Prerequisiti:
- Rappresentare retta, parabola, ellisse ed iperbole e circonferenza in un piano cartesiano.
- Saper risolvere sistemi ed equazioni di 2° grado.

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:

- *descrivere parabola, ellisse ed iperbole come sezioni coniche*
- *risolvere semplici problemi sui luoghi geometrici*
- *delineare, sotto il profilo storico, il contributo di Cartesio e Fermat all'algebrizzazione della geometria*
- *realizzare semplici costruzioni grafiche di parabola, ellisse, iperbole*

L'unità riguarda il 2° biennio di tutte le scuole superiori, eccezion fatta per l'Istituto Tecnico, Settore Economico.

Coniche e luoghi geometrici

Unità 45

45.1 LE CONICHE

45.1.1 La *parabola*, l'*ellisse* (conveniamo che la *circonferenza* sia una particolare ellisse), l'*iperbole* sono curve espresse, in un piano cartesiano (Oxy), da particolari equazioni di 2° grado in x, y: queste curve sono accomunate col nome generico di ***coniche***. Vale infatti la seguente definizione:

CONICA è una curva espressa, in un piano cartesiano (Oxy), da un'equazione algebrica di 2° grado in x, y.

La più generale equazione di una conica è pertanto la seguente:

$$\mathbf{a\,x^2 + b\,x\,y + c\,y^2 + d\,x + e\,y + f = 0},$$

dove a, b, c, d, e, f sono numeri reali assegnati, purché a, b, c non siano contemporaneamente nulli.
Questo non significa però che ogni equazione di 2° grado in x, y rappresenti una conica di uno dei tipi suddetti. Tanto per fare qualche esempio:

- l'equazione $(x-1)(x-y)=0$, che può essere scritta per esteso in questo modo:
$$x^2 - xy - x + y = 0,$$
rappresenta le due rette $x=1$ ed $y=x$;
- l'equazione $(x-1)^2+(y-2)^2=0$, che può essere scritta per esteso in questo modo:
$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0,$$
rappresenta il solo punto $(1,2)$;
- l'equazione $x^2+2y^2+1=0$ rappresenta l'insieme vuoto.

Questi esempi, detto per inciso, sono conosciuti come casi particolari di ***coniche degeneri***.
A questo punto dei tuoi studi non possiedi gli strumenti matematici necessari per uno studio completo delle coniche e devi accontentarti di quanto fin qui appreso. È, tuttavia, possibile qualche approfondimento di ciò che hai studiato.

Poiché quanto andremo ad esporre richiede la conoscenza delle equazioni di una rotazione di $-90°$ intorno ad O, scriviamo queste equazioni, lasciando a te il facile compito di darne giustificazione:
[1] $$x' = y, \quad y' = -x.$$

45.1.2 Occupiamoci allora degli approfondimenti su accennati.

♦ Come sai, l'equazione $y=ax^2+bx+c$ rappresenta una parabola con asse parallelo all'asse y, con vertice nel punto $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$, dove $\Delta=b^2-4ac$, e con la concavità rivolta verso le y positive se $a>0$ e verso le y negative se $a<0$. Con la trasformazione di equazioni [1] (rotazione di $-90°$ intorno ad O) essa è mutata nella seguente equazione:
$$x' = ay'^2 - by' + c;$$
nello stesso tempo il suo vertice risulta trasformato nel punto $V'\left(-\frac{\Delta}{4a}, \frac{b}{2a}\right)$, l'asse di simmetria della parabola diventa parallelo all'asse x ed essa volge la concavità verso le x positive se $a>0$ e verso le x negative se $a<0$. In conclusione, riprendendo le solite coordinate correnti x, y e ponendo b al posto di $-b$:

L'equazione:
$$\mathbf{x = ay^2 + by + c}$$
rappresenta una **parabola con asse parallelo all'asse x**, vertice nel punto:

$$V\left(-\frac{\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$$

dove $\Delta = b^2 - 4ac$, con la concavità rivolta verso le x positive se $a>0$ (Fig. 1) e verso le x negative se $a<0$ (Fig. 2). Di questa parabola possiamo ottenere anche le coordinate del fuoco F e l'equazione della direttrice δ. Si ha precisamente:

$$F\left(\frac{1-\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a}\right), \quad \delta \equiv x = -\frac{1+\Delta}{4a}.$$

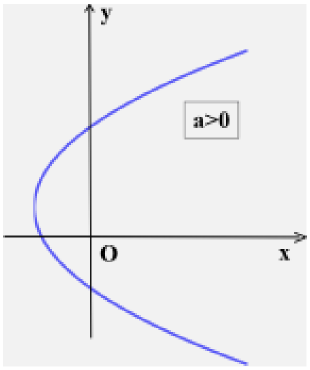

FIG. 1

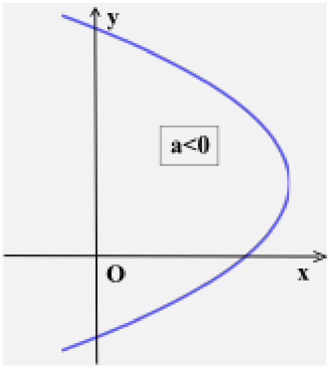

FIG. 2

- Le equazioni:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \;\; e \;\; \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

rappresentano nell'ordine un'ellisse e un'iperbole aventi la relativa retta dei fuochi coincidente con l'asse x (ammesso che, nel caso dell'ellisse, risulti $a>b$). Il passaggio da queste equazioni alle equazioni:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \;\; e \;\; \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

che rappresentano le due curve con le rette dei fuochi coincidenti con l'asse y, può pensarsi avvenuto per mezzo della rotazione [1].

- Il passaggio dall'equazione $xy=k$ all'equazione:

$$xy = -k$$

può pensarsi ottenuto ancora con la rotazione [1].

- Un'ultima considerazione per la quale si richiede la tua collaborazione. Si può far vedere che:
  - Un'ellisse avente l'asse dei fuochi parallelo all'asse x (Fig. 3) ha un'equazione di questo tipo:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (a > b);$$

  - Un'iperbole avente l'asse dei fuochi parallelo all'asse x (Fig. 4) ha un'equazione di questo tipo:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$$

In entrambe le situazioni il punto (x_0,y_0) è il nuovo ***centro*** della curva.

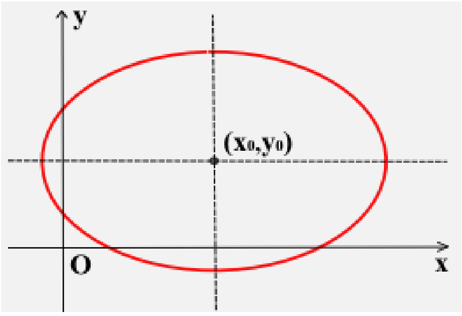

FIG. 3

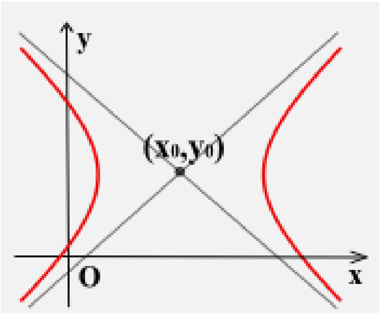

FIG. 4

45.1.3 Ti proponiamo alcuni esercizi su quest'ultimo argomento.

1. Disegna la seguente parabola, dopo averne determinato le coordinate del vertice e quelle del fuoco e l'equazione della direttrice:
$$\text{a) } x=-y^2+2\,y. \quad \text{b) } x=2\,y^2-1. \quad \text{c) } x=-y^2-y+\frac{1}{4}. \quad \text{d) } x=y^2+y+\frac{1}{4}.$$
2. Disegna l'ellisse di equazione:
$$9\,x^2+16\,y^2=1$$
e quella che si ottiene da essa in seguito alla traslazione di componenti $(2{,}1)$, dopo aver determinato anche l'equazione di quest'ultima curva.
3. Disegna l'iperbole di equazione:
$$x^2-y^2=2$$
e quella che si ottiene da essa in seguito alla traslazione di componenti $(-1{,}2)$, dopo aver determinato anche l'equazione di quest'ultima curva.
4. È data la seguente equazione:
$$9x^2+4y^2+18x-8y-23=0\,.$$
Dimostrare che, mediante un'opportuna traslazione, può esser messa nella forma seguente:
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$
e rappresenta pertanto un'ellisse.
5. È data la seguente equazione:
$$x^2-4y^2-4x-8y-4=0\,.$$
Dimostrare che, mediante un'opportuna traslazione, può esser messa nella forma seguente:
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$
e rappresenta pertanto un'iperbole.

45.1.4 L'equazione generale di 2° grado in due indeterminate x, y può essere considerata come una proprietà che accomuna le coniche. Esiste, però, un'altra proprietà comune. Ci arriveremo per gradi.

Ritorniamo al procedimento seguito per trasformare la condizione $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a$, che definisce l'ellisse, nella sua equazione in un particolare riferimento cartesiano:
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$
Ricordiamo che siamo dovuti passare per l'equazione:
$$a^2-c\,x=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

che è un altro modo, certamente più complicato, di scrivere l'equazione di un'ellisse.
Analogamente, nel caso dell'iperbole, siamo dovuti passare per l'equazione:

$$a^2 - c\,x = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

la quale può essere considerata come un altro modo di scrivere l'equazione dell'iperbole.
Ora, le due precedenti equazioni possono essere accomunate, scrivendole in quest'unica forma:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \frac{c}{a}\left|\frac{a^2}{c} - x\right|.$$

la quale può essere interpretata nel senso che le distanze del punto (x, y) dal punto $(c, 0)$ e dalla retta $x = a^2/c$ sono nel rapporto c/a. Ricordiamo, inoltre, che c/a è l'eccentricità della conica, che è minore di 1 nel caso dell'ellisse e maggiore di 1 nel caso dell'iperbole.
D'altra parte, ricordando la definizione di parabola, questa può essere considerata come una conica di eccentricità uguale ad 1.
Possiamo, pertanto, concludere che:

Una **conica** è il luogo geometrico dei punti del piano, le cui distanze da un punto fisso F (detto *fuoco*) e da una retta fissa d (detta *direttrice* coniugata del fuoco), tale che $F \notin d$, hanno rapporto uguale ad una costante e (detta *eccentricità*).
In particolare:
- se $0<e<1$, la conica è un'ellisse,
- se $e=1$, la conica è una parabola,
- se $e>1$, la conica è un'iperbole.

Si assume, per convenzione, che la circonferenza abbia eccentricità nulla ($e=0$).

NOTA BENE. La precedente definizione di conica è assunta, a volte, come punto di partenza per uno studio dell'argomento, condotto in maniera diversa da come abbiamo fatto noi.

45.1.5 Un'altra proprietà delle coniche vogliamo evidenziare: riguarda la generalizzazione di una proprietà rilevata, a suo tempo, per la circonferenza e la parabola.
Ricorderai, precisamente, che abbiamo dimostrato la seguente proprietà:
Ogni similitudine trasforma una circonferenza in una circonferenza e una parabola in una parabola.

Ebbene, essa può essere completata con il seguente teorema.

♦ TEOREMA. *Ogni similitudine trasforma: un'ellisse in un'ellisse e un'iperbole in un'iperbole.*

DIMOSTRAZIONE. Partiamo dall'ellisse. Un'ellisse E è il luogo dei punti P, le cui distanze da due punti fissi, F_1 ed F_2, hanno somma costante 2a. La similitudine σ che si considera trasforma F_1 in F_1' ed F_2 in F_2', e trasforma i punti P nei punti P' tali che, detto h il rapporto di similitudine, si ha:

$$\frac{\overline{P'F_1'}}{\overline{PF_1}} = \frac{\overline{P'F_2'}}{\overline{PF_2}} = h;\ \text{ossia:}\ \overline{PF_1} = \frac{1}{h}\,\overline{P'F_1'}\ \text{e}\ \overline{PF_2} = \frac{1}{h}\,\overline{P'F_2'}\,.$$

Pertanto, essendo per definizione di E: $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a$, risulta: $\overline{P'F_1'}+\overline{P'F_2'}=h\cdot 2a$.
I punti P' descrivono, dunque un'ellisse E', trasformata di E nella similitudine in questione.
Relativamente all'iperbole basta ripetere il precedente ragionamento, con i necessari adattamenti.
Bisogna tener presente però che le curve trasformate non hanno in genere equazioni del tipo particolare che abbiamo avuto modo di studiare.

45.1.6 Come per la circonferenza e la parabola, vale anche la seguente proprietà, che però non dimostriamo: *Assegnate due qualsiasi ellissi esiste almeno una similitudine che trasforma l'una nell'altra. Dicasi ugualmente per due qualsiasi iperboli.*

Per questa ragione:

Due qualsiasi ellissi sono figure simili. E così pure sono figure simili due qualsiasi iperboli.

45.2 LUOGHI GEOMETRICI

45.2.1 La parabola, la circonferenza, l'ellisse, l'iperbole sono state introdotte ciascuna come insieme di punti che soddisfano a determinate condizioni, vale a dire come ***luogo geometrico***.

Anche l'asse di un segmento è stato caratterizzato dalla proprietà di essere il "luogo geometrico" dei punti equidistanti dagli estremi del segmento e così pure la bisettrice di un angolo come il "luogo geometrico" dei punti equidistanti dai lati dell'angolo.

Si possono ottenere luoghi geometrici anche all'interno di uno specifico problema e tali luoghi possono essere rette, parabole, circonferenze o altre curve. Ne abbiamo già visto qualche esempio anche in passato.

45.2.2 Adesso vogliamo approfondire la questione proponendo una gamma più ampia di esercizi sull'argomento. Lo faremo però nella sezione "verifiche". Qui ci accontentiamo di qualche esempio.

- ESERCIZIO 1. In un piano cartesiano ortogonale (Oxy) sono assegnati i punti $A(1,0)$ e $B(0,2)$. Trovare il luogo geometrico dei punti P per i quali risulta:

$$1)\ \overline{AP}^2 - \overline{PB}^2 = 2; \qquad 2)\ \overline{AP}^2 + \overline{PB}^2 = 3.$$

RISOLUZIONE. Indicate con (x, y) le coordinate del generico punto del piano, risulta evidentemente:

$$\overline{AP}^2 = (x-1)^2 + y^2, \quad \overline{PB}^2 = x^2 + (y-2)^2.$$

Ne consegue che:

- la condizione 1) si traduce nella seguente equazione in x, y:

$$[(x-1)^2 + y^2] - [x^2 + (y-2)^2] = 2,$$

da cui, dopo aver semplificato, segue:

$$2x - 4y + 3 = 0,$$

che è evidentemente l'equazione di una retta;

- la condizione 2) si traduce nella seguente equazione in x, y:

$$[(x-1)^2 + y^2] + [x^2 + (y-2)^2] = 3,$$

che, a conti fatti, diventa:

$$x^2 + y^2 - x - 2y + 1 = 0;$$

vale a dire una circonferenza.

- ESERCIZIO 2 (da risolvere). In un piano cartesiano ortogonale (Oxy) sono assegnati i punti $A(2,0)$ e $B(0,1)$. Trovare il luogo geometrico dei punti tali che la somma dei quadrati delle loro distanze dai punti O, A, B sia uguale a:

$$1)\ 14/3; \qquad 2)\ 3.$$

[**R.** a) … ; b) ?!]

- ESERCIZIO 3. In un piano cartesiano ortogonale (Oxy) sono assegnate le circonferenze di equazione:

$$(x - 2m)^2 + (y + m - 1)^2 = 1,$$

dove m è un parametro reale. Trovare il luogo dei centri delle circonferenze.

RISOLUZIONE. È sufficiente constatare che il centro della generica circonferenza, tra quelle assegnate, ha coordinate (x,y) tali che:

$$x = 2\,m,\ \ y = 1 - m.$$

Eliminando m tra queste due equazioni (cosa che si fa rapidamente calcolando m da una di esse e sostituendo il valore trovato nell'altra), si ottiene l'equazione del luogo cercato, che è evidentemente una retta (è detta *retta dei centri* delle circonferenze):

$$x + 2y - 2 = 0.$$

- ESERCIZIO 4. In un piano cartesiano ortogonale (Oxy) sono assegnate le parabole di equazione:

$$y = x^2 - 2\,m\,x + 2\ ,$$

dove m è un parametro reale.

1) Verificare che la distanza del fuoco dal vertice della generica parabola è la stessa per tutte le parabole.
2) Trovare il luogo dei vertici delle parabole.
3) Trovare il luogo dei fuochi delle parabole.

RISOLUZIONE. La generica delle parabole assegnate ha il vertice ed il fuoco nei punti V ed F tali che:

$$V(m, 2 - m^2), \qquad F\left(m, \frac{9-4m^2}{4}\right).$$

1) La distanza del vertice dal fuoco della generica parabola è:

$$\overline{VF} = \left|(2-m^2) - \frac{9-4m^2}{4}\right| = \frac{1}{4}.$$

Evidentemente è indipendente dal parametro m e quindi dalla parabola considerata, cosicché è la stessa per tutte le parabole.

2) Per trovare il luogo dei vertici delle parabole poniamo:

$$x = m,\ \ y = 2 - m^2$$

ed eliminiamo m tra queste due equazioni. L'operazione è semplice: basta sostituire nella seconda al posto di m il valore fornito dalla prima, che nel caso specifico è x. Si ottiene l'equazione di una parabola:

$$y = 2 - x^2.$$

3) Analogamente si procede per il luogo dei fuochi, dopo aver posto:

$$x = m, \quad y = \frac{9-4m^2}{4}.$$

Si ottiene l'equazione:

$$y = -x^2 + \frac{9}{4},$$

che è quella di un'altra parabola.

- ESERCIZIO 5. In un piano si fissino una retta r ed un punto A ad una distanza a non nulla dalla retta. Detto P un punto di r, si indichi con Q un punto del piano tale che la retta PQ sia perpendicolare ad r ed il segmento PQ sia lungo quanto AP. Riferito il piano ad un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali, si trovi il luogo geometrico descritto dal punto Q quando P descrive r.

RISOLUZIONE. La situazione può essere rappresentata come in figura 5. Si capisce allora come sia conveniente assumere la retta r come asse delle ordinate, mentre l'asse delle ascisse conviene che sia la perpendicolare alla retta r condotta per A, orientata in modo che A si trovi nel semipiano x>0 (Fig. 6).

Con questa scelta il punto A ha coordinate (a,0), con a>0, mentre si ha: P(0,y) e Q(x,y). Deve ovviamente essere soddisfatta la condizione imposta dalla traccia: $\overline{PQ}=\overline{PA}$, o anche: $\overline{PQ}^2=\overline{PA}^2$. Questa, passando alle coordinate cartesiane, diventa: $x^2=a^2+y^2$ e, in definitiva:

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Si tratta di un'iperbole equilatera avente un vertice in A ed il cui asse non traverso è la retta r.

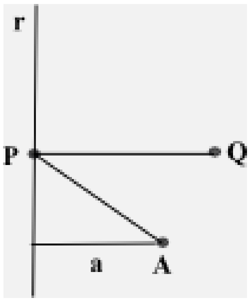

FIG. 5

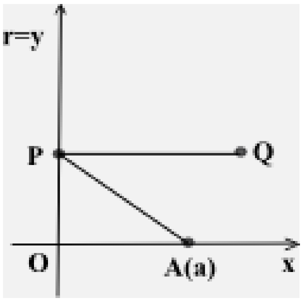

FIG. 6

ESERCIZIO 6. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la retta r di equazione $y=x-2$. Per un suo generico punto A condurre la perpendicolare p ad essa e prendere su p un punto P tale che $\overline{AP}=\overline{OA}$. Trovare il luogo geometrico di P al variare di A su r e disegnarne l'andamento.

RISOLUZIONE (Traccia). Il generico punto A di r ha coordinate $(t,\ t-2)$ e la retta p ha equazione $y=-x+2t-2$. Indicate con (x,y) le coordinate del generico punto P di p devono essere soddisfatte le seguenti condizioni:

$$y=-x+2t-2\,,\quad (x-t)^2+(y-t+2)^2=t^2+(t-2)^2\,.$$

Eliminando il parametro t fra queste due equazioni, si trova l'equazione del luogo cercato:

$$xy+x-y=0\,.$$

- ESERCIZIO 7 (da risolvere). È data la parabola p di fuoco F e direttrice d. Indicato con P un suo generico punto, sia Q la sua proiezione ortogonale sulla retta d.

a) Dimostrare che il luogo geometrico del punto medio M del segmento FQ coincide con la retta tangente alla parabola nel suo vertice.

b) Dimostrare inoltre che la retta MP è, nel medesimo tempo, asse del segmento FQ e tangente alla parabola.

45.3 CURVE IN FORMA PARAMETRICA ED IN COORDINATE POLARI [1]

45.3.1 Si può constatare che le equazioni [1], [2] e [3], trovate nel precedente paragrafo 45.2.2, hanno la medesima struttura: le coordinate (x,y) di un generico punto del luogo geometrico sono espresse in funzione di un parametro reale (m nella fattispecie).

Ebbene, tali equazioni si dicono *equazioni parametriche* del luogo considerato.

In generale:

Equazioni parametriche di una curva sono equazioni in cui le coordinate (x,y) del generico punto della curva sono espresse per mezzo di un parametro reale (ad esempio m):

$$\mathbf{x = x(m),\ \ y = y(m)}.$$

Il passaggio da queste equazioni all'equazione cartesiana della curva comporta l'eliminazione del parametro m tra le due equazioni parametriche: l'operazione in generale non è semplice ma lo è certamente nei casi che abbiamo preso in esame. In particolare lo è tutte le volte che in almeno una delle due equazioni parametriche il parametro figura solo al 1° grado: basta infatti calcolarlo in tale equa-

[1] Questo paragrafo può interessare tutte le scuole ma è rivolto in particolare ai seguenti indirizzi dell'Istituto Tecnico, settore Tecnologico: - Trasporti e Logistica; - Costruzioni, Ambiente e Territorio.

zione in funzione della coordinata cartesiana che vi figura e sostituire l'espressione trovata nell'altra equazione. Esattamente come abbiamo fatto nei precedenti esercizi.

ESERCIZIO.
Trova l'equazione cartesiana del luogo geometrico del quale sono assegnate le seguenti equazioni parametriche:

1) $x = 2m + 1,\ y = \frac{1}{3}m - 1.$ 2) $x = \frac{2}{3}m - 2,\ y = -\frac{1}{2}m + 1.$

3) $x = 2m - 3,\ y = \frac{1}{2}m^2 + 2m.$ 4) $x = \frac{1}{3}m^2 - 2,\ y = m + 1.$

45.3.2 Oltre che in coordinate cartesiane, una curva può essere rappresentata in coordinate polari. In tal caso la sua equazione è denominata ***equazione polare***.

Ricordiamo al riguardo [2] che il legame tra le coordinate polari (ρ,φ) e le coordinate cartesiane (x,y) di un punto del piano è espresso dalle seguenti formule:

$$x = \rho\cos\varphi\,,\quad y = \rho\sin\varphi.$$

Ragion per cui, ad esempio, l'equazione della retta:

$$y = a\,x + b,$$

trasformata in coordinate polari, assume la forma seguente:

$$\rho\sin\varphi = a\,\rho\cos\varphi + b,\ \ \text{vale a dire: } \rho = \frac{b}{\sin\varphi - a\cos\varphi}\,.$$

Si capisce che la curva può essere assegnata direttamente in coordinate polari. In questo caso il passaggio alla forma cartesiana avviene mediante le formule che esprimono r ed α in funzione di x, y; che sono le seguenti:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},\quad \varphi = \operatorname{atan}\frac{y}{x}.$$

Per esempio, se l'equazione polare assegnata è:

$$\rho(\varphi) = r,$$

dove r è un parametro reale positivo noto, l'equazione cartesiana corrispondente è:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r,\ \ \text{vale a dire: } x^2 + y^2 = r^2$$

ed è evidente che si tratta della circonferenza avente raggio r e centro nell'origine O degli assi.

ESERCIZI.

1. Trasforma in coordinate polari la seguente equazione assegnata in forma cartesiana, specificando quale curva essa rappresenta:

$$\text{a) } y = x + \frac{1}{2}\,.\quad \text{b) } y = x^2.\quad \text{c) } y = \frac{1}{x}\,.\quad \text{d) } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

2. Trasforma in coordinate cartesiane la seguente equazione assegnata in forma polare, specificando quale curva essa rappresenta:

$$\text{a) } \rho = \frac{2}{\sin\varphi}\,.\quad \text{b) } \rho = \frac{\tan\varphi}{2\cos\varphi}\,.\quad \text{c) } \rho = \frac{2}{\sqrt{\sin 2\varphi}}\,.\quad \text{d) } \rho = \frac{1}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\,.$$

[2] Cfr.: Unità 40: Numeri complessi, N° 40.5.4.

45.4 NOTA STORICA

45.4.1 Il nome **coniche** (o **sezioni coniche**) – attribuito alle curve espresse da equazioni algebriche di 2° grado in due indeterminate – dipende dal fatto che queste curve si ottengono sezionando un cono con un piano. Dove per “cono” (detto anche “cono circolare indefinito a due falde”) s’intende la superficie ottenuta facendo ruotare di un giro completo una retta g intorno ad una retta a che la sechi in un punto V (Fig. 7).

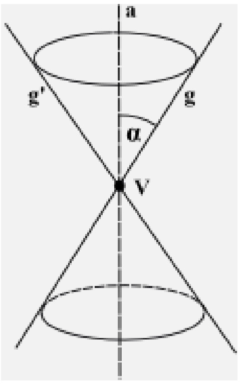

FIG. 7

Precisamente, detta α l’ampiezza dell’angolo di semiapertura del cono e chiamata β quella dell’angolo che il piano secante δ (che comunque si suppone non passante per V) forma con la retta a, si ottiene come sezione di δ con il cono:

un’ellisse se $\beta>\alpha$ (Fig. 8), una parabola se $\beta=\alpha$ (Fig. 9), un’iperbole se $\beta<\alpha$ (Fig. 10).

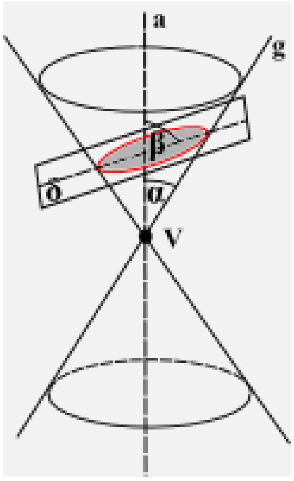

FIG. 8

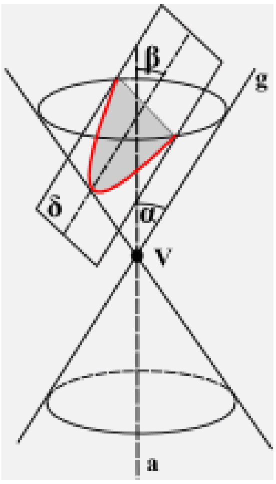

FIG. 9

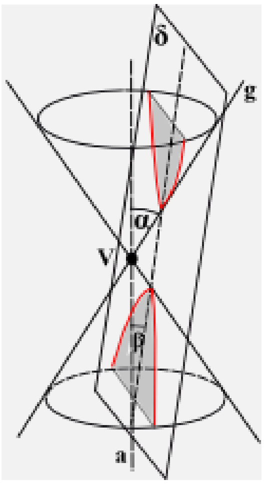

FIG. 10

Sembra che il primo ad occuparsi di queste sezioni sia stato **Menecmo** di Proconneso, vissuto all’incirca tra il 375 e il 325 a.C.; del suo contributo concreto però non sappiamo quasi nulla.
L’opera, che ci è stata tramandata e che contiene uno studio molto approfondito di queste curve, reca esattamente il titolo ***Coniche***. Ne è autore **Apollonio Pergeo**, uno dei massimi geometri greci, vissuto pressappoco tra il 262 e il 190 a.C.. Egli tratta delle sezioni di un cono con un piano, ottenute nella maniera in cui abbiamo accennato sopra [3].

---

[3] Chi volesse saperne di più sul metodo seguito da Apollonio può consultare la cartella “Integrazione 4”, file “2 – Matematica – Esercizi e complementi”, collocata in questo medesimo sito e scaricabile gratuitamente.

Sereno di Antinopoli (circa IV sec. d.C.) dimostrò, in seguito, come le ellissi trattate da Apollonio si potessero ottenere sezionando un cilindro con un piano. Sereno ha esposto queste idee in un'opera dal titolo: ***Sulle sezioni cilindriche***. In una seconda opera, intitolata ***Sulle sezioni coniche***, Sereno si occupò delle sezioni di un cono con un piano passante per il vertice, dichiarando esplicitamente che non era sua intenzione trattare delle sezioni di cui Apollonio si era occupato in maniera esaustiva.

Detto per inciso, le intersezioni di un cono, avente angolo di semiapertura uguale ad α, con un piano passante per il vertice e formante un angolo β con l'asse di rotazione del cono, sono quelle che oggi i matematici chiamano "***coniche degeneri***". Sono costituite da: - un punto se $\beta>\alpha$; - due rette coincidenti se $\beta=\alpha$ (si tratta sostanzialmente della retta in cui il piano è tangente al cono); - due rette incidenti se $\beta<\alpha$.

Apollonio e Sereno studiano le coniche alla maniera di Euclide, con i mezzi della geometria elementare e con le complicazioni che ciò comporta. Per questo il loro metodo non è generalizzabile ad altre curve e non consente ulteriori sviluppi. E, di fatto, sviluppi non ve ne furono in questo campo fino al XVII secolo, allorché l'invenzione della geometria delle coordinate, per merito di **René Descartes** (**Cartesio**, 1596-1650) e **Pierre de Fermat** (1601-1665), non solo permise un approccio più semplice alle coniche, ma aprì un vasto campo di ricerche che si concretò in scoperte di altissimo livello, le quali superarono abbondantemente i risultati dei Greci. Nessuno di questi due studiosi era un matematico di professione, essendo il primo un filosofo ed il secondo un avvocato. Ma entrambi diedero contributi così importanti e significativi al progresso matematico da essere ritenuti non solo i più grandi matematici del loro tempo ma annoverati addirittura tra i primi di tutti i tempi.

45.4.2 **Cartesio** è autore di un'opera a carattere matematico, la ***Géométrie***, pubblicata nel 1637 come appendice al trattato filosofico ***Discours de la méthode***.

Alla comparsa della *Géométrie* si fa generalmente risalire la nascita della "geometria analitica", che infatti è chiamata solitamente anche "geometria cartesiana". Però in tutta l'opera non si fa mai ricorso a quelli che oggi chiamiamo "assi cartesiani".(4) Né è ricavata l'equazione generale di una retta o di una conica, intese come luoghi geometrici di punti le cui coordinate soddisfano a certe equazioni (di 1° o di 2° grado). Anche se, per la verità, l'Autore lascia intuire molte di queste cose, che egli dice di non voler chiarire per non togliere al lettore il gusto della scoperta (5). Insomma la *Géométrie*, pur costituendo una pietra miliare nella storia della matematica, poiché stabilisce definitivamente un collegamento proficuo tra l'algebra e la geometria (*algebrizzazione della geometria*), aprendo così la via a nuovi sviluppi, non può essere certamente considerata un manuale di geometria analitica, almeno come lo intendiamo noi oggi. Bisogna riconoscere, tuttavia, che Cartesio contribuì in maniera decisiva alla creazione di quel ramo della matematica, sia per quanto lasciava intuire nella sua opera e per l'influenza che questa esercitò negli anni immediatamente successivi alla sua comparsa, sia attraverso la sua corrispondenza epistolare con altri matematici, segnatamente quelli che elaborarono la sua *Géométrie* e che, a ragione, possono essere considerati suoi discepoli. Questi furono, in particolare, gli olandesi **Frans van Schooten** (1615-1660) e **Johann De Witt** (1625-1672) e l'inglese **John Wallis** (1616-1703). Quest'ultimo introdusse per la prima volta le definizioni

[4] Cartesio sceglie, in relazione ad ogni specifico problema, una certa retta su cui fissa una conveniente lunghezza incognita OP=x e, secondo un'altra direzione, lo spostamento PQ=y.

[5] Tradotto dal francese: «*Ma non mi soffermo a spiegare ciò più in dettaglio, poiché vi priverei del piacere di comprenderlo da soli, e dell'utilità di coltivare la vostra mente, esercitandola in ciò; il che, a mio avviso, è il principale vantaggio che si può trarre da questa scienza*».

di ellisse, parabola e iperbole, sganciandole dal cono da cui sono ottenute ma considerandole come grafici, in un piano cartesiano, di equazioni del seguente tipo: $y^2 = ax - bx^2$, $y^2 = ax$, $y^2 = ax + bx^2$.

45.4.3 Uno studio sistematico dell'equivalenza tra curve ed equazioni in due indeterminate (segnatamente di 1° e 2° grado) fu compiuto da Fermat in un breve saggio dal titolo ***Ad locos planos et solidos isagoge***, pubblicato postumo nel 1679, ma a quanto sembra composto prima dell'uscita della *Géométrie* di Cartesio, addirittura intorno al 1629.
Fermat diede veramente una trattazione sistematica ed esauriente delle equazioni algebriche di 1° e 2° grado in due indeterminate, rappresentandole graficamente in un "piano riferito a coordinate" mediante le corrispondenti "rette" e "coniche" o, per meglio dire, quelle parti delle rette e coniche che cadevano nel primo quadrante. Egli infatti, come Cartesio del resto, non usava i numeri negativi. Ad ogni modo il suo saggio è molto più vicino ad una moderna concezione della Geometria Analitica che non l'opera di Cartesio. Il linguaggio e le notazioni usati da Fermat erano, però, molto meno moderni di quelli di Cartesio e appesantivano la lettura della sua opera. Ma soprattutto, lo ribadiamo, l'opera di Fermat fu pubblicata oltre 40 anni dopo quella di Cartesio. E quell'intervallo di tempo fu sufficiente non solo a far conoscere l'opera di Cartesio ma anche a fare assumere alla disciplina un assetto non lontano da quello definitivo. Per questo, oggi, soltanto in ambito specialistico è riconosciuto a Fermat il merito di aver creato la Geometria Analitica assieme a Cartesio e indipendentemente da lui. Al di fuori di quest'ambiente, a parte qualche lodevole eccezione, a questa branca della matematica è solitamente associato solo il nome di Cartesio.

45.4.4 Fu l'inglese **Isaac Newton** (1642-1727) ad usare per primo un sistema completo di assi coordinati nell'opera *Enumeratio linearum tertii ordinis* (1704).
Un'opera, scritta in stile chiaro ed efficace, contribuì poi a divulgare le nuove idee: il ***Traité analytique des sections coniques***, pubblicato nel 1707 dopo la morte del suo autore, il francese **Guillome de L'Hôpital** (1661-1704).
Fu infine il matematico svizzero **Leonhard Euler** (1707-1783) nell'opera ***Introductio in analysin infinitorum***, pubblicata nel 1748, a dare alla Geometria Analitica un assetto veramente moderno.
Bisogna aggiungere però che l'espressione "geometria analitica" comparve per la prima volta solo nel 1802. Essa figura, infatti, nel titolo di un manuale scritto da **Jean Baptiste Biot** [6] (1774-1862): ***Essai de géométrie analytique***.

45.5 COSTRUZIONI GRAFICHE DI LUOGHI GEOMETRICI

45.5.1 La costruzione grafica di un luogo geometrico per punti sembra un'operazione piuttosto elementare se si conosce l'equazione cartesiana del luogo. In tal caso, infatti, si possono trovare quanti punti si vogliono del luogo medesimo. Le cose, però, non sono andate sempre così, sicuramente non in questo modo prima della scoperta della geometria cartesiana. Non solo, ma addirittura la pretesa dei geometri era di pervenire alla costruzione grafica, utilizzando soltanto riga e compasso. Dovettero constatare con rammarico che ciò non era sempre possibile, ma scoprirono altresì che questo procedimento poteva essere seguito per una costruzione delle coniche, nel senso che potevano costruire di esse quanti

[6] È forse più conosciuto per la celebre "legge di Biot e Savart" riguardante l'azione magnetica della corrente elettrica che fluisce in un filo rettilineo.

punti volevano, anche se non avevano modo di tracciare tali curve con "tratto continuo", come per un segmento di retta (riga) o una circonferenza (compasso). Ebbene, proprio a queste costruzioni dedicheremo questo paragrafo, invitandoti in via preliminare, a tenere a mente le definizioni di parabola, ellisse e iperbole, giacché queste definizioni svolgeranno un ruolo decisivo nelle costruzioni medesime.

45.5.2 Incominciamo ad occuparci della **PARABOLA**.

♦ Diciamo, intanto, che è possibile costruirla con un procedimento "meccanico", che andiamo a descrivere. Naturalmente supponiamo che sia assegnata la distanza d del fuoco dalla direttrice. Presi, allora, nel piano una retta r (la direttrice – Fig. 11), che può essere un bordo di una riga, e il punto F (il fuoco) ad una distanza d da essa, si supponga che l'estremo C di un regolo, di lunghezza L>d, scorra lungo il bordo della riga. All'altro estremo D del regolo sia fissato un estremo di un filo, flessibile e non estensibile, esso pure lungo L, il cui secondo estremo sia fissato in F. Tendendo il filo con la punta P di una matita, mentre il regolo scorre lungo il bordo della riga, la punta P descrive un arco di parabola. Si ha, infatti: $\overline{PF}=\overline{PC}$.

Adesso un esercizio per te. Ammesso che il filo sia lungo 10 cm e la distanza del punto F, in cui esso è fissato, dal bordo r della riga misuri 2 cm, trovare l'equazione della parabola rispetto ad un conveniente sistema di riferimento cartesiano. Entrambe le misure suddette sono necessarie per tale equazione?

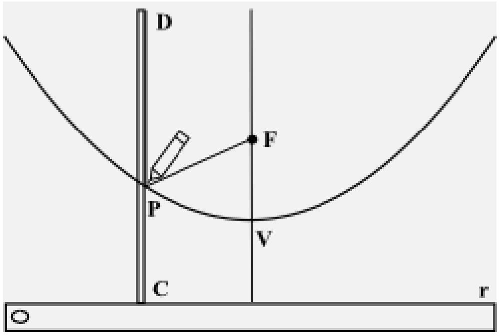

FIG. 11

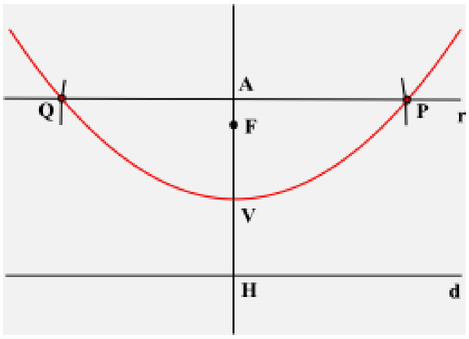

FIG. 12

♦ Passiamo adesso alla costruzione della curva per punti. Siano assegnati, a questo proposito, un punto F e una retta d, rispettivamente *fuoco* e *direttrice* della parabola (Fig. 12), tali che $F \notin d$. Si conduce per F la retta perpendicolare alla retta d e si chiama H il punto comune alle due rette. Il punto medio V del segmento FH è certamente equidistante da F e da d, perciò appartiene alla parabola.
Ora, per un punto qualsiasi della semiretta, avente origine in V e passante per F, si conduce la parallela r alla retta d, quindi si traccia la circonferenza avente il centro in F e raggio uguale ad AH: essa interseca la retta r in due punti, P e Q, che, per il modo in cui sono stati costruiti, sono equidistanti da F e da d e perciò sono punti della parabola. Al variare di A e ripetendo la costruzione precedente, si possono ottenere quanti punti si vogliono della parabola.

45.5.3 Anche riguardo all'**ELLISSE**, oltre alla costruzione per punti, di cui diremo fra breve, possiamo fornire anche una costruzione "meccanica" della curva.

♦ Basta prendere un filo, flessibile ma inestensibile, lungo quanto l'asse maggiore dell'ellisse, fissarlo per gli estremi nei due fuochi della curva, in modo che rimanga "lento" e, quindi, tenderlo con la punta di una matita (Fig. 13). A questo punto, è sufficiente far scorrere la matita sul foglio, prestando attenzione a che il filo rimanga teso: si ottiene il disegno dell'ellisse.

Ancora un esercizio per te. Ammesso che il filo sia lungo 25 cm e la distanza dei due punti in cui esso è fissato misuri 24 cm, quanto misura l'asse minore dell'ellisse?

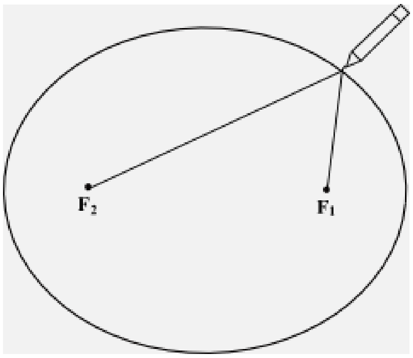

FIG. 13

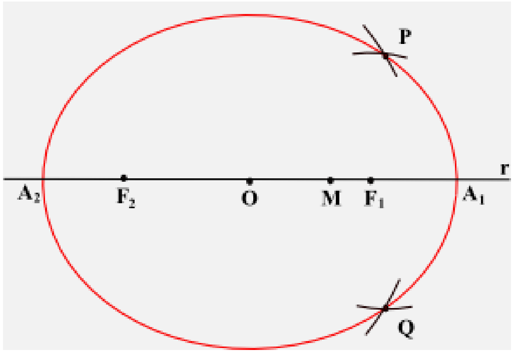

FIG. 14

♦ Per quanto concerne, invece, la costruzione per punti della curva, si suppongono assegnati i due fuochi F_1 ed F_2, il loro punto medio O ed i due vertici A_1 ed A_2 (Fig. 14), ovviamente tutti disposti sulla retta r dei fuochi medesimi e tali che A_1 stia dalla stessa parte di F_1 rispetto ad O. Si considera un qualunque punto M del segmento $[F_1,F_2]$ e si descrivono due circonferenze: una di centro F_1 e raggio uguale ad A_1M, l'altra di centro F_2 e raggio uguale ad A_2M. Esse si secano in due punti, P e Q, che sono punti dell'ellisse, dal momento che si ha:

$$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=\overline{MA_1}+\overline{MA_2}=\overline{A_1A_2}$$

e analogamente per Q. Al variare di M sul segmento $[F_1,F_2]$ si ottengono quanti punti si vogliono dell'ellisse.

45.5.4 La costruzione dell'**IPERBOLE** per via "meccanica" richiede la conoscenza della distanza focale 2c e dell'asse traverso 2a.

♦ Presi, allora, nel piano i punti F_1 ed F_2 dell'iperbole ($F_1F_2=2c$), si fissa un estremo di un regolo, di lunghezza R, in uno di tali punti (per esempio, in F_2 – Fig. 15) e all'altro estremo H del regolo si fissa un estremo di un filo, flessibile e non estensibile, lungo R−2a, mentre il secondo estremo del filo è fissato nell'altro fuoco (nel nostro caso, in F_1). Tendendo il filo con la punta P di una matita, mentre il regolo ruota intorno ad F_2, la punta P descrive un ramo d'iperbole (o, meglio, un arco di tale ramo). Si ha, infatti:

$$\overline{PF_2}-\overline{PF_1}=\left(\overline{HP_2}-\overline{HP}\right)-\overline{PF_1}=\overline{HF_2}-\left(\overline{HP}+\overline{PF_1}\right)=R-(R-2a)=2a.$$

Scambiando i ruoli dei due fuochi, si descrive l'altro ramo dell'iperbole.

Un nuovo esercizio per te. Ammesso che il regolo sia lungo 25 cm, il filo 10 cm e la distanza F_1F_2 misuri 17 cm, quando misurano l'asse traverso e l'asse non traverso dell'iperbole?

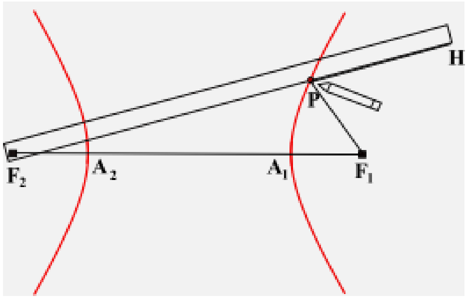

FIG. 15

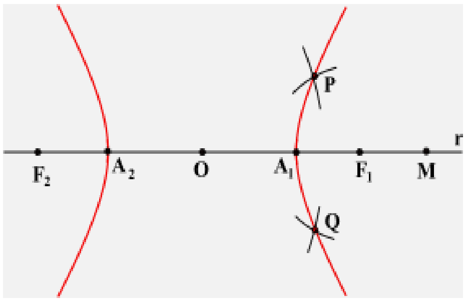

FIG. 16

♦ Per quanto attiene alla costruzione grafica dell'iperbole, essa differisce appena un po' da quella dell'ellisse, descritta sopra.

Sono, dunque, assegnati i due fuochi F_1 ed F_2, il loro punto medio O ed i due vertici A_1 ed A_2 (Fig. 16), ovviamente tutti disposti sulla retta r dei fuochi medesimi e tali che A_1 stia dalla stessa parte di F_1 rispetto ad O. Si considera un qualunque punto M della retta r, ma non situato sul segmento $]F_1,F_2[$ e si descrivono due circonferenze: una di centro F_1 e raggio uguale ad A_1M, l'altra di centro F_2 e raggio uguale ad A_2M. Esse si secano in due punti, P e Q, che sono punti dell'iperbole, dal momento che si ha:

$$\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=\left|\overline{MA_1}-\overline{MA_2}\right|=\overline{A_1A_2}$$

e analogamente per Q.

Al variare di M sulle due semirette esterne al segmento F_1F_2, si ottengono quanti punti si vogliono dell'iperbole.

VERIFICHE [7]

Avvertenza. Negli esercizi in cui non è detto esplicitamente, ma è sottinteso che c'è, il piano della figura s'intende riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy).

Questioni varie sulle coniche (nn. 1-18).

1. Disegnare la parabola di equazione: $y=x^2-2x+2$ e quella che si ottiene da essa in seguito alla rotazione di $-90°$ intorno all'origine O degli assi coordinati, dopo aver determinato anche l'equazione di quest'ultima curva.
2. Disegnare l'ellisse di equazione: $x^2+4y^2=4$ e quella che si ottiene da essa in seguito alla rotazione di $-90°$ intorno all'origine O del sistema di riferimento, dopo aver determinato anche l'equazione di quest'ultima curva.
3. Disegnare l'iperbole di equazione: $x^2-4y^2=4$ e quella che si ottiene da essa in seguito alla rotazione di $-90°$ intorno all'origine O del sistema di riferimento, dopo aver determinato anche l'equazione di quest'ultima curva.
4. Disegnare la seguente conica dopo aver fatto vedere che un'opportuna traslazione consente di mette-

[7] I problemi (o gli esercizi) contrassegnati col simbolo ® sono risolti (totalmente o parzialmente) e la risoluzione è situata nella cartella "Integrazione 2", file "Matematica – Integrazione 2, unità 28-88", pubblicata in questo medesimo sito e scaricabile gratuitamente.

re l'equazione che la rappresenta nella forma canonica di un'ellisse o di un'iperbole:

1. $x^2 + 4y^2 + 2x - 8y + 1 = 0$.
2. $9x^2 + y^2 - 36x + 2y + 21 = 0$.
3. $2x^2 - y^2 - 8x - 2y + 3 = 0$.
4. $4x^2 - y^2 + 8x + 2y + 7 = 0$.

5. Disegnare, dopo averne trovato l'equazione:
1) l'ellisse avente il centro nel punto $(2,0)$, un vertice nel punto $(4,0)$ e un fuoco nel punto $(3,0)$.
2) l'iperbole avente il centro nel punto $(1,-1)$, un vertice nel punto $(2.-1)$ ed un fuoco nel punto $(3,-1)$.

6. Tra le iperboli di equazione $xy=k$, con $k>0$, determinare quella che ha un vertice sulla retta di equazione $2x-y+4=0$. Si dica V questo vertice e si indichi con F il fuoco più vicino a V.
La retta perpendicolare all'asse x condotta per F sechi l'iperbole in B e l'asse x in A. Tra i punti del triangolo OAF, incluso il contorno, si trovi quanti sono quelli le cui coordinate sono entrambe numeri interi. Scegliendo a caso uno di tali punti, si calcoli la probabilità che appartenga al triangolo mistilineo – contorno incluso – avente per lati l'arco VB d'iperbole ed i segmenti VF e BF.
[**R.** $xy=16$; … ; $1/7$]

7. Si determinino i coefficienti dell'equazione: $xy+ax-y+b=0$ in modo che l'iperbole rappresentata da essa sia tangente alle rette di equazioni $2x+y-7=0$ e $2x+y+1=0$. Calcolare la lunghezza del segmento che congiunge i punti in cui le due rette suddette toccano l'iperbole. [**R.** $a=b=-1;\ 2\sqrt{5}$]

8. Si trovino i coefficienti dell'equazione: $x=ay^2+by+\frac{5}{4}$ in modo che la parabola rappresentata da essa sia tangente alle rette $x+y=0$ e $2x+y=0$.
Si calcoli l'area del triangolo delimitato dalle due tangenti suddette e dalla corda che congiunge i punti in cui esse toccano la parabola. [**R.** $a=\frac{1}{80},\ b=-\frac{3}{4}$; …]

9. Determinare i coefficienti dell'equazione: $ax^2+by^2 = 1$, con a, b numeri reali positivi, in modo che l'ellisse che la rappresenta abbia un fuoco nel punto $(2,0)$ ed eccentricità uguale ad $1/2$.
Successivamente, chiamato A il punto in cui l'ellisse seca il semiasse positivo delle ascisse, trovare una retta parallela all'asse y sulla quale l'ellisse stessa intercetti un segmento BC che, con il punto A, formi un triangolo ABC equilatero. [**R.** $a=\frac{1}{16}, b=\frac{1}{12};\ x=-\frac{20}{13}$]

10. Considerata un'iperbole equilatera, siano A e B due suoi punti simmetrici rispetto al suo centro. Condotte le tangenti all'iperbole in detti punti, si consideri il quadrilatero convesso avente per vertici i punti in cui tali tangenti secano gli asintoti dell'iperbole. Si dimostri che questo quadrilatero è un rombo.

11. Un triangolo ABC, rettangolo in A, è circoscritto ad una circonferenza di raggio assegnato r.
Detti M ed N i punti in cui i lati AB e AC rispettivamente toccano la circonferenza, si esprima la lunghezza y del segmento NC in funzione della lunghezza x del segmento MB e si disegni il grafico della funzione $y=y(x)$ così ottenuta, prescindendo dalla questione geometrica. [**R.** $y=\frac{r(x+r)}{x-r}$]

12. È assegnata l'iperbole di equazione: $xy=4$. Condotta la tangente t ad essa in un suo generico punto M, si chiamino A e B le intersezioni di t con gli assi cartesiani. Si giustifichi che M è il centro della circonferenza circoscritta al triangolo OAB.

13. Si determinino i coefficienti dell'equazione: $x=ay^2+by+c$ in modo che la parabola rappresentata da essa abbia il vertice nel punto $V(-1,2)$ e passi per l'origine O del sistema di riferimento.
Detta quindi AB una corda della parabola, parallela all'asse y, la si determini in modo che il triangolo VAB sia equilatero. [**R.** $a=1/4,\ b=-1,\ c=0;\ \overline{AB}=8\sqrt{3}$]

14. Sono assegnate le due parabole di equazioni: $x=3y^2$, $x=-y^2+9$.

Nella regione piana delimitata da esse inscrivere il rettangolo di perimetro 18, avente i lati paralleli agli assi coordinati.
Successivamente, per ciascuno dei vertici di detto rettangolo, condurre la tangente alla parabola cui il vertice appartiene.
Infine calcolare l'area del quadrilatero individuato da queste tangenti.

$\left[\mathbf{R.}\ \text{I vertici del rettangolo sono i punti } \left(\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{3}{4},-\frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{35}{4},\frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{35}{4},-\frac{1}{2}\right);\ \ldots\right]$

15. Si determinino i coefficienti dell'equazione: $x=ay^2+by+c$ in modo che la parabola rappresentata da essa abbia il vertice nel punto $V(-3,4)$ e passi per il punto $A(1,0)$.
Condotta la tangente t alla parabola in A e chiamata p la perpendicolare a t in A, si verifichi che p è la bisettrice dell'angolo che la retta passante per A e per il fuoco di F forma con l'asse x.

$[\mathbf{R.}\ a=1/4,\ b=-2,\ c=1;\ \ldots]$

16. È assegnata la famiglia di curve di equazione $(m+2)x^2+(2m-1)y^2=4$, dove m è un parametro reale.

1. A) Trovare per quali valori di m l'equazione rappresenta un'ellisse e per quali valori un'iperbole.
   B) Dimostrare che nella famiglia vi sono un'iperbole equilatera H ed una circonferenza K.
2. A) Spiegare in maniera esauriente se le curve della famiglia hanno o no punti comuni.
   B) Trovare le equazioni delle due curve H e K e quelle delle curve che si ottengono da esse in seguito alla rotazione di 90° intorno all'origine O del sistema di riferimento.

17. Se si fa incidere sulla parte concava di un ostacolo parabolico, posto in un ondoscopio, un treno d'onde rettilinee che viaggiano nella direzione dell'asse della parabola, esse si riflettono diventando onde circolari con centro nel fuoco della parabola. Viceversa, se si producono onde circolari con centro nel fuoco, esse si riflettono diventando onde rettilinee che si propagano nella direzione dell'asse della parabola. Il fenomeno ha una spiegazione geometrica. Quale?

18. Se si fa incidere sulla parte concava di un ostacolo ellittico, posto in un ondoscopio, un treno d'onde circolari con centro in un fuoco dell'ellisse, esse si riflettono diventando onde circolari con centro nell'altro fuoco. Il fenomeno ha una spiegazione geometrica. Quale?

Luoghi geometrici.

19. Trovare il luogo geometrico dei punti equidistanti dal punto $(2,1)$ e dalla retta $x=-1$.

20. Cos'è il luogo geometrico dei punti del piano le cui coordinate (x,y) soddisfano all'equazione $(x+1)^2+(y-1)^2=0$?

[A] Un'ellisse. [B] Un'iperbole. [C] Un punto. [D] Una coppia di rette.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

21. Cos'è il luogo geometrico dei punti del piano le cui coordinate (x,y) soddisfano all'equazione $(x+1)^2-(y-1)^2=0$?

[A] Un'ellisse. [B] Un'iperbole. [C] Un punto. [D] Una coppia di rette.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

22. Cos'è il luogo geometrico dei punti del piano le cui coordinate (x,y) soddisfano all'equazione $(x+1)^2+2(y-1)^2=2(x-2y+3)$?

[A] Un'ellisse. [B] Un'iperbole. [C] Un punto. [D] Una coppia di rette.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

23. Trovare il luogo geometrico dei punti aventi distanza $\sqrt{3}$ dal punto $(1,0)$ e situati sulla retta di equazione:

$$\text{a) } x+2y=0; \quad \text{b) } y=\frac{1}{5}x-2; \quad \text{c) } y=\sqrt{3}.$$

24. In un piano sono assegnati due punti, A e B, tali che $\overline{AB}=1$. Dimostrare che il luogo geometrico dei punti P, per i quali risulta: $\overline{AP}^2+\overline{PB}^2=2$, è la circonferenza avente il centro nel punto medio di AB e il raggio uguale a $\sqrt{3}/2$.

25. In un piano sono assegnati due punti, A e B, tali che $\overline{AB}=2a$, dove a è una lunghezza data. Dimostrare che il luogo geometrico dei punti P, per i quali risulta: $\overline{AP}^2-\overline{PB}^2=ka^2$, con k numero reale non nullo, è una retta perpendicolare ad AB.
Trovare per quali valori di k questa retta passa per A o per B.

26. In un piano sono assegnati una retta r ed un punto A, la cui distanza da r è uguale a 2. Trovare il luogo geometrico dei punti P per i quali risulta: $\overline{PH}^2=\overline{PA}^2$, dove H è la proiezione ortogonale di P su r.

27. Sono assegnate le parabole di equazione: $y=x^2-(m+2)x+2m+1$, dove m è un parametro reale.

1. A) Dimostrare che tutte le parabole passano per un punto A.
   B) Tra le parabole date determinare quella che ha il vertice in A: indicarla con p'
2. A) Determinare il luogo dei vertici delle parabole assegnate. È ancora una parabola: indicarla con p''.
   B) Spiegare perché la parabola p' è congruente alla parabola p'' e disegnare queste due curve sullo stesso piano.
3. A) Calcolare l'area della regione piana delimitata dalle parabole p' e p'' e dall'asse y.

[**R.** ... , 1B) $y=x^2-4x+5$; 2A) $y=-x^2+4x-3$, ...; 3A) $16/3$]

28. Determinare l'equazione delle parabole aventi nel punto A(0,1) tangente di coefficiente angolare 2. Trovare quindi il luogo dei vertici e quello dei fuochi di queste parabole e verificare che si tratta di due rette passanti per A.

29. Sono assegnati i due punti A(0,2) e B(3,2). Chiamato C un generico punto dell'asse x, trovare il luogo geometrico dell'ortocentro del triangolo ABC al variare di C sull'asse x. $\left[\textbf{R.}\ \ y=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+2\right]$

30. Sono assegnate le parabole di equazione: $y=2x^2-3(m-1)x+3m-1$, dove m è un parametro reale.

1. A) Dimostrare che tutte le parabole hanno un punto A in comune.
   B) Tra le parabole assegnate trovare quella che risulta tangente in A alla retta di coefficiente angolare 1: si chiami p la parabola trovata.
2. A) Calcolare l'area del segmento parabolico individuato sulla parabola p dalla retta s di equazione $y=5$.
3. A) Condotta per A una generica retta r, esprimere in funzione della pendenza di tale retta le coordinate del punto medio M del segmento che la parabola p intercetta su r.
   B) Trovare il luogo geometrico di M al variare di r nel fascio di rette di centro A.

[**R.** …, 1B) $y=2x^2-3x+5$; 2A) ...; ..., 3B) $y=4x^2-7x+7$]

31. Sono dati il punto A(2,0) e la retta r di equazione $y=-3x+6$.

1. A) Detto P un punto di r, si trovino le coordinate dell'ortocentro H del triangolo POA in funzione dell'ascissa t di P.
   B) Si trovi il luogo geometrico di H al variare di P su r.
2. A) Si dica B la posizione di P per la quale l'ortocentro del triangolo OAB si trovi sulla retta r.
   B) Si scriva l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo OAB.

$\left[\textbf{R.}\ \text{1A) } H\left(t,\frac{t}{3}\right),\ \text{1B) } x=3y;\ \text{2A) } B\left(\frac{9}{5},\frac{3}{5}\right),\ \text{2B) } x^2+y^2-2x=0\right]$

32. È assegnata la retta r di equazione $x=1$. Detto M un suo generico punto, sia P un punto allineato con l'origine O degli assi e con M, posto dalla stessa parte di M rispetto ad O e tale che risulti: $\overline{OP}\cdot\overline{OM}=1$. Trovare il luogo geometrico del punto P al variare di M su r e verificare che si tratta di una circonferenza passante per O e tangente ad r. [**R.** $x^2+y^2-x=0$]

33. È assegnata la circonferenza K di equazione: $x^2+y^2-2x=0$. Detto M un suo generico punto, si indichi con P un punto allineato con l'origine O degli assi e con M, posto dalla stessa parte di M rispetto ad O e tale che risulti: $\overline{OP}\cdot\overline{OM}=4$. Si trovi il luogo geometrico del punto P al variare di M su K. [**R.** $x=2$]

34. 1. A) Scrivere l'equazione della circonferenza k avente per diametro il segmento OA, dove O è l'origine del sistema di riferimento ed A il punto (0,2).
B) Detta r la retta diametrale parallela all'asse x, si trovino le coordinate dei punti M ed N in cui r interseca k.
2. A) Si chiami R un punto della retta r di ascissa t e si indichi con S il punto in cui la retta AR interseca ulteriormente k: scrivere le coordinate di R e di S in funzione di t.
B) Si trovino, in funzione di t, le coordinate del punto P in cui si secano la retta OS e la parallela all'asse y condotta per R.
3. A) Si trovi l'equazione del luogo geometrico descritto da P quando R descrive r, verificando che si tratta di una parabola p avente il vertice in O e passante per i punti M ed N.
B) Calcolare le aree delle tre regioni in cui la parabola p divide il cerchio delimitato da k.

35. Determinare il luogo dei centri delle circonferenze passanti per l'origine O degli assi coordinati e tangenti: 1) alla retta di equazione $x=3$; 2) alla circonferenza di equazione $x^2+y^2=1$.
[**R.** 1) $y^2=9-6x$; 2) $4x^2+4y^2=1$]

36. 1. A) Tra le parabole di equazione: $y=ax^2+bx+c$ si chiami p quella che passa per l'origine O degli assi coordinati con tangente di coefficiente angolare 4 e passa per il punto $A(4,0)$.
B) Detto P un suo generico punto di ascissa t, sia G il baricentro del triangolo OAP: si trovino le coordinate di G in funzione di t.
2. A) Si determini il luogo geometrico λ descritto da G quando P varia su p.
B) Si verifichi che λ non seca p.
3. A) Il luogo λ divide il segmento parabolico individuato dall'asse x sulla parabola p in due parti: calcolare le loro aree.
B) Indicata con P' la posizione di P per cui G ha ascissa 3, si calcoli l'area del triangolo AG'P', dove G' è il baricentro del triangolo OAP'.

$\left[\textbf{R.}\ \text{1A) } p\equiv y=-x^2+4x, \ldots;\ \text{2A) } \lambda\equiv y=-3x^2+12x-\frac{32}{3}, \ldots\right]$

37. Sono assegnate le parabole di equazione: $y=x^2-ax$, dove a è un numero reale positivo.
Stabilito che la generica parabola seca l'asse x in due punti, di cui uno è l'origine O del sistema di riferimento, si dica A l'altro punto.
Chiamato M il punto della generica parabola avente ascissa 4, si determini a in modo che il circocentro del triangolo OAM abbia ordinata $5/2$ e si indichi con p la parabola corrispondente.
Detto infine P un generico punto di p, si trovi il luogo geometrico dell'ortocentro del triangolo OA'P al variare di P su p, dove A' è la posizione di A corrispondente al valore di a che determina la parabola p. [**R.** $a=3$; $y=-1$]

38. È assegnata l'iperbole di equazione: $xy-y-1=0$. Detto P un suo generico punto, si chiami H

l'ortocentro del triangolo OAP, dove O è l'origine degli assi coordinati ed A il punto in cui l'iperbole seca l'asse y. Si trovi il luogo geometrico di H al variare di P sull'iperbole.
Indicata con P' la posizione di P per cui H ha ordinata 1, si trovi l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo P'OA. [**R.** $x=-y^2$; P'(2,1); ...]

39. Sono assegnate le circonferenze di equazione: $x^2+y^2-2mx+(2m-1)y-m=0$, dove m è un parametro reale.

1. A) Spiegare perché l'equazione assegnata rappresenta una circonferenza per ogni valore di m.
   B) Dimostrare che tutte le circonferenze assegnate hanno due punti, A e B**,** in comune.
2. A) Determinare le equazioni della retta dei punti A e B e della retta luogo dei centri delle circonferenze assegnate.
   B) Tra le circonferenze assegnate determinare quella che ha il centro nel punto in cui si secano queste due rette.

[**R.** ...; 2A) $2x-2y+1=0$, $2x+2y-1=0$;...]

40. Sono assegnate due circonferenze aventi lo stesso centro O e raggi a, b. È assegnata inoltre una direzione d. Condotta per O una generica semiretta t, sia R il punto in cui essa seca la circonferenza minore e sia S il punto in cui seca la maggiore. La retta r passante per R e avente direzione d e la retta s passante per S e perpendicolare ad r si secano nel punto P. Si trovi il luogo geometrico descritto da P quando t varia ruotando di un giro completo intorno ad O e si verifichi che si tratta di una ellisse di semiassi a, b.
Trarre da questo esercizio un procedimento per una costruzione per punti con riga e compasso di un'ellisse di dati semiassi.

41. Sono assegnati una retta r ed un punto A la cui distanza da r è 2. Condotta per un generico punto M di r la retta s perpendicolare ad r, si prenda su s un punto P tale che MP = 2 AM. Si trovi il luogo geometrico descritto dal punto P quando M descrive la retta r e si verifichi che si tratta di una iperbole avente come assi di simmetria la retta r e la perpendicolare ad essa condotta per A.

42. Sono assegnate le rette: $r \equiv x-y-2 = 0$ ed $s \equiv x+2y-8 = 0$.
Fissato un punto Q sull'asse y e chiamati R un generico punto della retta r ed S il punto della retta s avente la stessa ascissa di R, si indichi con P il punto intersezione delle rette OS e QR e si trovi il luogo geometrico descritto da P quando R descrive r.
Si verifichi che questo luogo coincide con il fascio di rette individuato dalle rette s ed OA, dove A è il punto in cui si secano le rette r ed s.
Si trovi infine la posizione di P per la quale i punti R ed S coincidono.

43. È assegnata un'ellisse di semiasse maggiore a e di semiasse minore b. Detto M un suo punto, sia N il simmetrico di M rispetto all'asse maggiore AB dell'ellisse. Le rette AM e BN si secano in un punto P.

1. A) Si trovi il luogo geometrico descritto da P quando M descrive l'ellisse.
   B) Si verifichi che il luogo trovato è un'iperbole avente gli stessi assi di simmetria dell'ellisse e avente semiasse traverso uguale ad a e semiasse non traverso uguale a b.
2. A) Da questo esercizio trarre un procedimento per una costruzione per punti con riga e compasso di un'iperbole di dati semiassi.

44. Sono assegnate le iperboli equilatere di equazione:

$$y=\frac{(m-1)x+2m}{mx-1}$$

dove m è un parametro reale.

1. A) Stabilire che per tre valori di m si ha un'iperbole degenere.

B) Dimostrare che tutte le curve passano per due punti A e B.
2. A) Tra le iperboli assegnate trovare quella che ha il centro sulla retta AB.
B) Trovare il luogo dei centri delle iperboli del fascio.

45. Sono assegnate le iperboli equilatere di equazione:

$$y = \frac{mx + 1}{x - m}$$

dove m è un parametro reale.
1. A) Dimostrare che non esiste alcun punto per il quale passano tutte le iperboli considerate.
B) Tra le iperboli considerate chiamare H quella che ha il centro sulla retta r di equazione $2x–y=2$.
2. A) Dopo aver giustificato che ogni retta s parallela ad r seca H in due punti, si dica M il punto medio del segmento che li ha come estremi e si trovi il luogo geometrico di M al variare di s nel fascio di rette parallele ad r.
B) Studiare il comportamento delle rette p, perpendicolari ad r, rispetto all'iperbole H.
C) Trovare il luogo geometrico del punto medio della corda intercettata da H su p al variare di p nel fascio di rette perpendicolari ad r.

46. In un piano è assegnato un triangolo rettangolo ABC di cateti AB e AC lunghi rispettivamente 3 a ed a. Una retta r, parallela ad AC, intersechi le rette AB e BC rispettivamente in M e in N. Si indichi con P il punto intersezione della retta MC con la perpendicolare ad AC condotta per N. Riferito il piano della figura ad un opportuno sistema di riferimento cartesiano, si trovi il luogo di P al variare di r nel fascio di rette parallele ad AC e si verifichi che esso è la parabola passante per B e tangente in C alla retta AC.

47. È assegnato il triangolo equilatero ABC di lato lungo 1. Riferito il suo piano ad un opportuno sistema di riferimento cartesiano, si trovi l'equazione delle parabole aventi l'asse perpendicolare alla retta AB, passanti per A e tangenti alla retta BC.
Tra tali parabole trovare quella che sulla retta passante per il baricentro del triangolo e parallela a BC intercetta una corda lunga 4.
Stabilito che di parabole siffatte ve ne sono due, dimostrare che sono congruenti e calcolare la distanza dei loro vertici.

48. Si consideri l'equazione: $(x^2+y^2–2x+y–1) + m(x–2y–1) = 0$, dove m è un parametro reale.
1) Determinare per quali valori di m l'equazione rappresenta una circonferenza.
2) Tra le circonferenze considerate indicare con K quella che ha il centro C sulla retta di equazione $y=2x$.
3) Con origine in C tracciare una semiretta s che intersechi K in P. Detto M il punto medio del segmento CP, trovare il luogo geometrico di M mentre s descrive un angolo giro ruotando intorno a C.

49. LABORATORIO DI MATEMATICA. Un proiettile è lanciato con velocità v_0 verso l'alto (*velocità di lancio*) in una direzione che forma un angolo α con l'orizzontale (*angolo di tiro*). Si vuole conoscere la *traiettoria* descritta dal proiettile, la massima *quota* raggiunta, la distanza dal punto di lancio del punto di caduta del proiettile sul piano orizzontale condotto per il punto di lancio (questa distanza si chiama *gittata*). A quale angolo di tiro corrisponde la gittata massima?
Come pensi di procedere? Discutine con i tuoi compagni e se vi trovate in difficoltà chiedete l'aiuto del professore.

50. Si determini l'equazione del luogo geometrico dei centri delle circonferenze del piano tangenti alla parabola $y=x^2+1$ nel punto (1,2).

[Tratto dall'esame di Stato 2007, indirizzo sperimentale, sessione ordinaria]

51. Dimostrare che la direttrice di una parabola è il luogo geometrico dei punti dai quali la parabola è vista sotto un angolo retto.

52. ® In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le circonferenze C_1 e C_2 di equazioni rispettivamente:

$$x^2 + y^2 - 2x = 0 \text{ e } x^2 + y^2 - 2y = 0.$$

1. A) Dopo aver verificato che le due circonferenze passano entrambe per O, scrivere l'equazione della retta s passante per O ed avente coefficiente angolare t.
   B) Indicati con P e Q gli ulteriori punti in cui la retta s interseca rispettivamente C_1 e C_2, trovare in funzione di t le coordinate del punto medio M del segmento PQ.
2. A) Determinare il luogo geometrico di M al variare della retta s nel fascio di centro O e verificare che si tratta della circonferenza di diametro OC, essendo C l'ulteriore punto in cui si intersecano le due circonferenze assegnate.

3) Dimostrare con considerazioni di geometria sintetica che:
   A) il triangolo CPQ è isoscele indipendentemente dalla posizione di s;
   B) il luogo geometrico del punto M al variare di s nel fascio di centro O è la circonferenza di diametro OC.

53. Sono assegnati i punti A(2,0) e B(0,1). Dimostrare che il luogo geometrico del punto P tale che $\overline{PA}=2\,\overline{PB}$ è una circonferenza il cui centro è situato sulla retta AB.

Generalizzare, dimostrando che il luogo di P tale che $\overline{PA}=k\,\overline{PB}$ è ancora una circonferenza (chiamata *circonferenza di Apollonio*) il cui centro è situato sulla retta AB quando A e B siano punti generici distinti, purché sia $k \neq 1$. Cos'è il luogo di P se $k=1$?

54. Sono assegnati i punti A(3,0) e B(1,2).

a) Trovare i luoghi geometrici dei punti P, Q, R, tali che:

$$\overline{OP}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2, \quad \overline{AQ}^2 = \overline{BQ}^2 + \overline{OQ}^2, \quad \overline{BR}^2 = \overline{OR}^2 + \overline{AR}^2.$$

b) Una volta verificato che i luoghi trovati sono circonferenze, chiamare C, D, E nell'ordine i loro centri.

c) Verificare che i punti O, A, B sono i punti medi dei lati del triangolo CDE.

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

DOMANDE.

1. Che linea è il luogo dei punti del piano equidistanti da due punti assegnati?
2. Che cos'è il luogo dei punti equidistanti dai lati di un angolo?
3. Dati due punti A e B, che cos'è il luogo dei punti P tali che il triangolo PAB sia equilatero?
4. Che cos'è il luogo dei punti equidistanti dai punti di una circonferenza?
5. Che cos'è il luogo dei punti equidistanti da una retta e da un punto che non le appartiene?
6. Che linea è il luogo dei centri delle circonferenze passanti per un dato punto e tangenti ad una data retta?
7. Che linea è il luogo dei centri delle circonferenze passanti per un dato punto e tangenti ad una data circonferenza avente il centro in quel punto?
8. È vero che ogni equazione del tipo $x = ay^2+by+c$, con a, b, c numeri reali qualsiasi, purché $a \neq 0$, rappresenta una parabola in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy)?

9. È vero che ogni parabola, disegnata in un riferimento cartesiano ortogonale (Oxy), ha un'equazione del tipo $x = ay^2+by+c$ o del tipo $y = ax^2+bx+c$, con a, b, c numeri reali qualsiasi, purché $a\neq 0$?
10. Diresti che un'iperbole equilatera e un'iperbole qualunque siano due figure simili?
11. Perché alle curve ellisse, iperbole e parabola si dà il nome generico di coniche?
12. Chi furono gli studiosi greci che si occuparono esplicitamente delle coniche?

RISPOSTE.

1. È una retta e precisamente l'asse del segmento avente i due punti come estremi, vale a dire la perpendicolare a tale segmento nel suo punto medio.
2. È una retta e precisamente la bisettrice dell'angolo.
3. Il luogo cercato è costituito dai due punti in cui s'intersecano la circonferenza avente il centro in A e passante per B e la circonferenza avente il centro in B e passante per A.
4. È un punto e precisamente il centro della circonferenza.
5. È una parabola e precisamente la parabola avente la retta come direttrice e il punto come fuoco.
6. Il centro della generica circonferenza deve essere equidistante dal punto A e dalla retta r assegnati. Il luogo cercato è perciò la parabola avente fuoco in A ed r come direttrice.
7. La generica circonferenza deve avere come diametro il punto A assegnato ed un punto P della circonferenza data. Quindi il suo centro è il punto medio di tale diametro. Ne consegue che il luogo cercato è la circonferenza avente il centro in A e raggio uguale alla metà del raggio della circonferenza data.
8. Sì.
9. No. La parabola ha una delle due equazioni nei soli casi in cui il suo asse di simmetria è parallelo ad uno dei due assi coordinati. Se ciò non è, la parabola ha un'equazione diversa, sempre di 2° grado nelle indeterminate x, y, che però noi, al nostro livello di studi, non sappiamo studiare.
10. Sì, lo sono. Esiste, infatti, almeno una similitudine che trasforma l'una nell'altra.
11. Perché si ottengono come sezioni di un cono con un piano.
12. Sembra che il primo ad occuparsene sia stato Menecmo di Proconneso, vissuto all'incirca tra il 375 e il 325 a.C., ma del suo contributo non abbiamo nulla di sicuro. Si occupò invece delle sezioni di un cono con un piano Apollonio Pergeo (circa 262-190 a.C.) in un'opera dal titolo *Le Coniche*. Invece trattò delle stesse figure, ma considerate come sezioni di un cilindro con un piano, Sereno di Antinopoli (circa IV sec. d.C.) nell'opera *Sulle sezioni cilindriche*. Sereno compose pure un'opera *Sulle sezioni coniche*, trattando però non di ciò di cui si era occupato Apollonio, ma delle sezioni del cono con piani passanti per il vertice, vale a dire delle "coniche degeneri".