida con l'asse di simmetria della parabola (Fig. 22). Supponiamo in un primo momento che la parabola sia situata nel semipiano $y \geq 0$. Cosicché la sua equazione è: $y=ax^2$, con $a>0$.

Ebbene, tenendo presente la formula [7], osserviamo che si ha:

$$\overline{AB} = x_A - x_B \quad \text{e} \quad \overline{VH} = y_A = ax_A^2\,.$$

Si ha d'altro canto:

$$x_A = \frac{x_A - x_B}{2}\,.$$

L'area A del segmento parabolico è pertanto:

[8] $$S = \frac{a}{6}(x_A - x_B)^3\,.$$

Si capisce che se la parabola è situata nel semipiano $y \leq 0$ e perciò $a<0$, l'area del segmento parabolico è la seguente:

[8′] $$S = -\frac{a}{6}(x_A - x_B)^3\,.$$

Tali formule continuano a valere anche se la parabola ha un'equazione del tipo $y=ax^2+bx+c$. Basta tener presente che una qualunque traslazione che porti il suo vertice nell'origine del sistema di riferimento ha equazioni del tipo: $(X=x+p,\ Y=y+q)$ e si ha pertanto $X_A - X_B = x_A - x_B$.

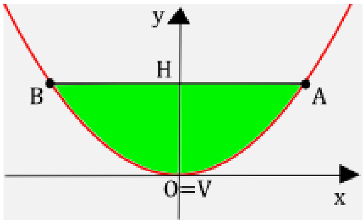

FIG. 22

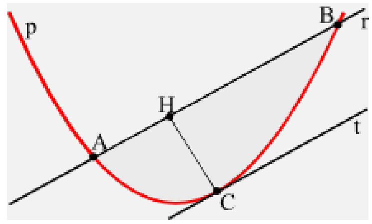

FIG. 23

- In realtà, la definizione di **segmento parabolico** non postula che la retta che lo determina sia perpendicolare all'asse di simmetria della parabola. Può essere, infatti, una retta qualsiasi (Fig. 23).

Ebbene, nel caso generale (che ovviamente comprende il caso particolare in cui la retta è perpendicolare all'asse della parabola), la **regola di Archimede** è la seguente:

> L'area di un segmento parabolico è uguale ai $2/3$ dell'area del rettangolo avente per dimensioni la lunghezza della corda che la parabola intercetta sulla retta che determina il segmento parabolico e la distanza di tale retta dalla retta parallela ad essa e tangente alla parabola.

In simboli, con riferimento alla figura 23, dove sono rappresentate la parabola p e la retta r che individuano il segmento parabolico ed inoltre la retta t parallela ad r e tangente alla parabola, l'area S del segmento parabolico è:

$$S = \frac{2}{3}\,\overline{AB} \cdot \overline{CH}$$

dove evidentemente AB è la corda che p intercetta su r, C è il punto di contatto di t con p ed H è la proiezione ortogonale di C su r. I segmenti AB e CH continuano a chiamarsi ***base*** ed ***altezza*** del segmento parabolico.

Ciò che è ancora più interessante è il fatto che le formule [8] e [8'] continuano a valere anche nel caso in cui la retta che determina il segmento parabolico non è perpendicolare all'asse di simmetria della parabola. A condizione però che la parabola sia riferita ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) in modo che il suo asse di simmetria sia parallelo all'asse y. Ovviamente vale la [8] se la parabola rivolge la concavità verso l'alto e la [8'] se la rivolge verso il basso. Tralasciamo la dimostrazione che comunque non è difficile sul piano concettuale, ma comporta calcoli noiosi.

VERIFICHE

N.B.: Nelle seguenti questioni, quando non è detto esplicitamente, il piano di suppone riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy).

Parabola (nn. 1-8).

1. Determinata la parabola di equazione $y=ax^2$ passante per il punto A, disegnarne l'andamento, sapendo che:

1) $A(3,2)$. 2) $A\left(-\frac{3}{2},-1\right)$. 3) $A\left(-3,-\frac{9}{2}\right)$. 4) $A\left(1,-\frac{1}{2}\right)$.

2. Tracciare i grafici delle seguenti funzioni:

1) $y = x^2 - 4$ 2) $y = -x^2 + 2x$ 3) $y = 2x^2 + x - 1$

4) $y=\begin{cases} x^2 & \text{se } x\le 0 \\ -x^2 & \text{se } x>0 \end{cases}$ 5) $y=\begin{cases} x^2 & \text{se } x\le 1 \\ 1 & \text{se } x>1 \end{cases}$

6) $y=x^2+|x|$ 7) $y=x^2-2|x|+2x$ 8) $y=x^2+|x-1|$

3. Evidenziare sul disegno la regione di piano che soddisfa alla seguente condizione:

1) $y\ge 1-x^2$; 2) $y>x^2+2x+1$; 3) $y\le \frac{1}{2}x^2-x$; 4) $y<2+x^2$.

4. Trovare un modo per verificare che le seguenti parabole sono congruenti:

1) $y=x^2,\ y=-x^2+1$. 2) $y=\frac{1}{2}x^2-2,\ y=-\frac{1}{2}x^2+x$.

3) $y=\frac{2}{3}x^2-2x+1,\ y=-\frac{2}{3}x^2-1$. 4) $y=-\frac{1}{4}x^2+1,\ y=\frac{1}{4}x^2+2x-1$.

5. Determinare la parabola di equazione $y=ax^2+bx+c$ e disegnarne l'andamento sapendo che passa per i punti:

1) $(0,1),(1,1),\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$. 2) $(0,0),(1,1),(3,1)$. 3) $(0,1),(1,1),(3,1)$. 4) $(1,2),(-1,1),(1,-1)$.

$\left[\textbf{R.}\ 1)\ y=x^2-x+1\ ;\ 2)\ y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{4}{3}x;\ 3)\ !?\ ;\ 4)\ !?\right]$

6. Trovare i coefficienti dell'equazione $y=ax^2+bx+c$ e disegnare la parabola rappresentata da essa, sapendo che passa per il punto A ed ha il vertice nel punto V, tali che:

1) $A(0,5), V\left(3,-\frac{1}{2}\right)$. 2) $A(1,3), V(-1,-1)$. 3) $A(-2,1), V\left(-2,\frac{1}{2}\right)$. 4) $A(1,-2), V\left(-\frac{3}{2},-2\right)$.

$\left[\textbf{R.}\ 1)\ y=\frac{11}{18}x^2-\frac{11}{3}x+5\ ;\ 2)\ \dots\ ;\ 3)\ !?\ ;\ 4)\ !?\right]$

7. Tra le parabole di equazione $y=x^2-(m+1)x-2m$, dove $m\in\mathbb{R}$, determinare quella che passa per il punto A e disegnarne l'andamento, sapendo che:

1) $A(0,0)$. 2) $A\left(1,\frac{1}{2}\right)$. 3) $A(-2,6)$.

[**R.** 1) $y=x^2-x$; 2) ... ; 3) !?]

8. Tra le parabole aventi l'asse parallelo all'asse y e passanti per i punti $A(1,1)$ e $B(-1,2)$ determinare quella che: a) passa per il punto $(2,0)$; b) passa per il punto $(3,0)$; c) ha come asse di simmetria la retta di equazione $x=2$; d) è tangente all'asse x.

[**R.** Una generica parabola avente l'asse parallelo all'asse y e passante per i punti A e B ha la seguente equazione: $y=ax^2-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}-a$, dove $a\in\mathbb{R}_0$. Pertanto ...]

Mutue posizioni di retta e parabola (nn. 9-16).

9. Evidenziare sul disegno la regione di piano che soddisfa alle seguenti condizioni:

1. $\begin{cases} y>x+1 \\ y>x^2-1 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} y\le 2 \\ y\ge x^2-2x+2 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} y>2x-1 \\ y<-\frac{3}{2}x^2+2x \end{cases}$ 4. $\begin{cases} y\le 2x \\ y\ge \frac{1}{2}x^2-2x \end{cases}$

10. È assegnata la parabola di equazione $y=-2x^2+4x+1$. Dire com'è situata rispetto ad essa la retta di equazione:

1) $y=4x+1$. 2) $y=8-x$. 3) $y=x+2$.
4) $y=2x-1$. 5) $y=1-2x$. 6) $y=7/2$.

Se la retta è tangente alla parabola, determinare il punto di contatto; se seca la parabola, trovare i punti intersezione. $\left[\textbf{R.}\ 1)\ \text{tangente}, (0,1);\ 2)\ \text{esterna};\ 3)\ \text{secante}, \left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right), (1,3);\ \dots\right]$

11. È assegnata la retta di equazione $y=\frac{1}{2}x-1$. Dire com'è situata rispetto ad essa la parabola di equazione:

$$1)\ y=x^2-1\,. \quad 2)\ y=x^2+\frac{1}{2}x-1\,. \quad 3)\ y=2x^2-\frac{1}{2}x+1\,.$$

Se la parabola è tangente alla retta, determinare il punto di contatto; se interseca la retta, trovare i punti intersezione. $\left[\mathbf{R.}\ 1)\ \text{secante},\ (0,-1),\ \left(\frac{1}{2},-\frac{3}{4}\right);\ \ldots\right]$

12. Trovare l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y, passante per l'origine O del sistema di riferimento e tangente alla retta di equazione $y=x-1$ nel punto di ascissa 1. [**R.** $y=x^2-x$]

13. Sono assegnate le parabole di equazione: $y=mx^2-(m-1)x+2$, dove m è un qualunque numero reale non nullo.

1) Verificare che tutte le parabole date passano per due punti A, B.
2) Tra le parabole date trovare quella che risulta tangente alla retta $y=2x+2$.
3) Determinare la retta parallela ad AB e tangente a questa parabola trovata e chiamare C il punto di contatto.
4) Calcolare l'area del triangolo ABC.

$\left[\mathbf{R.}\ 1)\ A(0,2), B(1,3);\ \ 2)\ y=-x^2+2x+2;\ \ 3)\ y=x+\frac{9}{4}, C\left(\frac{1}{2},\frac{11}{4}\right);\ \ 4)\ \ldots\right]$

14. Sono assegnate le parabole e le rette di equazioni rispettivamente: $y=ax^2-2x$, $y=ax-a-2$, dove a è un parametro reale non nullo.
Dopo aver constatato che per un valore a' di a si ottengono una parabola p' ed una retta t' tangenti in un punto e per un altro valore a" di a si ottengono una parabola p" ed una retta t" tangenti in un altro punto, si verifichi che t' è tangente anche a p" ma che t" non è tangente a p'.
Indicato infine con A il punto comune a t' e t", si calcolino le ampiezze degli angoli sotto cui sono viste da A le due parabole p' e p". [**R.** $a'=-2$, $a''=2/3$; ...]

15. Tra le parabole di equazione $y=x^2-mx+(m+2)$, dove $m\in\mathbb{R}$,determinare quella che:
1) passa per il punto (1,3);
2) ha il vertice sulla parabola di equazione $y=-x^2+2x+2$;
3) è tangente alla retta di equazione $y=x-\frac{1}{4}$.

[**R.** 1) !? ; 2) !? ; 3) 2 soluzioni: $y=x^2+2x$, $y=x^2-4x+6$]

16. È data la parabola di equazione $y=\frac{1}{4}x^2$. Detto P un qualsiasi punto della sua direttrice, dimostrare che le tangenti alla parabola condotte per P sono perpendicolari. (Questo è un modo per dire che ***la parabola è vista sotto un angolo retto da ogni punto della sua direttrice***)

Mutue posizioni di due parabole (nn. 17-24).

17. Evidenziare sul disegno la regione di piano che soddisfa alle seguenti condizioni:

$$1.\ \begin{cases} y>-x^2+1 \\ y>x^2-1 \end{cases} \quad 2.\ \begin{cases} y\geq 2x^2 \\ y\leq x^2-2x+2 \end{cases} \quad 3.\ \begin{cases} y>-x^2+2x-1 \\ y<-\frac{3}{2}x^2+2x \end{cases} \quad 4.\ \begin{cases} y\leq -x^2+2x \\ y\geq \frac{1}{2}x^2-2x \end{cases}$$

18. Si consideri la parabola p di equazione $y=ax^2-2ax-3a$, dove a è un numero reale positivo assegnato. Si scriva l'equazione della parabola p' simmetrica di p rispetto ad O. Condotte poi le rette tangenti alle due parabole nei punti comuni, si calcoli il valore di a per il quale il quadrilatero formato da esse è un rettangolo. $\left[\mathbf{R.}\ p'\equiv y=-ax^2-2ax+3a;\ \frac{\sqrt{2}}{4}\right]$

19. Sono assegnate le parabole di equazioni: $y=x^2-2x+1$, $y=-x^2+3x$. Tra le parabole aventi l'asse parallelo all'asse y e passanti per i punti comuni alle parabole assegnate, trovare quella che:

1) passa per il punto (2,-1); 2) ha il vertice sulla retta $x=2$; 3) è tangente alla retta $y=3x$.

20. Sono assegnate le parabole di equazione $y=ax^2+(a+1)x-2a+1$, $\forall a\in\mathbb{R}_0$.
1) Dimostrare che tutte le parabole passano per due punti A, B. 2) Tra le parabole date trovare le due per le quali la tangente in A e quella in B sono perpendicolari. 3) Verificare che queste due parabole trovate sono congruenti.

$\left[\textbf{R.}\ 1)\ (1,2), (-2,-1);\ 2)\ a=\pm\frac{\sqrt{2}}{3};\ \ldots\right]$

21. Tra le parabole aventi l'asse parallelo all'asse y e tangenti in O alla parabola p di equazione $y=4x-x^2$ trovare quella che: 1) passa per il punto (2,0); 2) passa per il punto (1,4); 3) ha il vertice sulla retta $y=x-2$.
Dimostrare che la parabola p e quella soddisfacente alla condizione 3 sono congruenti.

[**R.** 1) $y=-2x^2+4x$; 2) !? ; 3) $y=x^2+4x$; ...]

22. Sono assegnate le parabole di equazioni: $y=x^2+ax+b$, $y=-x^2+2ax-b+1$, dove a, b sono numeri reali qualsiasi. Determinare a, b in modo che le due parabole si intersechino in due punti, uno di ascissa −1 ed uno di ascissa 2.
Verificare poi che ai valori di a e di b così trovati corrispondono due parabole congruenti.
Più in generale, verificare che, $\forall a, b\in\mathbb{R}$, le due parabole assegnate sono congruenti.

[**R.** $a=2$, $b=-3/2$; ...]

23. Determinare l'equazione della parabola p tangente in O alla parabola di equazione $y=\frac{1}{2}x^2+2x$ e passante per il punto A(5,0). Sull'arco OA di p determinare due punti P, Q tali che il segmento PQ sia parallelo all'asse x e, con la sua proiezione sullo stesso asse x, individui un rettangolo di perimetro $\frac{75}{16}$.

$\left[\textbf{R.}\ p\equiv y=-\frac{2}{5}x^2+2x;\ \ldots\right]$

24. Tra i punti della parabola di equazione $y=-\frac{1}{4}x^2+x+3$ determinare quello di ordinata:

1) nulla; 2) uguale a 5; 3) massima; 4) doppia dell'ascissa.

[**R.** 1) 2 soluzioni: (−2,0), (6,0); 2) impossibile; 3) (2,4); 4) 2 sol.: ...]

Questioni varie.

25. Sono assegnate le rette: $r\equiv 2x-2y-1=0$ ed $s\equiv y+1=0$.
1. A) Determinare il loro punto comune.
   B) Disegnarle sullo stesso piano.
2. A) Trovare i due punti, A e B, della retta r che sono equidistanti dall'origine O degli assi di riferimento e dalla retta s.
   B) Trovare le coordinate dei punti C e D, proiezioni ortogonali rispettivamente di A e B sulla retta s.
3. A) Dimostrare che il quadrilatero convesso avente per vertici i punti medi del quadrilatero ABDC è un parallelogramma.
   B) Calcolare le ampiezze degli angoli interni di tale parallelogramma.

$\left[\textbf{R.}\ \ldots;\ 2A)\ A\left(0,-\frac{1}{2}\right), B\left(2,\frac{3}{2}\right);\ \ldots\right]$

26. Sono assegnate la retta di equazione $y=2x-2$ e la parabola p di equazione $y=\frac{1}{2}x^2$.
1. A) Verificare che sono tangenti e trovare le coordinate del punto T di contatto.
   B) Indicata poi con t l'ascissa del generico punto P di p, si trovino in funzione di t le coordinate del

punto Q simmetrico di P rispetto a T.

2. A) Tra le equazioni $x=x(t)$, $y=y(t)$, essendo (x,y) le coordinate del punto Q, si elimini t e si faccia vedere che l'equazione $y=f(x)$ che in questo modo si ottiene è quella di una parabola p' (è il *luogo geometrico del punto* Q al variare di P su p): trovarne l'equazione e verificare che è tangente alla parabola p nel punto T.
   B) Spiegare perché le parabole p e p' sono congruenti e trovare l'equazione dell'isometria che trasforma p' in p.

$\left[\textbf{R.}\ 1A)\ T(2,2),\ 1B)\ Q\left(4-t, 4-\frac{1}{2}t^2\right);\ 2A)\ y=-\frac{1}{2}x^2+4x-4,\ ...\right]$

27. È data la famiglia di rette di equazione $y=ax+a+6$, dove a è un parametro reale.

1. A) Dimostrare che passano per uno stesso punto.
   B) Trovare la retta r della famiglia passante per il punto $A(0,3)$.
2. A) Considerato il punto $B(2,0)$, calcolare l'area del triangolo individuato dalle rette r, x ed AB.
   B) Trovare l'equazione della parabola p avente l'asse parallelo all'asse y, tangente all'asse x nel punto B e tangente pure alla retta r.
   C) Considerata la retta t, tangente alla parabola p e parallela alla retta AB, calcolare le aree dei due poligoni in cui essa divide il triangolo suddetto.

$\left[\textbf{R.}\ ...;\ 2B)\ p\equiv y=\frac{3}{4}(x-2)^2;\ ...\ ;\ 2C)\ t\equiv y=-\frac{3}{2}x+\frac{9}{4};\ ...\right]$

28. È data la famiglia di parabole di equazione $y=-x^2+ax$, dove a è un parametro reale positivo.

1. A) Dimostrare che le parabole assegnate non hanno altri punti comuni oltre all'origine O del sistema di riferimento.
   B) Trovare le coordinate del vertice della generica parabola.
2. A) Dopo aver spiegato perché le parabole assegnate sono fra loro isometriche, prendere due generiche parabole della famiglia e trovare le equazioni dell'isometria che trasforma una di esse nell'altra.
   B) Il luogo geometrico [3] dei vertici delle parabole è una curva K: far vedere che si tratta di una parabola isometrica ad una parabola della famiglia.
3. A) Considerare il triangolo equilatero inscritto nella regione piana delimitata da una delle parabole della famiglia e dall'asse x in modo che esso abbia un vertice sull'asse x e il lato opposto parallelo a quest'asse: tra le parabole assegnate determinare quella per cui l'area di questo triangolo è $\frac{3}{4}\sqrt{3}$.

[**R.** …; 3A) $y=-x^2+3x$]

29. È assegnato il punto $V(1,2)$.

1. A) Trovare le coordinate del punto V', simmetrico di V rispetto ad O.
   B) Trovare l'equazione della parabola avente l'asse parallelo all'asse y ed il vertice in V e passante per V'.
   C) Considerata una retta di equazione $y=k$, dire per quali valori di k interseca la parabola p.
2. A) Indicati con A, B i punti in cui tale retta interseca p, esprimere dist(A,B) in funzione di k.
   B) Esiste un valore di k per il quale il triangolo VAB è equilatero?

[**R.** 1A) …, 1B) $p\equiv y=-x^2+2x+1$, 1C) …; 2A) …, 2B) detta VH la distanza di V dalla retta, deve risultare: $VH=\frac{1}{2}AB\sqrt{3}$; quindi ...]

[3] Vedi es. n. 26, punto 2A).

30. Sono assegnate le parabole di equazione: $y=x^2-(m-1)x+(m+1)$, dove m è un parametro reale.
Dopo aver calcolato in funzione di m le coordinate (x,y) del vertice della generica parabola, eliminare m tra le equazioni $x=x(m)$, $y=y(m)$ così ottenute e far vedere che l'equazione $y=f(x)$ che in questo modo si ricava è quella di una parabola p avente l'asse parallelo all'asse y [è il *luogo geometrico dei vertici delle parabole assegnate*].
Verificare che tra le parabole assegnate ve ne sono due, p_1 e p_2, aventi il vertice sulla retta di equazione $y=x$.
Dimostrare che le tre parabole p, p_1, p_2 sono congruenti.

[**R.** ... ; $p \equiv y=-x^2+2x+2$; $p_1 \equiv y=x^2+2x$, $p_2 \equiv y=x^2-4x+6$]

31. È assegnata la parabola p di equazione $y=-x^2+5x$. Considerato il punto $P(t,0)$, con $0<t<5/2$, si dica A il punto di p avente la stessa ascissa di P e si chiami B il punto di p avente la stessa ordinata di A e Q la proiezione di B sull'asse x. Esprimere in funzione di t il perimetro del quadrilatero PABQ e disegnarne l'andamento al variare di t, determinando anche i vertici del quadrilatero che ha perimetro massimo.
Calcolare inoltre per quale valore di t il quadrilatero PABQ è un quadrato.

[**R.** $A(t,-t^2+5t)$, $B(5-t,-t^2+5t)$, $Q(5-t,0)$; $f(t)=-2t^2+6t+10$; max $f(t)$ per $t=3/2$; …]

32. Calcolare il perimetro e l'area del quadrilatero individuato dalle tangenti alle parabole di equazioni: $y=x^2-3x$ ed $y=-x^2+5x$ nei loro punti comuni.
Dimostrare per via sintetica e verificare per via analitica che il quadrilatero avente per vertici i punti medi di quello suddetto è un parallelogramma.
Anche di questo quadrilatero calcolare il perimetro e l'area.

33. Due numeri reali variano in modo che la loro somma si mantenga costantemente uguale al numero positivo S. Dimostrare che il prodotto dei due numeri è massimo quando essi sono uguali ad $S/2$.

[**R**. Se uno dei due numeri è x, l'altro ... ; per cui il loro prodotto è $-x^2+Sx$; siccome questo prodotto è rappresentato graficamente da una parabola che volge la concavità verso ... , allora ...]

34. Un corpo, lanciato verticalmente verso l'alto con velocità v_0, si muove di moto rettilineo con la seguente legge oraria: $x=-\frac{1}{2}g\,t^2+v_0t$, dove g è l'accelerazione di gravità, avendo supposto la retta del moto orientata verso l'alto e avendo assunto come istante iniziale uguale a 0 l'istante del lancio e come origine O la posizione del corpo in quell'istante.
Rappresentare il grafico della precedente legge per $t\geq 0$ e descrivere la variazione di x al variare di t. Specificare, in particolare, in quale istante il corpo: 1) ripassa per la posizione da cui è stato lanciato; 2) raggiunge la massima quota e quanto dista questa dalla posizione di lancio.

$$\left[\textbf{R.}\;\; 1)\;\; t=\frac{2\,v_0}{g}\;;\;\; 2)\;\; t=\frac{v_0}{g}\;,\;\; x=\frac{v_0^2}{2g}\right]$$

35. Trovare l'equazione della parabola K avente per asse la retta di equazione $x=3$ ed è tangente nell'origine O alla retta di coefficiente angolare $10/3$. Detta S la regione piana delimitata dalla parabola K e dall'asse x, calcolare quanti punti di S – compreso il suo contorno – hanno coordinate entrambe intere. Calcolare, quindi, la probabilità che, scelto a caso uno di tali punti, esso si trovi sull'asse della parabola o sulla bisettrice del 1° e 3° quadrante.

$$\left[\textbf{R.}\; K\equiv y=-\frac{5}{9}x^2+\frac{10}{3}x;\; 24\text{ punti};\; p=\frac{5}{12}\right]$$

36. È assegnata la parabola K di equazione $y=4x-x^2$. Chiamato P un punto dell'asse x, di ascissa t compresa fra 0 e 2, si chiami Q il punto della parabola avente la stessa ascissa di P, R l'altro punto della parabola che ha la stessa ordinata di Q ed S il punto dell'asse x avente la stessa ascissa di R.

1) Si esprima in funzione di t il perimetro del quadrilatero PQRS.
Si determini quindi il valore di t per cui: 2) il perimetro suddetto è massimo; 3) il quadrilatero PQRS è un quadrato; 4) il perimetro del quadrilatero PQRS vale $79/8$.

$\left[\textbf{R.}\ 1)\ f(t)=-2t^2+4t+8;\ 2)\ \dots;\ 3)\ \dots;\ 4)\ 2\ \text{sol:}\ \frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right]$

37. Sono assegnate le parabole di equazione: $y=mx^2-(2m-1)x+1$, dove m è un parametro reale.
1) Per un valore di m la parabola degenera in una retta. Determinarne l'equazione.
2) Dimostrare che tutte le parabole assegnate passano per due punti A e B.
3) Tra le parabole assegnate determinare quella che ha il vertice sull'asse y.
4) Su questa parabola trovare un punto la cui distanza dalla retta AB sia uguale a $2\sqrt{2}$.

[**R.** … 4) 2 soluzioni: $(-2,3)$, $(4,9)$]

38. Le dimensioni di un rettangolo sono: $4a-x$ e $2a+x$, dove a è una lunghezza assegnata ed x una lunghezza variabile. Descrivere come varia l'area del rettangolo al variare di x, dopo averne fornito una rappresentazione grafica.
Calcolare, in particolare, per quale x il rettangolo: 1) ha area massima; 2) è un quadrato.

[**R.** $A(x)=-x^2+2ax+8a^2$, con $0<x<4a$; $\max A(x) = \dots$ per $x=a$; …]

39. Le dimensioni di un rettangolo sono $2a$ e $5a/2$, dove a è una lunghezza assegnata.
Calcolare la variazione $f(x)$ che subisce l'area del rettangolo quando la più piccola delle sue dimensioni aumenta di una lunghezza x e la più grande diminuisce di x, ma a condizione che la più piccola delle dimensioni non superi comunque la più grande. Descrivere l'andamento di $f(x)$ al variare di x, dopo averne dato una rappresentazione grafica. Calcolare, in particolare, per quale lunghezza x l'area del rettangolo: 1) ha il massimo aumento; 2) rimane invariata.

[**R.** $f(x)=-x^2+\frac{1}{2}ax$, con $0\le x\le\frac{a}{4}$; il massimo aumento ($=a^2/16$) si ha per $x=a/4$; l'area rimane invariata per $x=a/2$ e, ovviamente, per $x=0$]

40. È assegnata la parabola di equazione $y=-\frac{1}{3}x^2+2x$. Chiamati A e B i punti in cui essa interseca l'asse x, determinare sull'arco AB un punto P in modo che sia massima la somma: 1) delle sue coordinate; 2) dell'ascissa col doppio dell'ordinata; 3) dell'ordinata col doppio dell'ascissa.

$\left[\textbf{R.}\ P_1\left(\frac{9}{2},\frac{9}{4}\right); P_2\left(\frac{15}{4},\frac{45}{16}\right); P_3(6,0)\right]$

41. È assegnato un rettangolo di dimensioni a e 2a.
a) Se la dimensione maggiore aumenta di una lunghezza h pari a quella di cui la minore diminuisce, come varia l'area del rettangolo? Esiste un valore di h per cui si ha la variazione massima?
b) Se la dimensione maggiore diminuisce di una lunghezza k pari a quella di cui la minore aumenta, come varia l'area del rettangolo? Esiste un valore di k per cui si ha la variazione massima?

[**R.** a) L'area del rettangolo diminuisce secondo la legge … e si ha la diminuzione massima, uguale ad $a^2/4$, per $h=a/2$. b) L'area del rettangolo dapprima aumenta, poi … e si ha l'aumento massimo … mentre riguardo alla diminuzione massima …]

42. È data la parabola p di fuoco F e vertice V. Condurre una generica retta t tangente alla parabola e indicare con T il punto di contatto e con A il punto in cui t interseca l'asse della parabola.
a) Dimostrare che FA = FT. b) Indicato con H il piede della perpendicolare condotta da F su t, dimostrare che il rettangolo di dimensioni FV e FT è equivalente al quadrato di lato FH.

43. È data la parabola p di fuoco F e direttrice d. Siano P un suo generico punto e Q la proiezione ortogonale di P su d. Dopo aver riferito il pino della figura ad un conveniente sistema di coordinate cartesiane, dimostrare che la retta tangente alla parabola in P coincide con l'asse del segmento FQ.

44. Il lato del quadrato disegnato nella figura 24 è lungo 2 m. Esprimere in funzione di x l'area del triangolo ABC e disegnare l'andamento della funzione ottenuta. Per quale valore di x l'area del triangolo è massima? Per quale valore di x è minima? In corrispondenza di tali valori calcolare il perimetro del triangolo. $\left[\textbf{R.}\ A(x)=-\frac{1}{2}x^2-x+2,\ \text{con}\ 0\le x\le 1;\ \max A(x)=2,\ \min A(x)=\frac{1}{2};\ \dots\right]$

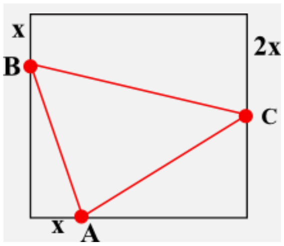

FIG. 24

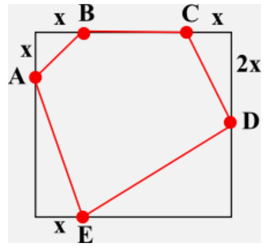

FIG. 25

45. Il lato del quadrato disegnato nella figura 25 è lungo 2 m. Esprimere in funzione di x l'area del pentagono ABCDE e disegnare l'andamento della funzione ottenuta. Esiste un valore di x per il quale l'area del pentagono è minima? Esiste un valore di x per cui essa è massima? Se esiste il pentagono di area massima e/o quello di area minima calcolarne il perimetro.

[**R.** $A(x)=-2x^2+2x+2$, con $0<x<1$; ...]

46. È assegnata la funzione:

$$f(x)=\begin{cases}4-x^2 & \text{per } x<1\\ 5-2x & \text{per } x\ge 1\end{cases}$$

Disegnarne l'andamento e calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dal grafico della funzione, dalle rette di equazioni $x=-2$ e $x=5/2$ e dall'asse x.

47. È assegnata la funzione:

$$f(x)=\sqrt{|x^2-1|+1}\ .$$

Disegnarne l'andamento e calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dal grafico della funzione, dalle rette di equazione $x=-2$ e $x=2$ e dall'asse x

48. Nella figura sottostante (Fig. 26) sono disegnate tre parabole p_1, p_2, p_3: trovare le loro equazioni. Determinare quindi le coordinate dei punti in cui esse, prese a due a due, s'intersecano.

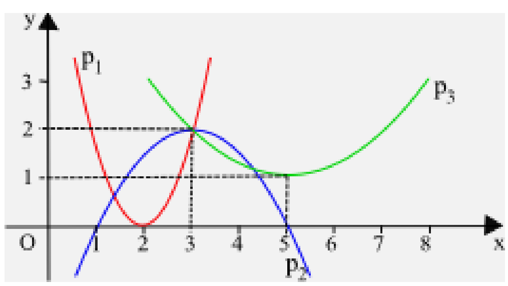

FIG. 26

49. Costruisci e risolvi un esercizio sulla parabola di equazione $y=ax^2+bx+c$ in cui sono assegnati:

a) un punto di date coordinate ed una retta di data equazione;
b) tre punti di date coordinate;
c) due punti di date coordinate e una retta di data equazione;
d) una parabola di data equazione.

50. Nella figura sottostante (Fig. 27) sono disegnati i due triangoli equilateri uguali ABC e DEF tali che i lati dell'uno sono paralleli a quelli dell'altro e la lunghezza di ciascun lato è uguale ad a.

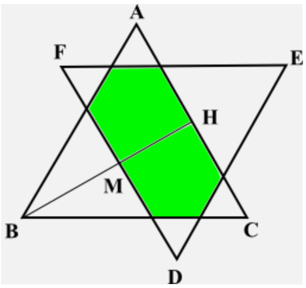

FIG. 27

Mentre il triangolo ABC resta fisso, il triangolo DEF scorre in modo che si conservi il parallelismo dei suoi lati con quelli di ABC e in modo che il punto medio M del lato DF descriva il segmento BH, essendo H il punto medio di AC. Trovare la funzione f(x) che esprime l'area della regione ombreggiata in figura per mezzo della lunghezza x del segmento BM e disegnarne l'andamento.

$$\left[\mathbf{R.}\ f(x)=-\frac{\sqrt{3}}{4}x^2+\frac{a}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{16}a^2,\ \ \text{con}\ \ 0\le x\le \frac{\sqrt{3}}{2}a\right]$$

51. Nelle figure sottostanti sono rappresentate una parabola p (Fig. 28A) oppure una parabola p ed una retta r (Fig. 28B). In ciascun caso scrivere il sistema di disequazioni che determina la regione ombreggiata.

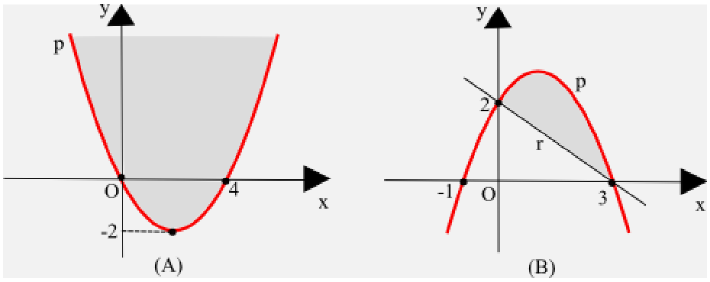

FIG. 28

52. Sia data una parabola. La sua corda AB, lunga 5 m e perpendicolare all'asse della parabola, individua un segmento parabolico di area $\frac{25}{3}$ m^2. Calcolare la distanza focale della parabola. [**R.** $5/8$ m]

53. Sia la parabola di vertice V e distanza focale $\frac{3}{4}$L, essendo L una lunghezza assegnata. La sua corda AB, perpendicolare all'asse della parabola, individua un segmento parabolico di area 12 L^2. Calcolare le lunghezze della corda AB e della distanza VH di V da essa. [**R.** 6L, 3L]

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

DOMANDE.

1. È vero che due parabole, ottenute l'una dall'altra con una traslazione, sono congruenti?

2. Riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è vero che per tre punti, comunque scelti, passa una ed una sola parabola avente l'asse parallelo all'asse y?

3. Si consideri la parabola di equazione $y=ax^2+bx+c$, assegnata in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy). A quale condizione devono soddisfare i coefficienti dell'equazione affinché la parabola non abbia punti comuni con l'asse x?
4. Si considerino la parabola di equazione $y=2x^2$ e la retta di equazione $y=x-1$, assegnate in un piano cartesiano ortogonale (Oxy). Si vuole stabilire se sono secanti, tangenti o esterne. Come si procede?
5. Si considerano le due parabole di equazioni $y=ax^2+bx+c$ e $y=a'x^2+b'x+c'$, assegnate in un piano cartesiano ortogonale (Oxy). A quali condizioni devono sottostare i coefficienti delle equazioni affinché su una generica retta, parallela all'asse y, esse intercettino un segmento di lunghezza costante?
6. Si considerano le due parabole di equazioni $y=ax^2+bx+c$ e $y=a'x^2+b'x+c'$, assegnate in un piano cartesiano ortogonale (Oxy). A quali condizioni devono sottostare i coefficienti delle equazioni affinché esse siano congruenti?
7. Si consideri la funzione $y=ax^2+bx+c$, dove a, b, c sono parametri reali con $a<0$. È vero che essa assume come valore massimo l'ascissa del vertice della parabola che la rappresenta graficamente in un piano cartesiano ortogonale (Oxy)?
8. È vero o è falso che due qualsiasi parabole sono simili?

RISPOSTE.

1. Sì. Due qualsiasi figure geometriche, ottenute l'una dall'altra con una traslazione, sono congruenti. Quindi anche due parabole lo sono.
2. No. In genere non è così, ma solo se i tre punti non sono allineati e, inoltre, se due qualsiasi di essi non si trovano sulla stessa parallela all'asse y.
3. Deve essere: $b^2-4ac<0$. Se, infatti, è $b^2-4ac=0$ la parabola è tangente all'asse x (ha perciò con tale asse due punti coincidenti in comune); se, invece, è $b^2-4ac>0$ la parabola seca l'asse x (ha quindi in comune due punti distinti con tale asse).
4. Si trova dapprima l'equazione risolvente (in x) del sistema delle due equazioni; quindi si calcola il discriminante di questa equazione e si controlla il suo segno. A seconda che questo segno sia positivo, nullo o negativo, la parabola e la retta sono rispettivamente secanti, tangenti o esterne.
5. Deve risultare $a=a'$ e $b=b'$. In tal caso, su una qualsiasi retta parallela all'asse y le due parabole intercettano un segmento di lunghezza $|c-c'|$.
6. Basta che sia $a=\pm a'$, naturalmente con tali coefficienti non nulli poiché, in tal caso, non ci sarebbero più le parabole.
7. È falso. L'ascissa del vertice della parabola è il valore della variabile x in cui la funzione assume valore massimo, ma questo massimo è fornito dall'ordinata del vertice.
8. È vero, anche se questo può sembrare strano, in particolare se si pensa ad una parabola molto "larga" e ad una molto "stretta". In realtà, date due qualsiasi parabole, esiste una similitudine che trasforma l'una nell'altra.