Prerequisiti:
- Conoscenza delle proprietà delle figure piane.
- Possedere nozioni di geometria solida (rette e piani nello spazio, diedri, angoloidi, solidi geometrici).
- Saper risolvere equazioni e sistemi.

L'unità è rivolta al 2° biennio del solo Liceo Scientifico, compresa l'opzione Scienze Applicate. È opzionale per gli altri Licei, che eventualmente ne affronteranno lo studio nel 5° anno.

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:

- *dimostrare le formule delle aree laterali di prisma retto e piramide retta*
- *risolvere semplici problemi relativi alle aree dei solidi geometrici*
- *enunciare e applicare le formule per calcolare i volumi dei principali solidi geometrici (prisma, piramide, corpi rotondi)*
- *dimostrare le formule dei volumi del tronco di piramide e del tronco di cono*
- *risolvere semplici problemi sui volumi dei solidi*

Misure dei solidi
Unità 49

49.1 AREE DEI SOLIDI

49.1.1 Ogni poliedro ed ogni figura che possa essere contenuta in un poliedro si definisce **solido geometrico**. Un solido geometrico è dunque una porzione "limitata" di spazio.
La misura dello spazio occupato da un solido si chiama **volume** del solido.
Invece la misura della superficie che delimita il solido si chiama **area** del solido. A volte l'area di un solido si denomina **area totale**, per distinguerla dalla cosiddetta **area laterale**. Così accade, ad esempio, nei casi del prisma, della piramide e del tronco di piramide, come anche del cilindro, del cono e del tronco di cono.
In questa unità ci occuperemo delle formule delle aree e dei volumi dei principali solidi geometrici.

- Per il **prisma** si definiscono i concetti di area laterale e di area totale. L'***area laterale*** è la somma delle aree delle facce laterali; l'***area totale*** è la somma dell'area laterale con quelle delle basi.
Per il calcolo dell'area laterale di un prisma, se esso è obliquo si possono incontrare delle difficoltà che bisogna valutare di volta in volta.
Se invece il **prisma è retto** si perviene facilmente alla seguente formula:
$$\mathbf{A_L = 2\,p\,h,}$$
dove A_L è l'area laterale del prisma, p il semiperimetro di base ed h l'altezza.
Naturalmente, e questo vale per un **prisma qualunque**, indicate con A_T e A_B l'area totale e quella di una base, si ha:
$$\mathbf{A_T = A_L + 2\,A_B}.$$

- Anche per la **piramide** si pongono i concetti di area laterale e area totale.
Nel caso di una piramide generica, la sua ***area laterale*** si trova ovviamente sommando le aree delle sue facce laterali ed il calcolo relativo può comportare alcune difficoltà. Talvolta per superarle torna utile il noto teorema delle tre perpendicolari.
Se invece **la piramide è retta**, le sue facce laterali sono triangoli aventi la medesima altezza, la cui misura è l'apotema a della piramide. Per cui, indicate con $s_1, s_2, \dots, s_n$ le misure degli n spigoli di base e con A_L l'area laterale della piramide, risulta:
$$A_L=\frac{1}{2}s_1a+\frac{1}{2}s_2a+\ldots+\frac{1}{2}s_na=\frac{1}{2}(s_1+s_2+\ldots+s_n)a$$
ossia, indicando con p il semiperimetro di base:
$$\mathbf{A_L = p\,a}.$$
Calcolata l'area laterale A_L di una **piramide qualsiasi** e chiamate A_T e A_B la sua area totale e quella della base, si ha evidentemente:
$$\mathbf{A_T = A_L + A_B}.$$

- Come per la piramide, anche nel caso di un generico **tronco di piramide** il calcolo della sua area laterale può comportare difficoltà di rilievo.
Se invece **il tronco di piramide è retto**, si trova facilmente che:
$$\mathbf{A_L = (P + p)\,a\ ,}$$
dove A_L è l'area laterale del tronco, mentre P, p sono i semiperimetri di base ed a è l'apotema.
Indicata con A_T l'area totale e con A_B ed A_b quelle delle basi di un **tronco di piramide qualunque,** risulta chiaramente:

$$\mathbf{A_T = A_L + A_B + A_b}.$$

• Ai fini della determinazione dell'area laterale di un **cilindro** ci accontentiamo di un ragionamento intuitivo, che non può essere però considerato una vera dimostrazione.
Sia allora un cilindro di raggio r ed altezza h. Esso può essere pensato come un prisma regolare avente per base un poligono di un numero "infinitamente grande" di lati. Per cui la sua area laterale A_L si calcola come quella di un prisma regolare: solo che adesso, al posto del perimetro di base del prisma, ci sarà la lunghezza della circonferenza di base del cilindro.
Pertanto:

$$\mathbf{A_L = 2\,\pi\,r\,h}.$$

Il calcolo dell'area totale del cilindro è del tutto immediato:

$$\mathbf{A_T = 2\,\pi\,r\,h + 2\,\pi\,r^2}.$$

• Ai fini della determinazione dell'area laterale di un **cono** di raggio r e di apotema a, si fanno considerazioni analoghe a quelle del cilindro. In altre parole, il cono può essere pensato come una piramide regolare avente per base un poligono di un numero "infinitamente grande" di lati. Per cui la sua area laterale A_L si calcola come quella di una piramide regolare: solo che adesso, al posto del semiperimetro di base della piramide, avremo la lunghezza della semicirconferenza di base del cono.
Pertanto:

$$\mathbf{A_L = \pi\,r\,a}.$$

Il calcolo dell'area totale del cono è banale:

$$\mathbf{A_T = \pi\,r\,a + \pi\,r^2}.$$

• All'area laterale di un **tronco di cono** si può pervenire con considerazioni intuitive analoghe a quelle di cilindro e cono, rapportando il tronco di cono ad un tronco di piramide regolare. Ma questa volta vogliamo proporre una vera dimostrazione.
L'area laterale de tronco di cono può essere pensata come differenza tra l'area laterale del cono da cui il tronco è ottenuto e quella del cono residuo.

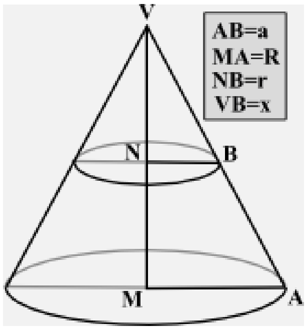

FIG. 1

Pertanto, detta A_L quest'area, chiamati R ed r i raggi del cono ed a il suo apotema ed indicato con x l'apotema incognito del cono residuo, si ha (Fig. 1):

$$A_L = \pi\,\overline{MA}\cdot\overline{VA} - \pi\,\overline{NB}\cdot\overline{VB} = \pi R(x+a) - \pi r x = \pi R a + \pi (R-r) x.$$

Per determinare x basta osservare che i triangoli VMA e VNB sono simili. Di conseguenza:

$$\frac{\overline{VA}}{\overline{VB}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{NB}}\,,\quad \text{ossia:}\quad \frac{x+a}{x} = \frac{R}{r}\,.$$

Da qui, risolvendo rispetto ad x, si trova: $x=\frac{ra}{R-r}$. Pertanto: $A_L=\pi Ra+\pi(R-r)\frac{ra}{R-r}$.

Quindi, a conti fatti:

$$\mathbf{A_L = \pi\,(R+r)\,a\,.}$$

Il calcolo dell'area totale A_T non presenta difficoltà:

$$\mathbf{A_T = \pi\,(R+r)\,a + \pi\,R^2 + \pi\,r^2.}$$

- Per quanto concerne l'area A di una **superficie sferica** di raggio r, si ha la seguente formula:

$$\mathbf{A = 4\,\pi\,r^2.}$$

Ossia, detto a parole:

L'area di una superficie sferica è 4 volte l'area del suo cerchio massimo.

Ne tralasciamo la dimostrazione. Ritorneremo fra breve su di essa per una spiegazione intuitiva.

49.1.2 Proponiamo adesso alcuni problemi, risolti o da risolvere, sulle aree dei solidi.

- PROBLEMA 1 (da risolvere). Un solido è ottenuto incollando uno sopra l'altro due cubi (Fig. 2), uno di spigolo a e l'altro di spigolo b, con a>b. Calcolare l'area totale del solido.

[Ispirato ad un problema assegnato a prove INVALSI 2013]

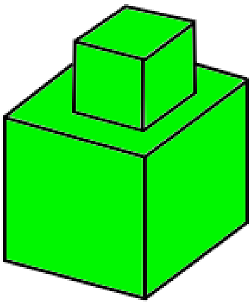

FIG. 2

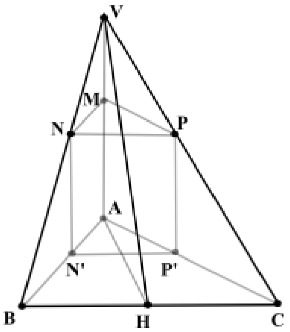

FIG. 3

- PROBLEMA 2 (risolto). Una piramide ha per base un triangolo rettangolo di cateti 3a e 4a, dove a è una lunghezza assegnata, ed il vertice dell'angolo retto del triangolo è anche il piede dell'altezza della piramide. Sezionando la piramide con un piano condotto parallelamente alla base ad una distanza 2a da essa e proiettando sulla base stessa il poligono sezione, si ottiene un prisma retto di area laterale $8a^2$. Calcolare l'area totale della piramide.

RISOLUZIONE. Detta V(ABC) la piramide, in cui A è il vertice dell'angolo retto del triangolo di base (Fig. 3), indichiamo con MNP una sua sezione parallela alla base e con AN'P' la proiezione di MNP sulla base stessa. Per i dati del problema si ha: $\left(\overline{MN}+\overline{NP}+\overline{PM}\right)\cdot\overline{AM}=8a^2$.

da cui, siccome $\overline{AM}=2a$, segue: $\overline{MN}+\overline{NP}+\overline{PM}=4a$.

D'altronde, per una nota proprietà delle sezioni parallele di un angoloide, è:

$$\frac{\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}}{\overline{MN}+\overline{NP}+\overline{PM}}=\frac{\overline{VA}}{\overline{VM}};$$

e poiché $\overline{BC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2}=\sqrt{9a^2+16a^2}=5a$, si ottiene:

$$\frac{12a}{4a}=\frac{\overline{VM}+2a}{\overline{VM}},$$

da cui si ricava $\overline{VM}=a$ e perciò: $\overline{VA}=\overline{VM}+\overline{MA}=3a$.
L'area totale della piramide $V(ABC)$ è uguale alla somma delle aree delle sue facce. Ora si ha:

- area faccia $ABC=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AC}=\frac{1}{2}\cdot 3a\cdot 4a=6a^2$,
- area faccia $VAB=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{VA}=\frac{1}{2}\cdot 3a\cdot 3a=\frac{9}{2}a^2$,
- area faccia $VAC=\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{VA}=\frac{1}{2}\cdot 4a\cdot 3a=6a^2$.

Per calcolare l'area della faccia VBC chiamiamo H il piede dell'altezza relativa all'ipotenusa del triangolo rettangolo ABC e uniamo V con H: il segmento VH, per il teorema delle tre perpendicolari, è perpendicolare a BC. Dunque: area faccia $VBC=\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{VH}$; e poiché:

$$\overline{VH}=\sqrt{\overline{VA}^2+\overline{AH}^2}=\sqrt{\overline{VA}^2+\left(\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\overline{BC}}\right)^2}=\sqrt{9a^2+\left(\frac{3a\cdot 4a}{5a}\right)^2}=\frac{3}{5}a\sqrt{41}$$

allora: area faccia $VBC=\frac{1}{2}\cdot 5a\cdot\frac{3}{5}a\sqrt{41}=\frac{3}{2}a^2\sqrt{41}$.
In definitiva, l'area totale della piramide è:

$$A_T=6a^2+\frac{9}{2}a^2+6a^2+\frac{3}{2}a^2\sqrt{41}=\frac{3}{2}a^2\left(11+\sqrt{41}\right).$$

- PROBLEMA 3 (risolto). Il perimetro di un triangolo rettangolo è 300 m ed il rapporto tra i suoi cateti è $12/5$. Calcolare l'area della superficie del solido ottenuto facendo ruotare il triangolo di un giro completo attorno alla parallela all'ipotenusa condotta per il vertice dell'angolo retto.

RISOLUZIONE. Detto ABC un triangolo rettangolo in A (Fig. 4), per i dati del problema si ha:

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=300\text{ m},\ \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{12}{5}.$$

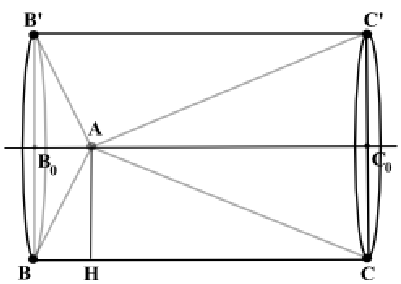

FIG. 4

Il solido ottenuto nella rotazione descritta è formato dal cilindro generato dal rettangolo BCC_0B_0 incavato da una parte dal cono generato dal triangolo ABB_0 e dall'altra dal cono generato dal triangolo ACC_0. Indicata con A l'area della sua superficie e osservato che $BB_0=CC_0=AH$, si ha:

$$A=2\pi\,\overline{BB_0}\cdot\overline{BC}+\pi\,\overline{BB_0}\cdot\overline{AB}+\pi\,\overline{CC_0}\cdot\overline{AC}=\pi\,\overline{AH}\left(2\,\overline{BC}+\overline{AB}+\overline{AC}\right)=\pi\,\overline{AH}\left(\overline{BC}+300\right)$$

dove naturalmente le lunghezze sono espresse in metri. In sostanza il problema è risolto nel momento in cui sono note le misure dell'ipotenusa BC del triangolo rettangolo ABC e dell'altezza AH relativa ad essa.
Posto allora $\overline{AB}=x$, una volta trovato che $\overline{AC}=\frac{12}{5}x$ e $\overline{BC}=\frac{13}{5}x$, dalla relazione: $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=300$ m segue: $x+\frac{12}{5}x+\frac{13}{5}x=300$ m, da cui si ricava $x=50$ m e, di conseguenza:

$$\overline{AB}=50\text{ m}\,,\ \ \overline{AC}=120\text{ m}\,,\ \ \overline{BC}=130\text{ m}\,,\ \ \overline{AH}=\frac{600}{13}\text{ m}\,.$$

In definitiva:

$$A=\pi\frac{600}{13}\ (130+300)\ m^2=\frac{258000}{13}\ \pi\ m^2.$$

- PROBLEMA 4 (da risolvere). Il raggio di base e l'altezza di un cono circolare retto sono lunghi rispettivamente r e $4r/3$. Calcolare la sua area totale.

Condotto per il centro della base del cono un piano parallelo ad una sua generatrice, che figura è la sezione del piano con il cono?

RISOLUZIONE (guida) Sulla prima parte nessuna indicazione. Sulla seconda ti suggeriamo di ricordare le "sezioni coniche".

49.2 VOLUME DI UN SOLIDO

49.2.1 Consideriamo un parallelepipedo rettangolo di dimensioni 3-4-5. Dividiamo in 3 parti uguali uno degli spigoli di misura 3 e mandiamo per i punti di divisione i piani perpendicolari allo spigolo stesso. Facciamo altrettanto con uno spigolo di misura 4 (dopo averlo diviso in 4 parti uguali) e con uno spigolo di misura 5 (dopo averlo diviso in 5 parti uguali). Con questo procedimento il parallelepipedo assegnato viene suddiviso in $3\times4\times5$ cubi di spigolo 1 (Fig. 5). Sicché, se il cubo di spigolo 1 è assunto come *solido unitario* (ossia come *unità di misura dei solidi*), possiamo concludere che la misura del parallelepipedo in esame é: $3\times4\times5=60$.

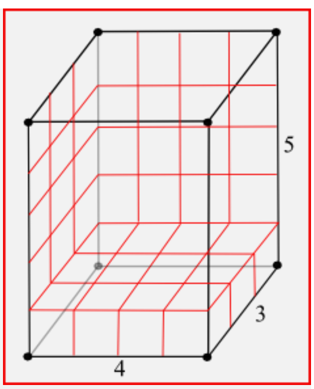

FIG. 5

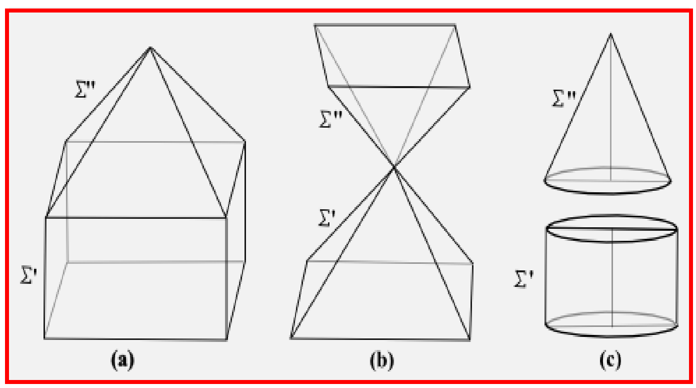

FIG. 6

Questo procedimento ne richiama alla mente un altro: quello per il calcolo dell'area di un rettangolo[1]. Quel calcolo fu basato su una regola ammessa senza dimostrazione che, seppure implicitamente, abbiamo tenuto presente nel calcolo delle aree dei solidi.

Ebbene, come allora, anche adesso il fatto su descritto, molto intuitivo, è assunto da noi come punto di riferimento per una regola non dimostrata, che definisca la misura di un solido.

Prima, però, è necessario mettersi d'accordo sul concetto di "somma di due solidi". La definizione è analoga a quella di "somma di due superfici", già trattata nel biennio.

Precisamente, se esistono due solidi Σ' e Σ" tali che (Fig. 6):

$$\Sigma'\cup\Sigma''=\Sigma\quad e\quad \Sigma'\cap\Sigma''=\varnothing\,,$$

[1] Cfr.: Unità 8: Aree dei poligoni. Teoremi di Pitagora e di Euclide, N° 8.1.

il solido Σ si chiama *somma* dei solidi Σ' e Σ'' e si scrive: $\Sigma = \Sigma' + \Sigma''$.

Ecco allora la regola relativa alla misura di un solido.

♦ **REGOLA PER IL CALCOLO DEL VOLUME.** Ad ogni solido Σ è associato uno ed un solo numero reale non negativo – è indicato con $V(\Sigma)$ e chiamato **volume** (o *misura*) del solido – tale che:
- se Σ è una superficie allora $V(\Sigma) = 0$;
- se Σ è un parallelepipedo rettangolo di dimensioni a, b, c allora $\mathbf{V(\Sigma) = a\,b\,c}$;
- se Σ' e Σ'' sono due solidi congruenti allora $V(\Sigma') = V(\Sigma'')$;
- se Σ è la somma dei due solidi Σ' e Σ'' allora $V(\Sigma) = V(\Sigma') + V(\Sigma'')$.

Due solidi aventi ugual volume si dicono ***equivalenti***.
In conseguenza di questa regola, il volume del **cubo** è immediato.
Potendosi infatti considerare un cubo come un parallelepipedo rettangolo di dimensioni s, s, s – dove s è la lunghezza dello spigolo del cubo – il suo volume V è chiaramente:

$$\mathbf{V = s^3}.$$

49.2.2 Una unità di misura dei solidi è il **metro cubo**, vale a dire il cubo, il cui lato misura 1 m. Si indica con la scrittura:

$$\mathbf{1\ m^3}.$$

Nella pratica sono usati anche, come unità di misura dei solidi, sottomultipli o multipli del metro cubo. Per esempio:

$$1\ \text{cm}^3 = 10^{-6}\ \text{m}^3; \quad 1\ \text{dm}^3 = 10^{-3}\ \text{m}^3; \quad 1\ \text{km}^3 = 10^{9}\ \text{m}^3.$$

Ricordiamo, inoltre, che 1 dm^3 equivale anche ad 1 **litro**, che è una misura di capacità ed è considerata l'unità di misura per i volumi nel Sistema Internazionale. Evidentemente 1 m^3 equivale a 1000 litri.
A titolo di curiosità segnaliamo alcuni particolari volumi:
- una mela di medie dimensioni occupa un volume di circa 35 cm^3;
- un'automobile di media cilindrata ha un serbatoio della capacità di circa 70 litri;
- la piramide di Cheope, a Giza in Egitto, occupa attualmente uno spazio di circa $2{,}4 \times 10^6$ m^3;
- la Terra occupa un volume pari a circa $1{,}08 \times 10^{21}$ m^3;
- il Sole occupa un volume di circa $1{,}42 \times 10^{27}$ m^3.

È vero che il volume del Sole vale circa un milione di volte il volume della Terra?

49.3 VOLUMI DEL PRISMA E DEL CILINDRO

49.3.1 Il volume V di un **prisma** di area di base A_b e di altezza h è dato dalla seguente formula:

[1] $$\mathbf{V = A_b h}.$$

DIMOSTRAZIONE. La giustificazione della formula avviene per gradi.
Occupiamoci dapprima del prisma retto, incominciando ad osservare che la formula del volume del parallelepipedo rettangolo, V=abc, può essere scritta nella forma [1]: basta pensare ab come l'area A_b di un rettangolo di base del parallelepipedo e c come la misura h della sua altezza.
Adesso dimostriamo che la [1] è vera nel caso di un prisma retto avente per base un triangolo rettangolo. A questo riguardo, consideriamo il parallelepipedo rettangolo ABCDEFGH (Fig. 7). Il piano diagonale ACGE lo divide in due prismi retti triangolari uguali: ABCEFG e ADCEHG.
Essi hanno quindi lo stesso volume V. D'altronde, detta A_b l'area di uno dei triangoli rettangoli in cui

la diagonale AC divide il rettangolo ABCD e indicata con h l'altezza del prisma, risulta: $2\,V=2\,A_b\,h$ e perciò: $V=A_b\,h$.

Supponiamo ora che il parallelepipedo sia ancora retto, ma non necessariamente rettangolo. Insomma la sua base ABCD sia un parallelogramma generico (Fig. 8).

Rileviamo subito che, per mezzo dei segmenti DM e BN, condotti perpendicolarmente ai lati AB e DC del parallelogramma, questo viene scomposto in tre parti: i due triangoli rettangoli AMD e BNC e il rettangolo MBND. Di conseguenza, conducendo per le rette DM e BN i due piani perpendicolari alle basi del prisma, questo viene scomposto in tre prismi retti di uguale altezza h: due aventi per basi i due triangoli rettangoli AMD e BNC ed uno avente per base il rettangolo MBND. Di modo che, chiamate A_1, A_2, A_3 le aree di queste basi e detti A_b e V rispettivamente l'area di base e il volume del prisma assegnato, risulta chiaramente:

$$V = A_1\,h + A_2\,h + A_3\,h = (A_1+A_2+A_3)\,h = A_b\,h.$$

Dunque la formula [1] vale per un parallelepipedo retto qualsiasi.

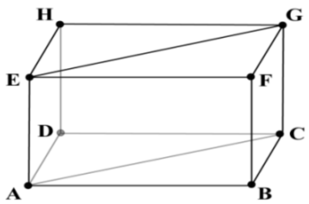

FIG. 7

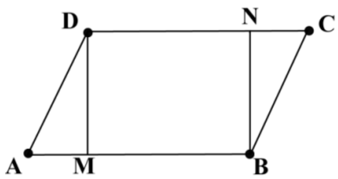

FIG. 8

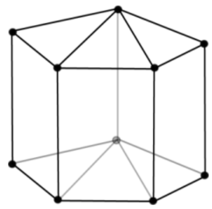
FIG. 9

Ragionando adesso sul parallelepipedo retto come abbiamo fatto in precedenza col parallelepipedo rettangolo, si giustifica che la formula [1] è vera nel caso di un prisma triangolare retto qualsiasi.

A questo punto è immediato stabilire che la formula [1] vale per un prisma retto qualsiasi: questo, infatti, può essere opportunamente scomposto in prismi triangolari retti (Fig. 9).

Il discorso da farsi per dimostrare la formula [1] con considerazioni di geometria elementare potrebbe essere sviluppato anche nel caso di un prisma obliquo, ma preferiamo rinunciare alla dimostrazione.

49.3.2 Consideriamo un **cilindro circolare retto** di raggio r ed altezza h. Ragionando, seppure a livello intuitivo, come per il calcolo dell'area laterale, si conclude che il volume V del cilindro si trova come quello del prisma: solo che adesso, al posto dell'area di base del prisma, ci sarà quella del cerchio di base del cilindro. Pertanto:

$$\mathbf{V = \pi\, r^2\, h}.$$

49.4 VOLUMI DELLA PIRAMIDE E DEL CONO

49.4.1 Il volume V di una **piramide** di area di base A_b e di altezza h è:

$$\mathbf{V = \frac{1}{3} A_b h}\,.$$

La dimostrazione di questa formula sarà proposta più avanti, nel corso degli studi, come applicazione del calcolo integrale. Qui mettiamo in evidenza soltanto che, proprio interpretandola geometricamente, possiamo concludere con la seguente proprietà.

♦ **TEOREMA. Una piramide è equivalente alla terza parte di un prisma avente base equivalente e uguale altezza.**

Il che significa pure, evidentemente, che un prisma è equivalente alla somma di tre piramidi di basi equivalenti e di altezze uguali a quelle del prisma.
Questo fatto è evidenziato nella figura 10, ancorché riferito a prisma e piramide triangolari.

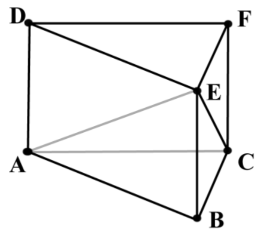

FIG. 10

Si può notare infatti che il piano EAC divide il prisma ABCDEF in due piramidi, una triangolare con vertice in E e base ABC e l'altra quadrangolare con lo stesso vertice e base ACFD. Questa seconda piramide, a sua volta, è divisa dal piano ECD in due piramidi triangolari, aventi entrambe vertice in E e basi, una ACD e l'altra DCF. Queste due piramidi sono equivalenti per avere basi equivalenti e la medesima altezza. D'altro canto, la piramide di vertice E e base DCF può essere pensata come avente vertice C e base DEF e, come tale, è evidentemente equivalente alla piramide di vertice E e base ABC. In sostanza, il prisma risulta formato da tre piramidi equivalenti: (E,ABC), (C,DEF), (E,ACD). Considerato che la piramide (E,ABC) ha base uguale a quella del prisma e la medesima altezza, rimane spiegata la proprietà sopra enunciata.

49.4.2 Ragionando intuitivamente su un **cono circolare retto** di raggio r ed altezza h come abbiamo fatto per il cilindro, si conclude che il suo volume V è espresso dalla formula seguente:

$$\mathbf{V=\frac{1}{3}\pi\, r^2\, h}.$$

49.5 VOLUMI DEL TRONCO DI PIRAMIDE E DEL TRONCO DI CONO

49.5.1 Il volume V di un **tronco di piramide**, le cui basi misurano B e b e la cui altezza è h, è dato dalla seguente formula:

$$\mathbf{V=\frac{1}{3}\,h\left(B+b+\sqrt{Bb}\right)}.$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo la piramide di vertice O ed altezza OH. Supponiamo che da essa sia stato ottenuto il tronco di piramide di altezza H'H (Fig. 11).

Posto $\overline{OH'}=x$ e ricordato che $\overline{H'H}=h$, risulta $\overline{OH}=x+h$. In virtù del teorema sulle sezioni parallele di un angoloide, si ha:

$$\frac{B}{b}=\frac{(x+h)^2}{x^2}\ .$$

Risolvendo questa equazione in x e tenendo presente che x>0, si trova:

$$x=\frac{h\left(b+\sqrt{Bb}\right)}{B-b}\ .$$

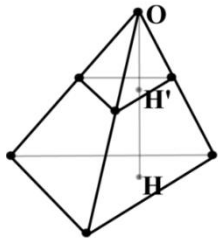

FIG. 11

Siamo adesso in grado di calcolare il volume del tronco di piramide come differenza tra il volume della piramide di base B ed altezza OH e quello della piramide di base b ed altezza OH'. Precisamente, come volevasi dimostrare, si ha:

$$V=\frac{1}{3}B(x+h)-\frac{1}{3}bx=\frac{1}{3}Bh+\frac{1}{3}(B-b)x=\frac{1}{3}Bh+\frac{1}{3}(B-b)\frac{h\left(b+\sqrt{Bb}\right)}{B-b}=\frac{1}{3}h\left(B+b+\sqrt{Bb}\right).$$

49.5.2 Per il calcolo del volume V di un **tronco di cono** di altezza h e di raggi R ed r si può ragionare come nel caso del cilindro e del cono, oppure come nel caso del tronco di piramide, oppure ancora si può ragionare direttamente sul tronco. In ogni caso si giunge a questa formula:

$$\mathbf{V=\frac{1}{3}\pi\, h\left(R^2+r^2+R\, r\right)}$$

che provvederai a ricavare da solo per esercizio.

49.6 PRINCIPIO DI CAVALIERI. VOLUME DELLA SFERA

49.6.1 Il volume V di una **sfera** di raggio r è espresso dalla seguente formula:

$$\mathbf{V=\frac{4}{3}\,\pi\, r^3}.$$

Essa, benché detta a parole e non nella forma simbolica da noi usata, è stata trovata per primo da Archimede nel III sec. a.C.. Non alla maniera di Archimede, ma come applicazione del calcolo integrale, noi ne forniremo una dimostrazione più avanti, nel corso degli studi.

49.6.2 Qui vogliamo descrivere tuttavia una dimostrazione prettamente geometrica, che utilizza *la scodella di Galilei*, così chiamata perché ne tratta Galileo Galilei (1564-1642) nell'opera *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* (1638).
Incominciamo allora con la definizione della "scodella di Galilei".
Consideriamo al riguardo il quadrato ABCD e l'arco BD della circonferenza di centro A e raggio AB (Fig. 12). Nella rotazione di $360°$ introno al AB, il triangolo mistilineo delimitato dall'arco BD e dai segmenti BC e CD genera un solido: è proprio questo solido che si chiama ***scodella di Galilei***.
Se ne desume che la scodella di Galilei si ottiene dal cilindro generato dal quadrato ABCD nella suddetta rotazione sottraendogli la semisfera generata dal quadrante di cerchio ABD.
Questo implica che: $V_{\text{scodella}}=V_{\text{cilindro}}-V_{\text{semisfera}}$ e quindi: $V_{\text{semisfera}}=V_{\text{cilindro}}-V_{\text{scodella}}$.
Se si conoscesse il volume della scodella sarebbe possibile ricavare quello della semisfera e quindi, ovviamente, quello della sfera.
Orbene, è possibile dimostrare che la scodella è equivalente al cono generato dal triangolo rettangolo ABC nella medesima rotazione suddetta, ricorrendo al "principio di Cavalieri".

Per la verità, una dimostrazione di tale equivalenza è dovuta a **Luca Valerio** (1553-1618), professore di matematica presso l'Università "La Sapienza" di Roma. L'opera che la contiene ha per titolo *De centro gravitatis solidorum libri tres* (1604). La dimostrazione di Valerio, però, non è basata sul principio di Cavalieri. Principio che Valerio non poteva conoscere, essendo morto 17 anni prima della pubblicazione dell'opera che contiene tale principio, la *Geometria degli indivisibili*, avvenuta per la prima volta nel 1635, e soprattutto perché l'opera di Valerio è stata pubblicata 31 anni prima di quella di Cavalieri. Ed in effetti egli si serve di un altro metodo di dimostrazione.

Per quanto concerne poi Galilei, non gli interessa, almeno nel contesto in cui ne parla, la dimostrazione dell'equivalenza della scodella e del cono, a proposito della quale dice testualmente (*Discorsi*, Giornata prima): «… l*asceremo per ora la dimostrazione, sì perché, volendola noi vedere, la troveremo nella duodecima proposizione del libro secondo* De centro gravitatis solidorum *posta dal Sig. Luca Valerio, nuovo Archimede dell'età nostra, il quale per un altro suo proposito se ne servì, …*». A Galilei interessa soltanto la dimostrazione dell'equivalenza delle sezioni piane dei due solidi, ma per scopi che nulla hanno a che fare con il volume della scodella.

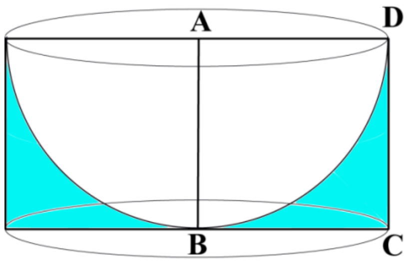

FIG. 12

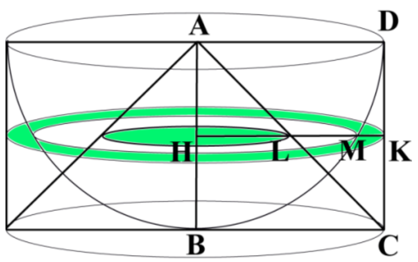

FIG. 13

A dire il vero, una volta dimostrata quest'ultima equivalenza, cioè quella delle sezioni piane, il passo che porta all'equivalenza tra scodella e cono è veramente banale utilizzando il principio di Cavalieri.

Incominciamo allora con l'enunciato del **principio di Cavalieri**, almeno nella parte che ci interessa. Ma non nella formulazione data da Cavalieri nella *Geometria degli indivisibili* (libro II, prop. III), che è la seguente:

«*… figure solide [hanno] lo stesso rapporto che hanno tutti i piani di esse presi rispetto ad un riferimento qualunque*»,

bensì nella formulazione data dallo stesso Cavalieri nel libro VII, prop. 1, e che da quell'altra discende:

«*… figure solide quali si vogliano collocate tra i medesimi piani paralleli, nelle quali – condotti piani qualunque equidistanti a quei piani paralleli – le figure piane generate nei solidi stessi da uno qualsivoglia dei piani condotti sono uguali, saranno del pari uguali fra di loro*».

Benché il concetto sia chiaro, proviamo ugualmente a fare uno sforzo per renderlo più comprensibile:

«**Se è possibile collocare due solidi tra due piani paralleli e se un qualunque piano parallelo agli altri due li interseca secondo superfici equivalenti allora i due solidi sono equivalenti**».

Ebbene, considerato che la scodella ed il cono sono già collocati fra due piani paralleli – quelli delle basi del cilindro da cui sono stati ricavati (Fig. 13) – si tratta a questo punto di condurre un qualunque piano parallelo a quelle basi e dimostrare che interseca la scodella ed il cono secondo due superfici equivalenti.

Ora, prendendo il piano passante per un generico punto H del segmento]AB[, la scodella è sezionata da esso secondo la corona circolare di raggi HK e HM, mentre il cono è sezionato secondo il cerchio di raggio HL. Basta dimostrare perciò che risulta: $\overline{HL}^2=\overline{HK}^2-\overline{HM}^2$ per concludere che queste due sezioni sono equivalenti. Il che è di tutta evidenza in base al teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo AHM, dopo aver constatato che AH=HL e AM=HK.

La precedente uguaglianza è ancora verificata nei casi limite in cui il punto H coincide con A o con B.

Il volume della scodella è pertanto uguale al volume del cono in virtù del principio di Cavalieri.

Ritornando allora alla relazione che lega i volumi di semisfera, cilindro e scodella, possiamo scriverla in questo modo: $V_{semisfera} = V_{cilindro} - V_{cono}$ e perciò:

$$V_{semisfera} = \pi\, r^2 \cdot r - \frac{1}{3}\pi\, r^2 \cdot r = \frac{2}{3}\pi\, r^3.$$

Da qui segue immediatamente la formula del volume della sfera.

49.6.3 Il principio di Cavalieri permetterebbe di giungere anche ai seguenti risultati:

a) equivalenza tra un prisma retto ed un prisma obliquo aventi basi equivalenti ed altezze uguali;

b) equivalenza tra un cilindro ed un prisma aventi basi equivalenti ed altezze uguali;

c) equivalenza tra un cono ed una piramide aventi basi equivalenti ed altezze uguali.

Da questo si desume che, note le formule per il calcolo dei volumi di un prisma retto e di una piramide, si trovano quelle per il calcolo dei volumi di un prisma obliquo, di un cilindro e di un cono. Tutto ciò si potrebbe spiegare in maniera dettagliata, ma preferiamo sorvolare e rimandare a dimostrazioni basate sul calcolo integrale.

49.6.4 Vogliamo invece soffermarci sulla ***formula dell'area della superficie sferica***, per fornirne una spiegazione intuitiva. Essa richiama quella che a suo tempo abbiamo fornito per l'area del cerchio. Anche questa "dimostrazione" è dovuta a Keplero.

Considerata allora una semisfera di centro O, suddividiamola in un conveniente numero n di parti S_1, S_2, ... , S_n, non necessariamente congruenti, conducendo un opportuno numero di piani, alcuni passanti per l'asse OV ed altri perpendicolari a tale retta (Fig. 14).

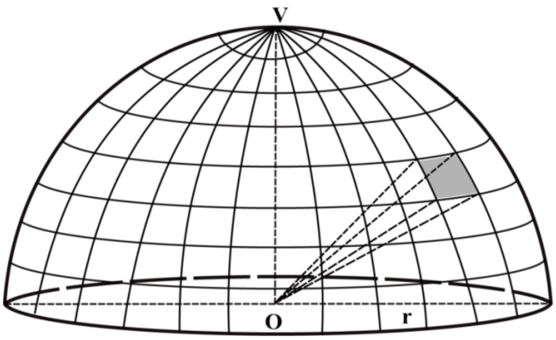

FIG. 14

Congiungendo O con i punti che formano il contorno di ciascuna delle parti così ottenute, la semisfera risulta scomposta in n solidi che – se n è sufficientemente grande perché ognuna delle porzioni S_i si possa assimilare ad una superficie piana – si possono ritenere delle piramidi con vertice O e basi le suddette porzioni S_i e perciò aventi tutte per altezza il raggio r della superficie sferica.

Di modo che, indicata con A_i l'area della generica porzione S_i, il volume V' della semisfera è:

$$V'=\frac{1}{3}A_1r+\frac{1}{3}A_2r+\ldots+\frac{1}{3}A_nr,\ \text{ ossia: } V'=\frac{1}{3}r\,(A_1+A_2+\ldots+A_n);$$

ma $A_1+A_2+\ldots+A_n$ è l'area A' della superficie della semisfera, mentre $V'=\frac{2}{3}\pi r^3$. Perciò si ha:

$$\frac{2}{3}\pi r^3=\frac{1}{3}rA'.$$

Da qui segue: $A'=2\pi r^2$ e perciò l'area A della superficie sferica è: $A=4\pi r^2$.

49.7 PROBLEMI SUI VOLUMI DEI SOLIDI

49.7.1 Incominciamo col proporti alcuni quesiti a scelta multipla con 4 alternative di cui una sola è corretta. Dovrai individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta che hai operato.

1. Un prisma quadrangolare regolare ha base di area a^2 ed altezza lunga h, essendo a ed h due lunghezze assegnate. Indicati con V ed A_t rispettivamente il volume e l'area totale del prisma, una sola delle seguenti alternative è corretta. Quale?
   [A] $A_t=2a(a+2h),\ V=a^2h.$ [B] $A_t=2a(a+2h),\ V=\frac{1}{2}a^2h.$
   [C] $A_t=a(2a+h),\ V=a^2h.$ [B] $A_t=a(2a+h),\ V=\frac{1}{2}a^2h.$
2. Un triangolo rettangolo di cateti lunghi a, b ruota di un giro completo una volta intorno al cateto lungo a ed una volta intorno al cateto lungo b, generando due solidi di volumi rispettivamente V_a e V_b. Una sola delle seguenti alternative è corretta. Quale?
   [A] $\frac{V_a}{V_b}=\frac{a}{b}.$ [B] $\frac{V_a}{V_b}=\frac{b}{a}.$ [C] $\frac{V_a}{V_b}=\frac{a^2}{b^2}.$ [D] $\frac{V_a}{V_b}=\frac{b^2}{a^2}.$
3. Quale delle seguenti misure è una stima plausibile dell'aula scolastica che frequenti?
   [A] $1{,}4\times10^2$ m^3. [B] $1{,}4\times10^4$ dm^3. [C] $9{,}0\times10^6$ cm^3. [D] $9{,}0\times10^6$ dm^3.
4. Quale delle seguenti misure è una stima plausibile dello spazio occupato dalla tua penna a sfera?
   [A] $0{,}3\times10^{-1}$ m^3. [B] $4{,}0\times10^{-1}$ dm^3. [C] $4{,}3\times10^4$ cm^3. [D] $1{,}4\times10^{-2}$ dm^3.
5. Il corpo di una persona di misure normali occupa un dato spazio. Quale delle seguenti misure, espresse in decimetri cubi, è una stima plausibile di tale spazio?
   [A] 34 . [B] 170 . [C] 500 . [D] 980 .
6. La lunghezza dell'equatore terrestre è circa 40 mila chilometri. Qual è l'ordine di grandezza del volume della Terra, espresso in metri cubi?
   [A] 10^{15} . [B] 10^{18} . [C] 10^{21} . [D] 10^{24} .

49.7.2 Occupiamoci adesso di alcuni problemi veri e propri.

- PROBLEMA 1. Un trapezio rettangolo, ruotando di un giro completo attorno alla base maggiore, genera un solido di volume V'; ruotando di un giro completo intorno alla base minore, genera un solido di volume V''. Determinare le basi del trapezio sapendo che la somma delle loro misure è 2a, dove a è una lunghezza assegnata, e sapendo che V':V''=3:4.

RISOLUZIONE. Considerato il trapezio rettangolo ABCD (Fig. 15), notiamo anzitutto che il solido generato da esso in una rotazione completa attorno alla base maggiore AB è formato dal cilindro di raggio AD ed altezza DC sormontato dal cono di raggio HC ed altezza HB, mentre il solido generato dal trapezio medesimo in una rotazione completa attorno alla base minore DC è formato dal cilindro di raggio AD ed altezza DK incavato dal cono di raggio BK ed altezza CK.

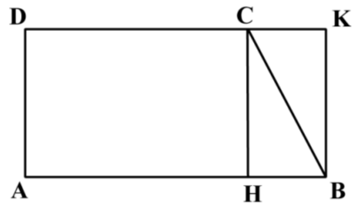

FIG. 15

Pertanto, constatato che HC≅BK≅AD e CK≅HB, si ha:

$$\frac{V'}{V"}=\frac{\pi\,\overline{AD}^2\cdot\overline{DC}+\frac{1}{3}\pi\,\overline{AD}^2\cdot\overline{HB}}{\pi\,\overline{AD}^2\cdot\overline{AB}-\frac{1}{3}\pi\,\overline{AD}^2\cdot\overline{HB}}=\frac{3\,\overline{DC}+\overline{HB}}{3\,\overline{AB}-\overline{HB}}\;;$$

e poiché HB = AB – DC, si ha:

$$\frac{V'}{V"}=\frac{\overline{AB}+2\,\overline{DC}}{2\,\overline{AB}+\overline{DC}}.$$

Perciò i dati del problema si traducono nel seguente sistema di due equazioni nelle incognite $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$:

$$\begin{cases}\overline{AB}+\overline{DC}=2a\\ \dfrac{\overline{AB}+2\,\overline{DC}}{2\,\overline{AB}+\overline{DC}}=\dfrac{3}{4}\end{cases}$$

Esso, una volta risolto, dà la seguente soluzione: $\overline{AB}=\frac{10}{7}a$, $\overline{DC}=\frac{4}{7}a$.

• PROBLEMA 2. La base maggiore, la base minore e il perimetro di un trapezio isoscele misurano nell'ordine: 12 m, 6 m, 28 m.

Spiegare se i dati assegnati sono sufficienti, insufficienti, sovrabbondanti o incompatibili per calcolare:

a) l'area del trapezio;
b) il raggio del cerchio inscritto nel trapezio;
c) il raggio del cerchio circoscritto al trapezio;
d) il volume del solido Σ generato dal trapezio in una rotazione di mezzo giro intorno alla retta che unisce i punti medi delle sue basi;
e) l'area totale di un cono circolare retto equivalente al solido Σ;
f) il rapporto fra i volumi dei solidi ottenuti facendo ruotare il trapezio di un giro completo dapprima intorno alla base maggiore e poi intorno alla base minore.

RISOLUZIONE (indicazioni).

a) I dati assegnati sono sufficienti per determinare l'area S del trapezio. Si trova: $S = 36\ m^2$.
b) I dati assegnati sono incompatibili per la richiesta del problema. In effetti, nel trapezio non si può inscrivere un cerchio.
c) I dati assegnati sono sufficienti. Si trova che il raggio del cerchio circoscritto al trapezio è:

$$R=\frac{5}{8}\sqrt{97}\ m.$$

d) I dati assegnati sono sufficienti per determinare il volume V del solido richiesto. Si trova:

$$V = 84\,\pi\ m^3.$$

e) I dati sono insufficienti.
f) I dati sono sovrabbondanti per la richiesta: basterebbe conoscere il rapporto tra le basi del trapezio e non occorre neppure sapere che esso è isoscele. Si trova in ogni caso:

$$\frac{V'}{V''} = \frac{4}{5}.$$

49.7.3 PROBLEMI da risolvere.

1. Determinare le misure di due segmenti sapendo che la differenza tra il maggiore e il minore misura 2 cm, mentre la differenza tra il cubo avente come spigolo il maggiore e quello avente come spigolo il minore misura 218 cm^3.
2. Un tetraedro regolare e un ottaedro regolare hanno gli spigoli ugualmente lunghi. È possibile calcolare il rapporto fra le loro superfici e quello fra i loro volumi? In caso di risposta affermativa, eseguire il calcolo.
3. Le dimensioni interne della base di un acquario a forma di parallelepipedo rettangolo sono 9 cm e 12 cm, mentre la sua altezza misura 10 cm. L'acqua che vi è contenuta lo riempie fino al livello di 8 cm. Si immerge nell'acquario un solido di marmo a forma di cubo e l'acqua si solleva riempiendolo completamente fino all'orlo, ma senza traboccare. Quanto misura lo spigolo del cubo?
4. Considera un tetraedro regolare e un qualunque punto interno ad esso o appartenente ad una qualunque delle sue facce. Dimostra che la somma delle distanze di tale punto dalle facce del tetraedro è uguale all'altezza del tetraedro.
   [**R**. Unito il punto con i vertici del tetraedro, questo viene diviso in quattro piramidi aventi …; per cui il volume del tetraedro è uguale alla somma dei volumi …]
5. Considera un poliedro regolare di n facce e un qualunque punto interno ad esso o appartenente ad una qualunque delle facce. Dimostra che la somma delle distanze di tale punto dalle facce del poliedro è uguale ad n volte l'apotema del poliedro. [**R**. Come esercizio precedente]
6. Un solido, il cui volume è $14\pi/3$ cm^3, è formato da un tronco di cono circolare retto sormontato sulla base maggiore da un cono circolare retto, equivalente al tronco di cono, somigliando così ad un grosso diamante. Sapendo che la base maggiore del tronco, coincidente con la base del cono, è il quadruplo della base minore e che il vertice del cono dista 2,75 cm dalla base minore, calcolare le altezze dei due solidi. [**R**. 1 cm, …]

VERIFICHE [2]

Aree dei solidi (nn. 1-28).

1. Calcolare il rapporto fra l'area di un tetraedro regolare e quella del tetraedro regolare avente per vertici i centri delle facce del primo.
2. Calcolare il rapporto fra l'area di un esaedro regolare e quella dell'ottaedro regolare avente per vertici i centri delle facce dell'esaedro.
3. Calcolare il rapporto fra l'area di un ottaedro regolare e quella dell'esaedro regolare avente per vertici i centri delle facce dell'ottaedro.
4. Una piramide ha per base un quadrato di lato a ed il piede della sua altezza coincide con uno dei vertici del quadrato. Sapendo che il maggiore degli spigoli laterali forma col piano della base un angolo di 30°, calcolare l'area totale della piramide. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{a^2}{3}\left(3+\sqrt{6}+\sqrt{15}\right)\right]$

---

[2] I problemi (o gli esercizi) contrassegnati col simbolo ® sono risolti (totalmente o parzialmente) e la risoluzione è situata nella cartella "Integrazione 2", file "Matematica – Integrazione 2, unità 28-88", pubblicata in questo medesimo sito e scaricabile gratuitamente.

5. Considerato un cono equilatero di raggio r, determinare a quale distanza dal suo vertice bisogna condurre un piano parallelo alla base, affinché la sezione ottenuta sia media proporzionale fra le due parti in cui l'area laterale del cono è divisa dal piano secante. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{2}{5}r\sqrt{15}\right]$

6. Considerato un triangolo equilatero ABC di lato lungo a, determinare sul lato AB un punto P tale che, condotte per esso le corde PR e PS parallele rispettivamente ai lati AC e BC, l'area della superficie del solido generato dal quadrilatero PRCS in una rotazione completa intorno a BC sia doppia di quella del solido generato, nella stessa rotazione, dal triangolo PBR. $[\mathbf{R.}\ AP=a/2]$

7. Descrivere i due solidi che si ottengono secando un cubo con il piano di due spigoli opposti. Di ciascuno di essi calcolare l'area totale in funzione della lunghezza s dello spigolo del cubo.
$\left[\mathbf{R.}\ s^2\left(3+\sqrt{2}\right)\right]$

8. In un trapezio rettangolo la diagonale minore è perpendicolare al lato obliquo. Tale diagonale e l'altezza del trapezio sono lunghe rispettivamente $4a$ e $12a/5$. Considerata la piramide avente per base il trapezio e per vertice un punto distante 3a dalla base e situato sulla perpendicolare ad essa condotta per il vertice dell'angolo retto adiacente alla base minore del trapezio, calcolare l'area laterale di questa piramide.

9. Una piramide quadrangolare regolare ha il perimetro di base uguale ad 8a e l'apotema uguale ad $a\sqrt{2}$. Determinare a quale distanza dal vertice bisogna condurre un piano parallelo alla base affinché, proiettando il quadrato sezione sulla base medesima, si ottenga un prisma retto di area laterale uguale a $2a^2$.
$[\mathbf{R.}\ a/2]$

10. Il raggio di base e l'altezza di un cono circolare retto sono direttamente proporzionali ai numeri 4 e 3 e l'area totale del cono è $9\pi a^2$. Determinare il raggio di base e l'altezza del cilindro circolare retto inscritto nel cono e avente area totale uguale a $\frac{20}{9}\pi a^2$. $[\mathbf{R.}\ \frac{2}{3}a, a]$

11. Verificare che il cilindro circolare retto inscritto in una sfera e avente l'area laterale uguale alla metà dell'area della superficie della sfera è equilatero. Ammesso poi che il raggio della sfera sia r, qual è il raggio di detto cilindro? $\left[\mathbf{R.}\ r/\sqrt{2}\right]$

12. Una piramide ha per base un triangolo isoscele, nel quale ciascuno dei lati congruenti è lungo k ed il rapporto fra l'altezza e la base è $3/8$. Inoltre il piede dell'altezza della piramide coincide col vertice propriamente detto del triangolo di base. Sapendo che l'area laterale della piramide è $\frac{8}{5}k^2$, calcolarne l'altezza. $[\mathbf{R.}\ 4k/5]$

13. La base maggiore di un trapezio è lunga $2b$ e gli angoli adiacenti ad essa sono ampi uno $30°$ e l'altro $120°$. Sapendo che la base minore è congruente al minore dei lati obliqui, calcolare l'area del solido generato dal trapezio in una rotazione completa intorno al maggiore dei lati obliqui $[\mathbf{R.}\ 4\pi b^2]$

14. Dato il triangolo isoscele acutangolo ABC di base BC, si dica O un punto situato sul prolungamento della retta AC, dalla parte di C, in modo che la circonferenza, di centro O e tangente alla retta AB tocchi questa retta esattamente in B. Indicato con D l'ulteriore punto comune a questa circonferenza ed alla retta BC, si dimostri che AO è perpendicolare ad OD.
Considerata poi la piramide avente per base il quadrilatero ABOD e per vertice il punto V situato sulla perpendicolare condotta per O al piano della base, se ne calcoli l'area totale sapendo che: $AB=2a$, $OB=OV=a\sqrt{2}$. $\left[\mathbf{R.}\ a^2(4+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{7}\right]$

15. Il rapporto tra il lato obliquo e l'altezza di un trapezio rettangolo circoscritto ad un cerchio è 13/12 e il perimetro del trapezio è $25a$. Considerata la piramide avente per base il trapezio e per vertice un punto distante 4a dalla base e situato sulla perpendicolare ad essa condotta per il centro del cerchio inscritto, calcolare l'area totale di questa piramide.

16. Un trapezio rettangolo, di perimetro $20r/3$, è circoscritto ad un semicerchio di raggio r in modo che la sua base maggiore ne contenga il diametro. Calcolare l'area del solido generato dal trapezio quando ruota di un giro completo intorno alla base minore.

17. Nel triangolo rettangolo ABC l'ipotenusa AC è lunga $20a$ ed il cateto AB è $4/3$ del cateto BC. Tracciata la circonferenza di diametro AB, si dica D l'ulteriore punto in cui la retta AC la interseca e si chiami E il punto simmetrico di D rispetto ad AB. Quindi, condotta la perpendicolare in B al piano della figura, si stacchi su di essa un segmento BV lungo quanto AB. Considerata, infine, la piramide di vertice V e di base il quadrilatero AEBC, se ne calcoli l'area totale.

18. Le diagonali di un quadrilatero ABCD sono perpendicolari; inoltre si ha:

$$B\hat{A}D=90°,\ AB=4b,\ AD=3b,\ BC=2b\sqrt{17},$$

essendo b una lunghezza assegnata. Condotta per A la retta p parallela a BD e costruito il quadrilatero avente per vertici i punti medi del quadrilatero dato, dopo aver dimostrato che esso è un rettangolo, calcolare l'area del solido generato da esso in una rotazione completa intorno a p.

19. In un trapezio isoscele circoscritto ad un cerchio di raggio r, la base maggiore supera la minore di un segmento lungo $3r$. Sapendo che una piramide retta avente per base il trapezio ha area laterale uguale a $2r^2$, calcolare l'area laterale del cono inscritto in essa. $\left[\textbf{R.}\ \frac{2}{5}\pi r^2\right]$

20. Un trapezio rettangolo è circoscritto ad un semicerchio di raggio r in modo che la sua base maggiore ne contenga il diametro. Sapendo che il lato obliquo del trapezio è lungo $5r/4$, calcolare l'area del solido generato da esso in una rotazione completa intorno alla base minore.

21. Una piramide ha per base il quadrato ABCD di lato s e la sua area laterale è $s^2\left(2+\sqrt{5}\right)$. Determinare l'altezza VA della piramide.
Successivamente trovare a quale distanza da V bisogna condurre un piano parallelo alla base affinché, proiettando il quadrato sezione sulla base medesima, si ottenga un prisma retto di area totale uguale a $2s^2$. [**R.** $2\ s;\ 2s/3$]

22. In un trapezio isoscele è inscritta una semicirconferenza il cui diametro, di lunghezza $2r$, è parte della base maggiore del trapezio. Sapendo che l'area del solido generato dal trapezio in una rotazione completa intorno alla base maggiore è $\frac{14}{3}\pi r^2$, calcolare la lunghezza di questa base.
[**R.** 2 soluzioni: $34r/15,\ 10r/3$]

23. In un cono circolare retto circoscritto ad una sfera il rapporto fra l'area laterale del cono e l'area di un cerchio massimo della sfera è $3+2\sqrt{2}$. Verificare che il rapporto fra l'apotema e il raggio di base del cono è $1+\sqrt{2}$.

24. In un triangolo isoscele è inscritta una semicirconferenza in modo che il diametro di questa sia parte della base di quello. Nota la lunghezza h del segmento che unisce i punti di contatto della semicirconferenza con i lati congruenti del triangolo e nota l'area, uguale a $9\pi h^2$, della superficie generata dalla semicirconferenza in una rotazione completa attorno alla retta del suo diametro, calcolare l'area del solido generato dal triangolo nella stessa rotazione. $\left[\textbf{R.}\ \frac{243}{16}\pi h^2\right]$

25. Una piramide ha per base un quadrato e il piede della sua altezza coincide con uno dei vertici della base. Inoltre il maggiore dei suoi spigoli laterali forma col piano di base un angolo di $60°$. Intersecando la piramide con un piano parallelo alla base stessa, condotto ad una distanza h da questa, e proiettando il poligono sezione sulla base medesima, si ottiene un prisma retto avente area laterale uguale a $\frac{\sqrt{6}}{3}h^2$.

Calcolare l'area laterale della piramide. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{3}{8}h^2\left(\sqrt{6}+\sqrt{7}\right)\right]$

26. In una sfera di raggio r è inscritto un cono circolare retto di area laterale $\frac{8}{9}\pi r^2\sqrt{3}$. Calcolare l'altezza del cono. Determinare quindi a quale distanza dal vertice del cono bisogna condurre un piano parallelo alla base affinché la corona circolare individuata dai cerchi sezione di tale piano con la sfera e con il cono abbia area $\frac{5}{8}\pi r^2$. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{4r}{3};\ 2\ \text{sol.:}\ \frac{r}{2},\ \frac{5r}{6}\right]$

27. Nel trapezio ABCD, di base maggiore AD, il lato AB e la diagonale AC sono lunghi rispettivamente a e 2a. Inoltre, detto E il punto intersezione delle rette dei lati non paralleli, l'altezza del triangolo BCE, relativa a BC, è uguale a quella del trapezio ed è la metà del segmento CD. Calcolare l'area del solido generato dal trapezio quando ruota di un giro completo intorno alla sua base maggiore.

28. Un trapezio rettangolo, la cui base minore è congruente al lato obliquo, è circoscritto ad un semicerchio in modo che la sua base maggiore, lunga b, ne contenga il diametro. Per il vertice dell'angolo retto adiacente alla base maggiore si conduca la perpendicolare al piano del trapezio e, su di essa, si stacchi, a partire dal vertice suddetto, un segmento lungo $4b/3$. Considerata la piramide avente per altezza questo segmento e per base il trapezio, se ne calcoli l'area totale.

Volumi dei solidi e questioni varie.

29. Dimostrare che le basi di due prismi equivalenti sono inversamente proporzionali alle rispettive altezze.

30. In un prisma esagonale regolare di altezza h lo spigolo di base è lungo a. Condotti i tre piani passanti per uno spigolo laterale e per uno degli altri tre spigoli paralleli ad esso ma non contigui, calcolare i volumi dei quattro solidi in cui il prisma è diviso da questi piani.

31. Le sei piramidi, aventi per vertice il punto d'incontro delle diagonali di un parallelepipedo e per basi le sue facce, sono equivalenti: è vero o è falso?

32. Determinare il rapporto fra il volume di un cono circolare retto e quello del cilindro inscritto in esso e avente per base la sezione del cono col piano equidistante dal vertice e dalla base. [**R.** $8/3$]

33. Determinare il rapporto fra una sfera e il cono equilatero inscritto in essa. [**R.** $32/9$]

34. È vero o è falso che il volume di una sfera e quelli del cilindro e del cono equilatero circoscritti ad essa sono in progressione geometrica?

35. È vero o è falso che il volume di una sfera e quelli del cilindro equilatero e del cono equilatero inscritti in essa sono in progressione geometrica?

36. I triangoli ABC e ABD, rettangoli e isosceli sulla base AB, giacciono in piani perpendicolari. Sapendo che AB misura 2a, dove a è una lunghezza assegnata, calcolare la distanza del punto A dal piano dei punti B, C, D. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{2}{3}a\sqrt{3}\right]$

37. Considerato un tetraedro regolare, descrivere il poliedro avente per vertici i centri delle sue facce e calcolare il rapporto fra i volumi dei due solidi. [**R.** Tetraedro regolare; 27]

38. Considerato un cubo, descrivere il poliedro avente per vertici i centri delle sue facce e calcolare il rapporto fra i due solidi. [**R.** Ottaedro regolare; 6]

39. Un parallelepipedo rettangolo, la cui diagonale è lunga d, ha per base un quadrato di lato lungo $d/2$. Calcolare il suo volume. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{\sqrt{2}}{8}d^3\right]$

40. Un prisma ha per base un triangolo equilatero di lato lungo a. Determinare di quanto bisogna aumentare la lunghezza dello spigolo di base affinché il volume del prisma raddoppi .$\left[\mathbf{R.}\ a\left(\sqrt{2}-1\right)\right]$

41. La sezione di un prisma triangolare regolare con il piano contenente una mediana della base e perpendicolare alla base stessa è un quadrato di lato lungo a. Calcolare il volume del prisma. $\left[\mathbf{R.}\ a^3/\sqrt{3}\right]$

42. Una piramide retta ha per base un rombo di diagonali d e $d/2$. Sapendo che il suo apotema è lungo $2d$, calcolarne l'area totale e il volume.

43. Considerato un trapezio isoscele circoscritto ad una semicirconferenza, si sa che il rapporto tra il raggio della semicirconferenza e il lato obliquo del trapezio è $4/5$. Dimostrare che la base minore è uguale al lato obliquo. Sapendo poi che l'area della superficie del solido generato dal trapezio in una rotazione completa intorno alla base maggiore è $18\pi a^2$, essendo a una lunghezza assegnata, calcolare il volume di questo solido. [**R.** ...; $12\pi a^3$]

44. In un cilindro circolare retto, il cui volume è $\pi\sqrt{3}\,d^3$, dove d è una lunghezza assegnata, è inscritto un cono la cui base coincide con una base del cilindro e il cui vertice è il centro dell'altra base. Sapendo che si tratta di un cono equilatero, trovare a quale distanza dal suo vertice bisogna condurre un piano parallelo alla base affinché la sua superficie laterale resti divisa in due parti di uguale area. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{\sqrt{6}}{2}d\right]$

45. Considerata una piramide quadrangolare regolare, di volume $4a^3/3$, dove a è una lunghezza nota, si calcoli il volume del prisma retto inscritto in essa e avente per base la sezione della piramide con il piano equidistante dal vertice e dalla base. [**R.** $a^3/2$]

46. Una piramide retta, di vertice V e di altezza h, ha per base il triangolo equilatero ABC di area $h^2\sqrt{3}$. Calcolare la distanza del punto A dal piano VBC. [**R.** $3h/2$]

47. Calcolare il volume di una piramide triangolare regolare, sapendo che il volume del prisma retto inscritto in essa e avente per base la sezione della piramide con il piano equidistante dal vertice e dalla base è $9s^3/40$, essendo s una lunghezza assegnata. [**R.** $3s^3/5$]

48. Il volume di una piramide è uguale ad $a^2h/3$, essendo h l'altezza della piramide ed a una lunghezza assegnata. Un piano parallelo alla base divide l'altezza della piramide in due parti che, a partire dalla base stessa, sono direttamente proporzionali ai numeri 2 e 3. Calcolare i volumi delle due parti in cui viene divisa la piramide. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{9}{125}a^2h, \frac{98}{375}a^2h\right]$

49. Considerata una piramide di altezza nota h, determinare a quale distanza dal vertice bisogna condurre un piano parallelo alla base, affinché la piramide venga divisa in due parti equivalenti. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{h}{2}\sqrt[3]{4}\right]$

50. L'altezza h di una piramide è divisa da un piano parallelo alla base in due parti che, a partire dalla base stessa, sono direttamente proporzionali ai numeri 2 e 1. Sapendo che la sezione ha area s^2, essendo s una lunghezza assegnata, calcolare i volumi della piramide e delle due parti in cui essa resta divisa dal piano secante. $\left[\mathbf{R.}\ 3s^2h, \frac{1}{9}s^2h, \frac{26}{9}s^2h\right]$

51. Lo spigolo della base maggiore è lungo il doppio dello spigolo della base minore di un tronco di piramide quadrangolare regolare. Determinare il rapporto tra il minore ed il maggiore dei due tronchi in cui quello dato viene diviso da un piano equidistante dalle sue basi. [**R.** $19/37$]

52. Le basi di un tronco di piramide hanno aree a^2 e $2a^2$, dove a è una lunghezza assegnata, e l'altezza del tronco è h. Un piano parallelo alle basi divide l'altezza in due parti che, a partire dalla base minore, sono direttamente proporzionali ai numeri 1 e 2. Calcolare i volumi delle due parti in cui il tronco resta diviso dal piano sezione. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{20}{81}a^2h\left(3+\sqrt{2}\right), \frac{7}{81}a^2h\left(3+\sqrt{2}\right)\right]$

53. Un tronco di piramide quadrangolare regolare è circoscritto ad una sfera di raggio r. Sapendo che il suo volume è $\frac{728}{27}r^3$, calcolare le lunghezze dei suoi spigoli. $\left[\mathbf{R.}\ 6r, \frac{2}{3}r, \frac{2}{3}r\sqrt{41}\right]$

54. Sezionata una sfera di raggio assegnato r con un piano, si considerino i due coni aventi come base comune il cerchio sezione e come vertici gli estremi del diametro della sfera perpendicolare al piano secante. Sapendo che le aree laterali di questi coni stanno nel rapporto 3:4, calcolare i loro volumi. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{3456}{15625}\pi r^3, \frac{6144}{15625}\pi r^3\right]$

55. Le diagonali AC e BD del rombo ABCD stanno nel rapporto $4/3$. Condotta per il vertice A la perpendicolare al piano del rombo e staccato su di essa un segmento AV lungo $16a/5$, essendo a una lunghezza assegnata, si consideri la piramide avente come vertice V e come base il rombo ABCD e, sapendo che il suo volume è $\frac{384}{15}a^3$, se ne calcoli l'area laterale. $\left[\mathbf{R.}\ 8a^2\left(2+\sqrt{13}\right)\right]$

56. Dimostrare che, se un tronco di cono è circoscrivibile ad una sfera, esso è equivalente ad un cono avente base di area uguale all'area totale del tronco e altezza uguale al raggio della sfera inscritta.

57. Il rapporto fra i cateti di un triangolo rettangolo è $3/4$. Sapendo che il volume del solido generato dal triangolo quando ruota di un giro completo attorno al suo cateto minore è $16\pi a^3$, dove a è una lunghezza assegnata, calcolare l'area della superficie di questo solido. [**R.** $36\pi a^2$]

58. Un triangolo rettangolo, di ipotenusa a, ruotando di un giro completo attorno all'ipotenusa stessa, genera un solido di volume $\pi a^3/12$. Calcolare l'area della superficie di questo solido. $\left[\mathbf{R.}\ \pi a^2/\sqrt{2}\right]$

59. Un tronco di cono circolare retto è circoscritto ad una semisfera di raggio r. Sapendo che l'area totale del tronco è $4\pi r^2$, calcolare il suo volume. [**R.** $13\pi r^3/16$]

60. Si fanno compiere ad un rombo due rotazioni di mezzo giro, ognuna intorno a ciascuna delle due diagonali: è vero o è falso che il rapporto tra le aree delle superfici dei due solidi generati è uguale a quello dei loro volumi?

61. L'area laterale di un cono circolare retto circoscritto ad una sfera di raggio r è uguale a $6\pi r^2$. Calcolare il volume del cono. [**R.** 2 soluzioni: ...]

62. Il rapporto tra il raggio di base e l'altezza di un cono circolare retto è $4/3$ e il volume del cono è $16\pi a^3$. Calcolare il volume del cilindro circolare retto inscritto nel cono e avente area laterale uguale a $6\pi a^2$. [**R.** $6\pi a^3$]

63. Considerata una sfera di diametro AB, lungo 2r, determinare su AB un punto P tale che, condotto per esso il piano perpendicolare ad AB, il volume del cono avente il vertice in A e come base il cerchio sezione, sia il doppio del volume del cono avente la stessa base e il vertice in B. Dei due coni calcolare i volumi. [**R.** $AP=4r/3$; ...]

64. Il raggio di base di un cilindro circolare retto è r. Intersecando il cilindro con un piano parallelo al suo asse di simmetria, condotto ad una distanza $4r/5$ da esso, si ottiene una sezione di area $18r^2/5$. Calcolare il volume del cilindro. [**R.** $3\pi r^3$]

65. L'ipotenusa di un triangolo rettangolo è lunga $25a/8$, dove a è una lunghezza assegnata, e i cateti sono uno $3/4$ dell'altro. Calcolare il volume del solido generato dal triangolo in una rotazione completa intorno all'ipotenusa. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{75}{32}\pi a^3\right]$

66. La base maggiore, la base minore e il lato obliquo di un trapezio isoscele sono lunghi rispettivamente $30a$, $20a$, $13a$, dove a è una lunghezza assegnata. Calcolare il rapporto fra i volumi dei due solidi ottenuti facendo ruotare il trapezio di un giro completo dapprima intorno alla base minore e poi intorno alla base maggiore. Dire se tutti i dati forniti sono necessari per la risoluzione o se qualcuno di essi è superfluo. [**R.** $8/7$; uno è superfluo]

67. In una piramide triangolare regolare di altezza h, ciascuna faccia laterale forma un angolo di $60°$ col piano della base. Calcolare il volume e l'area totale della piramide. $\left[\mathbf{R.}\ h^3/\sqrt{3}, \ldots\right]$

68. Una piramide ha per base un quadrato e il piede della sua altezza coincide con uno dei vertici di base. Sapendo che il maggiore degli spigoli laterali forma un angolo di $60°$ col piano di base e sapendo che la piramide ha volume uguale a $\frac{8}{3}a^3\sqrt{6}$, calcolarne lo spigolo di base e l'altezza. $\left[\mathbf{R.}\ 2a,\ 2a\sqrt{6}\right]$

69. ® Nel prisma ABCA'B'C' le basi ABC ed A'B'C' sono due triangoli equilateri di lato s, gli spigoli laterali sono inclinati di $60°$ rispetto ai piani delle basi e gli spigoli laterali AA' e BB' sono perpendicolari allo spigolo di base AB. Sapendo che l'area del quadrilatero ABB'A' è $3s^2/2$, calcolare il volume del prisma. $[\mathbf{R.}\ 9s^3/16]$

70. Sono dati una semisfera di raggio r ed il cilindro ad essa circoscritto. Trovare a quale distanza dal cerchio massimo bisogna condurre un piano parallelo ad esso affinché la corona circolare individuata dai cerchi sezione del piano con la semisfera e col cilindro sia $1/4$ del cerchio massimo. Calcolare quindi i volumi delle due parti in cui la semisfera resta divisa dal piano suddetto. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{r}{2},\ \frac{23}{72}\pi r^3,\ \frac{25}{72}\pi r^3\right]$

71. Una piramide triangolare regolare ha volume uguale ad $a^3\sqrt{3}$, essendo a una lunghezza assegnata. Il piano, contenente uno spigolo laterale e condotto perpendicolarmente al piano della base, interseca la piramide secondo una sezione di area $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$. Calcolare l'altezza della piramide. Intersecata poi la piramide con un piano parallelo alla base, condotto ad una distanza $\frac{a}{5}$ da essa, e proiettato il triangolo sezione sulla base medesima, calcolare il volume del prisma retto ottenuto. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{a}{3},\ \frac{36}{125}a^3\sqrt{3}\right]$

72. Un rettangolo, ruotando di un giro completo una volta intorno ad un lato e una volta intorno ad uno degli altri due lati consecutivi, genera due cilindri, la somma dei cui volumi è tripla del volume della sfera di raggio a. Sapendo che il rettangolo ha perimetro 8a, calcolarne le dimensioni. $\left[\mathbf{R.}\ a\left(2\pm\sqrt{3}\right)\right]$

73. Dato il quadrato ABCD, di lato b, determinare a quale distanza da A bisogna prendere un punto P sul lato AB tale che sia uguale a $\frac{3+\sqrt{6}}{6}$ il rapporto fra i volumi dei due solidi ottenuti facendo ruotare di un giro completo il trapezio PBCD, una volta intorno ad AB ed un'altra intorno ad AD. $\left[\mathbf{R.}\ AP=b\left(3-\sqrt{6}\right)\right]$

74. Un cilindro equilatero è intersecato da un piano parallelo all'asse, condotto ad una distanza d da esso, secondo una figura di area $4d^2\sqrt{2}$. Calcolare il volume del cilindro. $\left[\mathbf{R.}\ 4\sqrt{2}\pi d^3\right]$

75. Del trapezio ABCD, rettangolo in A e in D, si conoscono le lunghezze dei lati AB, DC, AD, rispettivamente uguali a $\frac{9}{2}L,\ \frac{12}{5}L,\ \frac{14}{5}L$, dove L è una lunghezza assegnata. Indicata con E l'intersezione dei prolungamenti dei lati non paralleli, si calcoli il volume del solido che si ottiene facendo ruotare il triangolo DBE di un giro completo intorno alla retta BE. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{1152}{125}\pi L^3\right]$

76. Facendo compiere ad un rombo due rotazioni di mezzo giro, ognuna intorno a ciascuna delle due diagonali, si ottengono due solidi il rapporto dei cui volumi è $3/4$. Sapendo che il raggio del cerchio inscritto nel rombo è r, calcolare il volume del solido generato dal rombo medesimo quando ruota di un giro completo intorno ad uno dei suoi lati.

77. Dato il triangolo equilatero ABC, di lato 2a, essendo a una lunghezza assegnata, si determini internamente al lato BC un punto P in modo che la differenza tra il solido generato dal triangolo APB in una rotazione completa attorno alla retta BC e il solido generato dal triangolo APC nella stessa rotazione sia equivalente alla sfera di raggio uguale a quello della circonferenza inscritta nel triangolo ABC.

78. PROBLEMA RISOLTO. Considerato un triangolo ABC, acutangolo e isoscele sulla base BC, si dica D il piede della sua altezza condotta per C e si costruisca il triangolo ECD, isoscele sulla base CD e simile a quello dato, in modo che il punto E cada dalla stessa parte di A rispetto a BC.
Si dimostri che il quadrilatero ADCE è inscrivibile in un cerchio.
Posto che sia $BC=6a$ e $CD=24a/5$, si calcoli il volume del cono circolare retto che ha questo cerchio come base e un segmento lungo 4a come altezza.

RISOLUZIONE. Ci occupiamo solo della dimostrazione richiesta.

Affinché il quadrilatero ADCE sia inscritto in una circonferenza occorre che gli angoli opposti siano supplementari. Ora, essendo retto l'angolo $A\hat{D}C$, la dimostrazione è fatta se si dimostra che anche l'angolo $A\hat{E}C$ è retto (Fig. 16).

Constatiamo anzitutto che gli angoli $D\hat{A}C$ e $D\hat{C}A$ sono complementari.

Ora, dall'evidente similitudine dei triangoli AFD ed EFC si desume che AF:EF=FD:FC, per cui anche i triangoli AFE e DFC sono simili (per il 2° criterio). Ne consegue che gli angoli $A\hat{E}D$ e $D\hat{C}A$ sono uguali. D'altronde $D\hat{A}C=D\hat{E}C$. Quindi, come $D\hat{A}C$ è complementare di $D\hat{C}A$, allo stesso modo $D\hat{E}C$ è complementare di $A\hat{E}D$. Dunque $A\hat{E}C$ è retto. È quello che volevamo dimostrare.

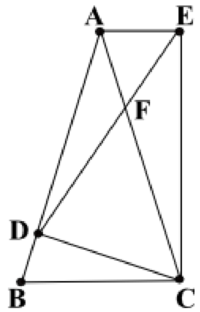

FIG. 16

79. Il perimetro del triangolo rettangolo ABC è 24a ed il cateto AB è lungo 6a, essendo a una lunghezza assegnata. Detto D il punto dell'ipotenusa BC tale che DC sia lungo 4a, condurre per D la perpendicolare a BC fino ad intersecare in E la retta AB. Calcolare il volume del solido generato dal quadrilatero AECD quando ruota di un giro completo intorno alla retta BC.

80. Una piramide ha per base un trapezio rettangolo. Calcolare il suo volume sapendo che la base maggiore e l'altezza del trapezio sono lunghe rispettivamente 4a e 3a, dove a è una lunghezza assegnata, e che l'altezza della piramide, la base minore del trapezio e il lato obliquo dello stesso sono congruenti.

81. Data una superficie sferica di raggio r, si considerino due cubi con le facce parallele, uno inscritto e l'altro circoscritto ad essa. Si calcolino:

1) i volumi dei solidi limitati dalla superficie sferica e da ciascuno dei due cubi;
2) lo spigolo del cubo equivalente al solido limitato dai due cubi;
3) la più piccola fra le distanze di un vertice di un cubo dai vertici dell'altro.

$$\left[\mathbf{R.}\ 1)\ \frac{2}{3}r^3\left(2\pi-3\sqrt{2}\right),\ \ \frac{4}{3}r^3(6-\pi);\ 2)\ r\sqrt[3]{8-2\sqrt{2}};\ 3)\ \frac{r}{2}\left(2\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)\right]$$

82. Considerata una sfera di diametro AB, lungo 2r, si dicano P e Q due punti interni ad AB tali che AQ = 2 AP. Condotti per P e Q i piani perpendicolari ad AB, siano Σ_P e Σ_Q le rispettive sezioni con la sfera. Si trovi la distanza PQ per la quale la somma dei volumi del cono di base Σ_P e vertice A e del cono di base Σ_Q e vertice B è 11/4 del volume del cono avente per base un cerchio massimo della sfera e altezza lunga quanto PQ. [**R.** r/2]

83. In un trapezio rettangolo le bisettrici degli angoli adiacenti al lato obliquo s'intersecano in un punto O del lato perpendicolare alle basi. Dimostrare che il triangolo avente per vertici questo punto O e gli estremi del lato obliquo è rettangolo e tale punto O è il punto medio del lato perpendicolare alle basi. Sapendo poi che le basi del trapezio sono lunghe 2a e 8a, dove a è una lunghezza assegnata, calcolare il volume del trono di cono generato dal trapezio in una rotazione completa intorno al lato perpendicolare alle basi.

Successivamente, dopo aver dimostrato che il tronco di cono ottenuto è circoscrivibile ad una sfera, calcolare il volume di essa.

[**R.** $224\pi a^3; 256\pi a^3/3$]

84. La base di una piramide di vertice V è il rettangolo ABCD, la cui diagonale è lunga 10 s, essendo s una lunghezza assegnata, ed i cui lati AB e AD stanno nel rapporto $3/4$. Inoltre il piede dell'altezza della piramide coincide col punto medio del segmento AB. Sapendo che l'area della faccia VCD è 51 s^2, calcolare il volume della piramide. [**R.** 240 s^3]

85. Un recipiente avente la forma di un cilindro circolare retto, di altezza doppia del diametro di base, è pieno d'acqua fino all'orlo. In esso è introdotta una sfera di metallo che affonda completamente aderendo esattamente alle pareti del cilindro. Questa sfera, avente una massa di 80 g, sostituendosi all'acqua che trabocca, fa aumentare di 70 g la massa del cilindro con il suo contenuto. Ricordando che la densità di un corpo è uguale al rapporto fra la sua massa ed il suo volume e che la densità dell'acqua è $1\ \mathrm{kg/dm^3}$, calcolare la densità del metallo di cui è fatta la sfera. [**R.** $8\ \mathrm{kg/dm^3}$]

86. Il triangolo ABC è rettangolo in A. Indicato con D il punto medio dell'ipotenusa e chiamato E il punto del cateto AC che, a partire da A, lo divide internamente in parti direttamente proporzionali ai numeri 5 e 16, si dica F il punto in cui la parallela ad AC condotta per D interseca la retta BE. Si calcoli il rapporto fra il volume del solido generato dal triangolo ABC in una rotazione completa intorno ad AC e il volume del solido generato dal quadrilatero CDFE nella medesima rotazione. [**R.** $21/8$]

87. In una piramide quadrangolare regolare si conduca un piano parallelo alla base e si proietti ortogonalmente il quadrato sezione sulla base stessa. Si calcoli il rapporto fra il volume della piramide e quello del parallelepipedo ottenuto con la costruzione suddetta, sapendo che il piano secante divide l'altezza della piramide in due parti, delle quali quella contenente il vertice è metà dell'altra [**R.** $9/2$]

88. Dimostrare che i volumi dei due solidi ottenuti facendo ruotare un triangolo una volta intorno ad un lato e una volta intorno ad un altro lato sono inversamente proporzionali alle lunghezze dei lati intorno a cui avvengono le due rotazioni.

89. Internamente ad un cilindro circolare retto di raggio r ed altezza 7r è situata una sfera avente il centro O in un punto dell'asse del cilindro e raggio r. Sapendo che il volume della sfera è medio proporzionale tra i volumi dei due solidi rotondi che, sommati alla sfera, danno il cilindro, trovare le distanze di O dalle basi del cilindro e trovare i volumi dei due solidi suddetti. $\left[\mathbf{R.}\ r, 6r; \frac{\pi r^3}{3}, \frac{16}{3}\pi r^3\right]$

90. Determinare i cateti di un triangolo rettangolo la cui ipotenusa ha lunghezza assegnata a, sapendo che il solido generato da esso in una rotazione completa intorno all'ipotenusa medesima ha volume $\pi a^3/16$. [**R.** $a/2,\ a\sqrt{3}/2$]

91. Calcolare il volume di un cono circolare retto circoscritto ad una sfera di raggio r, sapendo che il rapporto fra l'altezza del cono e il suo raggio di base è $\sqrt{3}$. [**R.** $3\pi r^3$]

92. Calcolare il volume di un cono circolare retto inscritto in una sfera di raggio r, sapendo che la somma dell'altezza del cono col suo raggio di base è $2r$. [**R.** $\pi r^3/3$]

93. Il raggio di base e l'altezza di un cono circolare retto sono direttamente proporzionali ai numeri 4 e 3 ed il volume del cono è $16\pi a^3$, essendo a una lunghezza assegnata. Calcolare il raggio di base e l'altezza del cilindro circolare retto inscritto nel cono e avente volume $6\pi a^3$.

$\left[\mathbf{R.}\ \ldots;\ 2\text{ soluzioni: } 2a, \frac{3}{2}a;\ a\left(1+\sqrt{5}\right), \frac{3}{4}a\left(3-\sqrt{5}\right)\right]$

94. Una piramide ha per base un triangolo ABC isoscele e rettangolo in A ed ha per altezza il segmento VA. Inoltre il piano della faccia VBC forma col piano della base un angolo di 45°. Secando la piramide con un piano parallelo alla base stessa, condotto ad una distanza d da questa, e proiettando il poligono sezione sulla base medesima, si ottiene un prisma retto avente volume d^3. Calcolare la distanza del punto A dal piano della faccia VBC. $\left[\mathbf{R.}\ d\sqrt{2}\right]$

95. ® Calcolare il volume di una piramide triangolare regolare, sapendo che il piano parallelo alla base, condotto ad una distanza $a/\sqrt{3}$ da essa, interseca la piramide secondo un triangolo di area $4a^2/\sqrt{3}$, essendo a una lunghezza assegnata; mentre il piano, contenente uno spigolo laterale e condotto perpendicolarmente alla base, interseca la piramide secondo un triangolo di area $3a^2\sqrt{3}/2$.
[**R.** 2 soluzioni: $3a^3$, $6a^3$]

96. L'ipotenusa di un triangolo rettangolo e l'altezza relativa ad essa sono lunghe rispettivamente $5a/4$ e $3a/5$, essendo a una lunghezza assegnata. Calcolare il volume del solido generato dal triangolo in una rotazione completa intorno all'ipotenusa. Successivamente, dopo aver dimostrato che il solido ottenuto è circoscrivibile ad una sfera, calcolare la distanza del centro di questa dagli estremi dell'ipotenusa del triangolo dato e il volume della sfera. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{3}{20}\pi a^3;\ \frac{5}{7}a,\ \frac{15}{28}a;\ \frac{36}{343}\pi a^3\right]$

97. Considerato il triangolo rettangolo ABC, isoscele sulla base BC, si prolunghi BC, dalla parte di C, di un segmento CD lungo quanto AC. Sapendo che l'area del triangolo ACD è $s^2/\sqrt{2}$, dove s è una lunghezza assegnata, calcolare il volume del solido generato dal triangolo ABD quando ruota di un giro completo intorno alla retta BD. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{\pi}{3}s^3\left(2+\sqrt{2}\right)\right]$

98. In una circonferenza di centro O sono date due corde perpendicolari, AB e CD, aventi in comune il punto E. Sapendo che:

$$\overline{AB}=\frac{20}{3}a,\ \ \overline{EC}=\frac{3}{2}a,\ \ \overline{ED}=\frac{13}{2}a,$$

dove a è una lunghezza assegnata, e sapendo che EA<EB, calcolare il volume del solido generato dal triangolo OEB quando ruota di un giro completo intorno alla retta CD. [**R.** $85\pi a^3/4$]

99. Una piramide OABC ha per base il triangolo OAB i cui lati OA ed OB hanno la stessa lunghezza $2a$ e l'angolo in O è ampio $120°$. Lo spigolo OC, lungo h, è perpendicolare alla base. Indicato con D il punto dello spigolo AC che ha la stessa distanza da OA e da OC, si determini questa distanza. Successivamente si sechi la piramide con il piano parallelo alla base OAB, condotto per D, e si trovi per quale valore di h la sezione ottenuta ha area $\frac{4}{9}a^2\sqrt{3}$. Si calcoli infine il volume del prisma che ha per basi questa sezione e la sua proiezione ortogonale su OAB.

100. Sia dato un triangolo isoscele ABC di base BC lunga $2a$ e angolo in A ampio $30°$. Tracciate le due rette perpendicolari fra loro, BO e CO, che s'incontrano in un punto O dell'altezza relativa a BC, si dica P il punto in cui la retta BO seca il lato AC e si calcoli il volume del solido generato dal triangolo PAB quando ruota di un giro completo intorno a BC.

101. ® Considerata una semicirconferenza K di diametro AB, centro O e raggio r, sia t la tangente ad essa in A. Detto C il punto di t tale che AC sia lungo $2r$, condurre per esso l'ulteriore tangente s a K e sia D il punto in cui s seca la perpendicolare ad AB in O. Detti, inoltre, M il punto di contatto di s con K ed H il piede della perpendicolare condotta da C ad OD, dopo aver dimostrato che il quadrilatero OMHC è un trapezio isoscele, calcolare il volume di una piramide che ha per base questo trapezio ed altezza lunga $2r$.

102. Nel triangolo ABC l'ipotenusa AC è lunga $25a$, essendo a una lunghezza data, ed il cateto AB è $4/3$ del cateto BC. Tracciata la circonferenza di diametro AB, si dica D l'ulteriore punto in cui la retta AC la interseca e si chiami E il punto simmetrico di D rispetto ad AB. Si calcoli quindi il volume del solido generato dal quadrilatero AEBC quando ruota di un giro completo intorno alla retta AC.

103. Un trapezio rettangolo è circoscritto ad un semicerchio di raggio r in modo che il lato perpendicolare alle basi coincida col diametro. Sapendo che il perimetro del trapezio è $26r/3$, si calcoli il volume del solido generato da esso quando ruota di un giro completo attorno alla retta del lato obliquo.

104. L'altezza AH del triangolo ABC, isoscele sulla base BC ed inscritto in un cerchio di raggio r e centro O, è lunga $8r/5$. Condotta per C la retta t tangente al cerchio e chiamate A' e B' le proiezioni ortogonali di A e B su t, risolvere le seguenti questioni:
1) dimostrare che il triangolo AHC è congruente al triangolo AA'C;
2) dimostrare che il triangolo OHC è simile al triangolo BB'C;
3) calcolare il volume del solido generato dal quadrilatero ABB'A' in una rotazione completa intorno alla retta t.

105. In un parallelepipedo rettangolo, il piano di due spigoli opposti seca il solido secondo un poligono di area $s^2/3$ e forma con il piano di una faccia un angolo di $60°$. Sapendo che il perimetro di questa faccia è $5s/3$, calcolare il volume del parallelepipedo. $\left[\textbf{R.}\ 2\ \text{sol.}: \frac{s^3\sqrt{3}}{12}, \frac{s^3\sqrt{3}}{18}\right]$

106. ® Un trapezio isoscele è circoscritto ad un cerchio. Determinare i lati del trapezio e il raggio del cerchio sapendo che il trapezio ha area $80a^2$, dove a è una lunghezza assegnata, e che è uguale a $21/8$ il rapporto fra il volume del tronco di cono e quello della sfera che si ottengono facendo ruotare rispettivamente il trapezio e il cerchio di mezzo giro intorno al diametro del cerchio perpendicolare alle basi del trapezio. [**R.** 4a, 16a, 10a, 10a, 4a]

107. PROBLEMA RISOLTO. Le diagonali AC e BD del rombo ABCD stanno nel rapporto $5{:}12$. Condotta per il vertice A la perpendicolare al piano del rombo e staccato su di essa un segmento AV lungo 16 h, dove h è una lunghezza assegnata, si consideri la piramide di base ABCD e di vertice V. Il piano contenente BD e perpendicolare al piano del rombo divide questa piramide in due solidi, il minore dei quali, S, ha volume $1352h^3/5$. Calcolare il volume della piramide VABCD e l'area della superficie del solido S.

RISOLUZIONE. È cruciale la costruzione della figura (Fig. 17). Bisogna al riguardo constatare che il piano, contenente BD e perpendicolare al piano del rombo, seca lo spigolo VC nel punto E avente come proiezione ortogonale sul piano del rombo il punto d'incontro H delle sue diagonali.

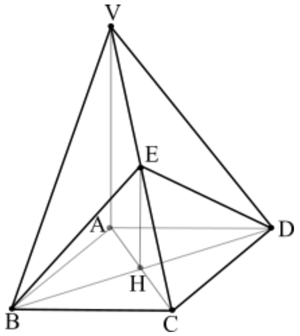

FIG. 17

Dopo aver constatato che $EH=\frac{1}{2}VA$ ed aver posto $\frac{\overline{AC}}{5}=\frac{\overline{BD}}{12}=x$, utilizzando il fatto che il volume della piramide di vertice E e base il triangolo BCD è $\frac{1352}{5}h^3$, si giunge alla banale equazione: $25x^2=169h^2$, da cui si ottiene:

$$x=\frac{13}{5}h\,.$$

Il resto – a parte i calcoli, che oggettivamente sono un po' noiosi – è del tutto elementare sul piano

concettuale.
Il volume della piramide VABCD e l'area della superficie del solido S sono rispettivamente:

$$\frac{5408}{5}h^3,\quad \frac{1976}{5}h^2.$$

108. Una piramide retta di vertice V ha per base il triangolo ABC rettangolo in A. L'altezza della faccia VBC, relativa la lato BC, divide questo lato in due parti, BD e DC, lunghi rispettivamente $4a$ e $6a$, essendo a una lunghezza assegnata. Si sa inoltre che il volume della piramide è $30a^3$. Calcolare il perimetro del triangolo di base e l'area totale della piramide. [**R.** $24a$; $75a^2$]

109. Nel triangolo isoscele ABC la base BC e l'altezza AH sono lunghe rispettivamente $3a$ e $2a$, essendo a una lunghezza assegnata. Indicato con D il piede dell'altezza del triangolo relativa al lato AB, si costruisca il triangolo ECD, isoscele sulla base CD e simile a quello dato, in modo che il punto E cada dalla stessa parte di A rispetto a BC. Dopo aver dimostrato che il quadrilatero ABCE è un trapezio rettangolo, si calcoli l'area della superficie e il volume del solido generato da esso quando ruota di un giro completo intorno alla retta AB. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{81}{5}\pi a^2, \frac{42}{5}\pi a^3\right]$

110. Il rapporto fra i due cateti di un triangolo rettangolo è $3/4$. Si consideri il solido T generato dal triangolo quando ruota di un giro completo intorno all'ipotenusa.

1. A) Dimostrare che T è inscrivibile in una sfera S e circoscrivibile ad una sfera S'.
2. A) Calcolare i rapporti fra i volumi di S e di T e fra i volumi di S e di S'.
   B) Calcolare il rapporto tra le aree delle superfici di S e di T e fra quelle di S e di S'.
3. A) Supposto che il volume di T sia $6\pi a^3/5$, trovare per quale valore di a la distanza dei centri delle due sfere misura 2,5 cm.

$$\left[\mathbf{R.}\ \ldots;2A)\ \frac{625}{288},\frac{42875}{13834};\ \ 2B)\ \frac{125}{84},\frac{1225}{576};\ \ 3A)\ a=14\text{ cm}\right]$$

111. Dato un cono circolare retto di raggio di base r e di altezza h, si consideri il cilindro ottenuto intersecandolo con un piano parallelo alla base e proiettando ortogonalmente la sezione ottenuta sulla base medesima. Stabilire quale relazione deve sussistere fra r ed h affinché il cilindro suddetto sia equilatero ed abbia area laterale uguale a $\pi rh/2$. Sotto le precedenti condizioni, calcolare per quale valore di r il volume del cono dato misura $9\pi/4$ cm³. [**R.** $h=2r$; $r=1{,}5$ cm]

112. Dato un quadrato ABCD, si dica P il punto del lato CD tale che sia k il rapporto fra il triangolo APD e il trapezio ABCP. Si calcoli per quale valore di k i due solidi generati dal triangolo e dal trapezio in una rotazione completa intorno ad AB sono equivalenti. In questo caso particolare si calcoli il rapporto fra le superfici dei due solidi medesimi. [**R.** $k=3/5$; $15/11$]

113. Un trapezio rettangolo, ruotando di un giro completo intorno alla base maggiore, genera un solido S' di volume V'; ruotando di un giro completo intorno alla base minore, genera un solido S" di volume V". Si sa che la somma delle basi del trapezio è uguale ad una lunghezza s assegnata e che V':V"= 3:4. Stabilire se i dati assegnati sono sufficienti per determinare:

a) le basi del trapezio;
b) l'area del trapezio;
c) il rapporto fra le aree delle superfici dei due solidi S' ed S".

114. La base minore, l'altezza e la base maggiore di un trapezio rettangolo misurano nell'ordine 2 cm, 4 cm, 5 cm. Stabilire se i dati assegnati sono indispensabili, sovrabbondanti, insufficienti o incompatibili ai fini della risoluzione delle seguenti questioni:

a) Calcolare il volume del solido S generato dal trapezio in un giro completo attorno al lato obliquo.
b) Calcolare l'area laterale di un cono circolare retto equivalente al solido S e avente per base il cer-

chio inscritto nel trapezio dato.

c) Calcolare il raggio della sfera inscritta nel solido S.

d) Calcolare il rapporto fra l'area del solido S' generato dal trapezio in una rotazione completa intorno alla base maggiore e quello del solido S" generato dal trapezio in una rotazione completa intorno alla base minore.

e) Calcolare il rapporto tra il volume di S' e quello di S".

115. La base minore e la base maggiore di un trapezio isoscele misurano rispettivamente 6 cm e 14 cm. Una retta r parallela alle base del trapezio divide la sua altezza in due parti che, a partire dalla base minore, sono direttamente proporzionali ai numeri 2 e 3. Stabilire se i dati assegnati sono indispensabili, sovrabbondanti, insufficienti o incompatibili ai fini della risoluzione delle seguenti questioni:

a) Calcolare il rapporto tra i volumi dei solidi S' ed S" descritti dalle due parti in cui il trapezio è diviso dalla retta r quando la figura ruota di mezzo giro intorno alla retta passante per i punti medi delle basi del trapezio.

b) Calcolare il rapporto tra le aree di S' ed S".

c) Calcolare il volume della sfera circoscritta al solido generato dal trapezio nella rotazione descritta sopra.

116. Un triangolo rettangolo genera un solido di volume $\pi\ 4^5\ \text{cm}^3$ quando ruota di un giro completo intorno ad uno dei due cateti ed un solido di volume $3\ \pi\ 4^4\ \text{cm}^3$ quando ruota intorno all'altro cateto. Delle seguenti alternative una sola è corretta. Individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

[A] L'area del triangolo è 96 cm^2.
[B] L'area del triangolo è 192 cm^2.
[C] L'area del triangolo è 288 cm^2.
[D] I dati non sono sufficienti per calcolare l'area del triangolo.

117. Di un trapezio si sa soltanto che la base maggiore è lunga il doppio della minore, ma ciò basta per calcolare il rapporto fra i volumi dei solidi generati da esso quando ruota di un giro completo dapprima intorno alla base maggiore e poi intorno alla minore. È vero o è falso? Fornire una spiegazione esauriente della risposta.

118. In un foglio rettangolare il lato maggiore è lungo il doppio del minore. Lo stesso foglio può essere considerato come lo sviluppo delle superfici laterali di due cilindri: uno avente per altezza il lato maggiore e l'altro avente per altezza il lato minore. Spiegare perché i due cilindri non hanno lo stesso volume e calcolare il rapporto di tali volumi.

119. Lo spigolo del cubo $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ (Fig. 18) è lungo 2 cm. Indicato con M un punto dello spigolo A_2A_6, fornire una costruzione dei due piani paralleli α, β contenenti uno la retta A_5M e l'altro la retta A_2A_3, e calcolare la loro distanza nei seguenti casi:

a) $A_2A_6 = 2\ A_2M$, b) $A_2A_6 = 3\ A_2M$, c) $A_2A_6 = \frac{4}{3}\ A_2M$.

$$\left[\textbf{R.}\ \ldots;\ \frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{4}{\sqrt{10}},\ \frac{2}{5}\right]$$

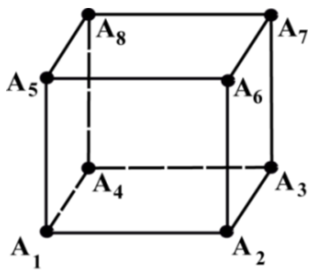

FIG. 18

120. Nella piramide quadrangolare di vertice V e base il quadrato ABCD, la sua altezza VA e lo spigolo AB della base misurano rispettivamente 6 m e $4\sqrt{2}$ m. Il piano contenente la retta BD e parallelo alla retta VA divide la piramide in due solidi. Di essi calcolare i volumi e le aree totali.

$\left[\mathbf{R.}\ \ 16\ \mathrm{m}^3,\ 48\ \mathrm{m}^3;\ 4\left(7+\sqrt{34}\right)\ \mathrm{m}^2,\ 4\left(7+6\sqrt{2}+\sqrt{34}\right)\ \mathrm{m}^2\right]$

121. Considerato un tetraedro regolare, è possibile recidere quattro tetraedri regolari uguali, uno per ogni vertice, in modo da ottenere un ottaedro regolare. a) Qual è il rapporto fra lo spigolo dei tetraedri recisi e quello del tetraedro assegnato? b) Calcolare il rapporto fra il volume dell'ottaedro e quello del tetraedro dato. [**R.** a) $1/2$; b) $1/2$]

122. In un astuccio cilindrico sono disposte, su tre pile, 30 monete da 2 euro, che aderiscono perfettamente sia tra di loro e sia alla parete dell'astuccio ed alle sue basi. Si sa che ogni moneta da 2 euro ha un diametro di 25,75 mm ed uno spessore di 2,20 mm. Qual è con approssimazione la capacità dell'astuccio? [**R.** ≈ 53 cm³]

123. ® La base maggiore di un trapezio è uguale ai $3/2$ della minore. La retta r che congiunge i punti medi dei lati obliqui divide il trapezio in due poligoni. Si considerino i solidi generati da tali poligoni in una rotazione completa intorno alla retta r.

a) Dimostrare che la retta r è parallela alle basi del trapezio e che la corda che il trapezio intercetta su di essa è uguale alla semisomma delle basi del trapezio stesso.

b) Calcolare il rapporto tra il volume del solido maggiore e quello del minore.

$\left[\mathbf{R.}\ \ \text{a)}\ \ldots;\ \text{b)}\ \frac{17}{13}\right]$

124. Nel triangolo rettangolo ABC l'ipotenusa AB misura 13 cm ed il cateto AC misura 5 cm. D è il punto in cui la bisettrice dell'angolo in A interseca il cateto BC.

1. A) Trovare le misure dei segmenti BD e DC.
   B) Calcolare le aree delle regioni piane in cui AD divide il triangolo.
2. A) Descrivere il solido generato dalla rotazione del triangolo ADB quando ruota di un giro completo intorno alla retta AB.
   B) Di tale solido calcolare il volume.
3. A) Spiegare perché il solido precedente è circoscrivibile ad una sfera.
   B) Di tale sfera calcolare la misura del raggio.

125. L'area del trapezio rettangolo ABCD è 240 cm² mentre la sua altezza AD misura 24 cm e la differenza delle sue basi AB e DC è 10 cm.

1. A) Calcolare le misure dei lati del trapezio.
   B) Spiegare perché il trapezio non è circoscrivibile ad un cerchio.
2. A) Descrivere il solido ottenuto facendo ruotare il trapezio di un giro completo intorno alla retta DC.
   B) Calcolare il volume e l'area di tale solido.

3. A) Determinare la corda FE del trapezio, parallela alle sue basi, in modo che il quadrilatero convesso ABEF sia circoscrivibile ad un cerchio.
   B) Trovare le misure delle due parti in cui il lato obliquo BE di questo trapezio è diviso dal punto in cui lo tocca il cerchio inscritto.

[**R.** ... ; 3A) 10 cm, 3B) 4 cm, 9 cm]

126. Un tronco di piramide regolare ha per basi due quadrati, uno di lati 12 cm e l'altro di lato 6 cm. La sua altezza misura 8 cm. Per i 4 spigoli della base minore del tronco si conducono altrettanti piani perpendicolari alle basi del tronco medesimo. Tali piani dividono il tronco di piramide in 9 solidi: un prisma quadrangolare regolare, 4 prismi triangolari uguali, 4 piramidi quadrangolari uguali.

a) Di ciascuno di questi 9 solidi calcolare il volume.
b) Verificare che la somma dei volumi dei 9 solidi è uguale al volume del tronco di piramide.

[**R.** a) $288\ \text{cm}^3, 72\ \text{cm}^3, 24\ \text{cm}^3$; b)...]

127. Un piano parallelo alla base di un cono circolare retto divide il cono in due parti equivalenti. Considerate le due parti in cui il piano divide l'altezza del cono, qual è il rapporto fra la parte minore e la maggiore? [**R.** $\sqrt[3]{2}-1$]

128. Un cono circolare retto, di volume $\frac{2048}{9}\pi\ \text{cm}^3$, è diviso da un piano α parallelo alla sua base in due parti, la minore delle quali è $\frac{1}{63}$ della maggiore.

1. A) Calcolare i volumi di tali parti.
   B) Considerate le due parti in cui l'altezza del cono è divisa dal piano α, calcolare il rapporto fra la parte minore e la maggiore.
2. Si ammetta che il tronco di cono individuato nel cono assegnato dal piano α sia circoscrivibile ad una sfera.
   A) Trovare le lunghezze dei raggi di base di tale tronco.
   B) Calcolare l'altezza del cono assegnato.

$\left[\textbf{R.}\ \ldots, 1B)\ \frac{1}{3};\ 2A)\ 2\ \text{cm}, 8\ \text{cm};\ 2B)\ \frac{32}{3}\ \text{cm}\right]$

129. Il cubo ABCDEFGH (Fig. 19) è intersecato dal piano α, passante per i vertici A, C, H, secondo un triangolo di area $2a^2\sqrt{3}$, essendo a una lunghezza assegnata.

1. A) Dimostrare che il triangolo sezione ACH è equilatero.
   B) Calcolare la lunghezza del lato del triangolo ACH.
2. A) Calcolare il volume della piramide avente per base il triangolo ACH e vertice in B.
   B) Calcolare la distanza del vertice B dal piano α.
3. A) Calcolare i volumi delle due parti in cui il cubo assegnato è diviso dal piano α.

$\left[\textbf{R.}\ \ldots, 1B)\ 2a\sqrt{2};\ ;\ 2A)\ \frac{4}{3}a^3, 2B)\ \frac{2}{3}a\sqrt{3}\ ;\ 3A)\ldots\right]$

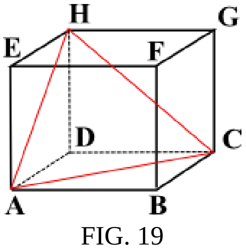

FIG. 19

130. Stabilire se sono commensurabili o incommensurabili il raggio della sfera inscritta e quello della sfera circoscritta: a) ad un esaedro regolare; b) ad un tetraedro regolare; c) ad un ottaedro regolare.

131. Un serbatoio di forma cilindrica è disposto in modo che le sue generatrici siano orizzontali (Fig. 20). Il raggio di base e l'altezza misurano rispettivamente 1 m e 3 m. Nel serbatoio è contenuto del gasolio ed un'asta graduata che pesca verticalmente in esso indica che la distanza della superficie libera del liquido dalla base di appoggio è 1,5 m. Quanti litri di gasolio sono contenuti nel serbatoio?

[**R.** ≈7582,2 litri]

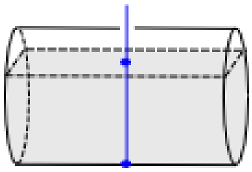

FIG. 20

132. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la regione finita R, delimitata dalla curva di equazione $y=2+|2-x|$ e dalla retta di equazione $y=4$. Calcolare il volume del solido generato da R in una rotazione completa intorno all'asse y. [**R.** 16π]

133. Sul pavimento di una stanza di forma rettangolare sono disposte alcune mattonelle uguali fra loro e simili al pavimento in modo da formare un rettangolo anch'esso simile al pavimento, ma lasciandone scoperta la maggior parte. Una dimensione del pavimento è $2/3$ dell'altra. Per ricoprire esattamente il pavimento occorrono altre 559 mattonelle uguali alle precedenti. Il lato minore di ogni mattonella misura 14 cm.

a) Quante mattonelle occorrono in totale per ricoprire esattamente il pavimento?

b) Sapendo che l'altezza della stanza è 2,75 m e che l'aria in essa contenuta ha una densità di 1,225 grammi per litro, calcolare il peso dell'aria contenuta nella stanza, espresso in chilogrammi e approssimato ad 1 kg.

[**R.** In base ad un'opportuna scelta delle incognite si ottiene l'equazione $x^2-y^2=13\cdot 43$ e da qui, tenendo presente che x, y sono numeri interi positivi, si trova … . a) 784; b) ≈ 77 kg ; un'altra soluzione è da scartare poiché non compatibile con la traccia]

134. Un secchio ha la forma di un tronco di cono circolare retto la cui base minore è la base d'appoggio del secchio. Il raggio della base maggiore, quello della base minore e l'altezza del secchio misurano nell'ordine 20 cm, 12 cm e 25 cm. Nel secchio è contenuta dell'acqua fino ad un livello di 15 cm dalla base di appoggio. Si introduce nel secchio un cilindretto equilatero di ferro e il livello dell'acqua aumenta di 2 mm. Trovare il raggio del cilindretto, approssimato ad 1 mm. È consentito l'uso di un idoneo software matematico. [**R.** ≈ 3,8 cm]

135. In un recipiente, avente la forma di un tronco di cono circolare retto, è contenuta dell'acqua fino ad un'altezza di 10 cm dalla base di appoggio. Dopo aver introdotto il recipiente in un apposito refrigerante, l'acqua passa allo stato di ghiaccio, aumentando il suo volume dell'8,7%. Si sa che la base minore del recipiente e la base maggiore hanno raggi interni rispettivamente di 8 cm e 10 cm, mentre l'altezza del recipiente è di 15 cm. Calcolare, con approssimazione a meno di 1 mm, a quale altezza dalla base di appoggio arriva il ghiaccio, esaminando il caso in cui la base d'appoggio sia la base minore. È consentito l'uso di un idoneo software matematico.

[**R.** Indicata con H l'altezza del blocco di ghiaccio, si giunge alla seguente equazione:

$H^3+180\ H^2+10.800\ H-138.049=0.$

Con un idoneo software matematico si ottiene: H ≈ 10,7 cm; …]

136. Una piramide, il cui volume è $8\ cm^3$, ha il vertice nel punto V e per base il triangolo ABC di area 6 cm^2.

a) Calcolare a quale distanza da V bisogna condurre un piano parallelo alla base ABC affinché la piramide risulti divisa in due parti equivalenti.

b) Sapendo che lo spigolo AB è lungo $2\sqrt{3}$ cm, l'area della faccia VAB è $8\ cm^2$ e il piede dell'altezza della piramide è interno alla base ABC, calcolare: 1) la distanza del vertice C dal piano della faccia VAB, 2) l'angolo che la faccia VAB forma con la base ABC.

c) Calcolare infine a quale distanza d dal piano della base ABC bisogna condurre un piano ad essa parallelo in modo che la sezione di tale piano con la piramide sia una base di un prisma avente altezza d e volume $3\ cm^3$.

$\left[\textbf{R.}\ \text{a) } 2\sqrt[3]{4}\ \text{cm};\ \text{b) } 3\ \text{cm}, 60°;\ \text{c) 2 sol.: } 2\ \text{cm}, 3-\sqrt{5}\ \text{cm}\right]$

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

DOMANDE.

1. È corretto affermare che l'area laterale di un cono circolare retto è uguale al prodotto della lunghezza della semicirconferenza di base per l'apotema?
2. È vero che l'area di una superficie sferica è 4 volte l'area di un suo cerchio massimo?
3. È vero che due solidi equivalenti hanno la stessa area totale?
4. È vero che il volume di un parallelepipedo rettangolo è dato dal prodotto delle sue tre dimensioni?
5. Le dimensioni di un parallelepipedo rettangolo sono tutte dimezzate: è vero che anche il volume del parallelepipedo risulta dimezzato?
6. È vero che il volume di un cilindro circolare retto è dato dal prodotto della sua area di base per l'altezza?
7. Qual è il volume di un cilindro equilatero la cui altezza è h? Quale la sua area totale?
8. Qual è il volume di un cono equilatero il cui apotema è a? Quale la sua area totale?
9. Posto che V sia il volume di un cono circolare retto, r il raggio della sua base ed h l'altezza, è vero che risulta: $r=\sqrt{\frac{\pi h}{3V}}$?
10. Un tetraedro regolare ha spigolo lungo il triplo di quello di un cubo. Quale dei due solidi ha volume maggiore?
11. È dato un triangolo rettangolo. Facendolo ruotare di un giro completo una volta intorno ad un cateto ed una volta intorno all'altro cateto si ottengono due solidi. È vero che il rapporto dei loro volumi è uguale al rapporto dei cateti che ruotano?
12. Possiedi un oggetto pesante di forma irregolare (ad esempio una statuetta di bronzo) e vuoi calcolare, con eccellente approssimazione, la misura dello spazio da esso occupato. Come pensi di procedere?

RISPOSTE.

1. Sì.
2. Sì.
3. No. Due solidi equivalenti hanno lo stesso volume.
4. Sì.

5. È falso. In realtà il volume del parallelepipedo diventa 8 volte più piccolo. In altri termini se il volume del parallelepipedo originario era V quello del nuovo parallelepipedo è $V/8$. Ciò si spiega facilmente. Basta constatare che, se le dimensioni del parallelepipedo sono a, b, c, il suo volume è $V=abc$, mentre il volume del parallelepipedo con le dimensioni dimezzate è:

$$V' = \frac{a}{2}\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{c}{2} = \frac{abc}{8} = \frac{V}{8}.$$

6. Sì.

7. Essendo $V=\pi r^2 h$ ed $r=h/2$, risulta: $V=\frac{1}{4}\pi h^3$. Inoltre: $A_t=2\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2+2\pi\frac{h}{2}\cdot h=\frac{3}{2}\pi h^2$.

8. Essendo $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$, $r=\frac{a}{2}$, $h=\frac{a}{2}\sqrt{3}$, risulta: $V=\frac{1}{24}\pi a^3\sqrt{3}$. Inoltre: $A_t=\pi ra+\pi r^2=\frac{3}{4}\pi a^2$.

9. No. Si capisce che la relazione è sbagliata anche senza conoscere quella corretta, dal momento che non sono soddisfatte le condizioni di omogeneità: il rapporto tra una lunghezza ed un volume non può essere il quadrato di una lunghezza, come dovrebbe invece essere. Ad ogni modo la relazione corretta è:

$$r=\sqrt{\frac{3\,V}{\pi\,h}}\ .$$

10. Se lo spigolo del cubo è lungo s, il suo volume è s^3, mentre il volume del tetraedro si trova che è $\frac{2}{3}s^3\sqrt{2}$. Siccome $2\sqrt{2}<3$, si deve concludere che il cubo ha volume maggiore.

11. Incominciamo ad indicare con a, b le lunghezze dei cateti del triangolo. Detto che i due solidi ottenuti dalla rotazione sono due coni, indichiamo con V_a il volume del cono ottenuto supponendo che sia a il cateto che ruota e con V_b quello del cono ottenuto supponendo che sia b il cateto che ruota. Si ha:

$$\frac{V_a}{V_b}=\frac{\frac{1}{3}\pi a^2 b}{\frac{1}{3}\pi b^2 a}=\frac{a}{b}.$$

La risposta all'interrogativo è affermativa.

12. Descriviamo una delle possibili modalità. Si riempie d'acqua fino ad un conveniente livello un'idonea vasca a forma di parallelepipedo rettangolo. Si immette l'oggetto nella vasca. Siccome affonda, l'oggetto è completamente coperto dall'acqua. Si misurano l'innalzamento del livello dell'acqua e le dimensioni della base della vasca; ammettiamo che siano nell'ordine: h, a, b. La misura dello spazio occupato dall'oggetto non è altro che il volume di un parallelepipedo rettangolo di dimensioni a, b, h. Tale misura è allora: $V=abh$.

Un'altra modalità consiste nel pesare l'oggetto, ma in questo caso bisognerebbe conoscere il suo peso specifico. Ebbene, posto che il peso dell'oggetto ed il suo peso specifico siano rispettivamente P e P_s, il volume dell'oggetto è: $V=P/P_s$.

COMPLEMENTI: MISURE DEI POLIEDRI REGOLARI [3]

Esistono formule apposite per il calcolo delle aree e dei volumi dei 5 poliedri regolari, espresse per mezzo delle lunghezze dei loro spigoli. Sono riportate nella tabella sottostante (Tab. 1).

[3] Questo paragrafo è opzionale.

Tab. 1 – Misure dei poliedri regolari in funzione delle lunghezze S degli spigoli

Grandezza Poliedro regolare	Area	Volume
Esaedro	$6\,S^2$	S^3
Tetraedro	$\sqrt{3}\ S^2 \approx 1{,}732\,S^2$	$\frac{\sqrt{2}}{12}\,S^3 \approx 0{,}118\,S^3$
Ottaedro	$2\sqrt{3}\ S^2 \approx 3{,}464\,S^2$	$\frac{\sqrt{2}}{3}\,S^3 \approx 0{,}471\,S^3$
Icosaedro	$5\sqrt{3}\ S^2 \approx 8{,}660\,S^2$	$\frac{5\left(3+\sqrt{5}\right)}{12}S^3 \approx 2{,}182\,S^3$
Dodecaedro	$3\sqrt{25+10\sqrt{5}}\ S^2 \approx 20{,}645\,S^2$	$\frac{15+7\sqrt{5}}{4}S^3 \approx 7{,}663\,S^3$

Ora, tralasciando quelle, banali, dell'esaedro regolare, le formule relative al tetraedro regolare ed all'ottaedro regolare possono essere ricavate da te, anche se con considerazioni non semplicissime. Per quanto riguarda il dodecaedro e l'ottaedro, il compito è ancora accessibile nel caso delle aree (che è lasciato pure a te) ma è molto complicato nel caso dei volumi, le cui formule pertanto non saranno dimostrate.

Dalla precedente tabella si nota che, per un'uguale lunghezza dello spigolo, indicati con A_k l'area del poliedro regolare di k facce e con V_k il suo volume, risulta:

$$A_4<A_8<A_6<A_{20}<A_{12}\,,\qquad V_4<V_8<V_6<V_{20}<V_{12}\,.$$

Concludiamo con alcune domande alle quali proverai a dare risposta, utilizzando, se proprio non trovi un altro modo, i dati riassunti nella tabella precedente:

1. Un tetraedro regolare ed un ottaedro regolare hanno uguale volume. Quale dei due solidi ha la maggiore area?
2. Un icosaedro regolare ed un dodecaedro regolare hanno uguale area. Quale dei due solidi ha il volume maggiore?
3. Un esaedro regolare ed un tetraedro regolare hanno uguale area. Qual è il rapporto (approssimato) dei loro spigoli?
4. Un ottaedro regolare ed un icosaedro regolare hanno uguale volume. Qual è il rapporto (approssimato) dei loro spigoli?