Prerequisiti:
- Nozioni di geometria piana e solida.
- Isometrie e similitudini nel piano.
- Nozioni di trigonometria piana.

L'unità è rivolta al 2° biennio del Liceo Artistico e, ma solo per il paragrafo 50.1, dell'Istituto Tecnico, settore Tecnologico, indirizzo Grafica e Comunicazione.

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità , gli allievi devono essere in grado di:

- *Descrivere le trasformazioni geometriche nello spazio e le loro proprietà invarianti*
- *definire una proiettività fra due piani*
- *dimostrare che il birapporto di quattro punti (allineati) si conserva in una proiettività*
- *spiegare quali proprietà si conservano in una proiettività e quali proprietà si perdono nel passaggio da un'affinità ad una proiettività;*
- *definire un piano proiettivo*
- *descrivere un'omologia piana e spiegare quali sono gli elementi che la individuano*
- *impiegare con proprietà i principi, i metodi e le convenzioni proprie della prospettiva, anche con l'uso di strumenti informatici*
- *esporre con proprietà l'evoluzione storica della prospettiva*

Proiettività e prospettiva

Unità 50

50.1 TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE NELLO SPAZIO

È possibile fare uno studio delle trasformazioni geometriche anche nello spazio e ci proponiamo di fornire qui alcune nozioni elementari, per cui ci limiteremo ad un'esposizione molto intuitiva e parziale dell'argomento.

Immagina allora di disporre di un piano di vetro trasparente, come quello di una finestra, e di uno schermo. Indichiamo con α il piano di vetro e con β quello dello schermo. Sul piano α sia poi disegnato un quadrato ABCD. Distinguiamo 4 situazioni.

♦ Supponiamo dapprima che i due piani α e β siano paralleli. Un fascio di luce, con raggi paralleli fra loro (ad esempio, come i raggi del Sole), intercettando lo specchio α, forma del quadrato ABCD un'immagine sullo schermo β, la quale è esattamente il quadrato A'B'C'D' uguale ad ABCD (Fig. 1).
È definita una funzione biiettiva del piano α nel piano β: è quella che ad ogni punto P di α associa il punto P' di β tali che il vettore $\overrightarrow{PP'}$ è uguale al vettore $\overrightarrow{AA'}$. Questa funzione non è altro che una trasformazione geometrica nello spazio. Si chiama **isometria** e come l'isometria nel piano conserva: a) l'allineamento dei punti, b) la distanza dei punti, c) l'ampiezza degli angoli, d) il parallelismo delle rette.

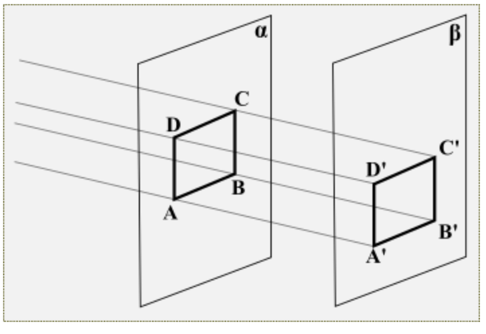

FIG. 1

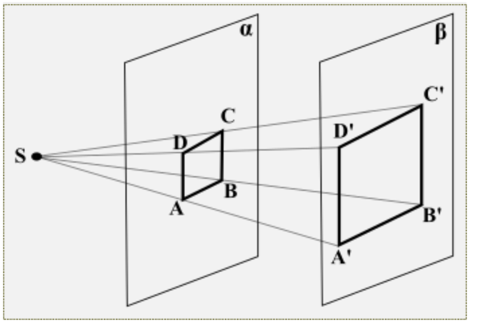

FIG. 2

♦ Supponiamo ancora α e β paralleli ma questa volta il fascio di luce provenga da una sorgente puntiforme S, situata da parte opposta di β rispetto ad α, ragion per cui i raggi non sono più paralleli fra loro. Ebbene, il quadrato ABCD è ancora proiettato in un quadrato A'B'C'D', il quale però non è più uguale al primo (Fig. 2).
Anche adesso c'è una trasformazione geometrica nello spazio che però non conserva la distanza dei punti (conserva tuttavia il rapporto delle lunghezze corrispondenti). Si chiama **similitudine** e come la similitudine nel piano conserva: a) l'allineamento dei punti, b) l'ampiezza degli angoli, c) il parallelismo delle rette.

♦ Supponiamo adesso che i piani α e β siano incidenti, anzi perpendicolari (ma solo per comodità). Nel caso del fascio di raggi paralleli fra loro, il quadrato ABCD è trasformato nel parallelogramma A'B'C'D' (Fig. 3).
La trasformazione in questione si chiama **affinità** e conserva: a) l'allineamento dei punti, b) il parallelismo delle rette. Perde invece l'ampiezza degli angoli e non si conserva la distanza dei punti.

Prima di proseguire ti proponiamo di descrivere, attraverso il disegno, in quale figura è trasformato un cerchio contenuto nel piano α quando è proiettato su β mediante raggi paralleli, la cui direzione forma un angolo di 45° sia con il piano α sia con il piano β.

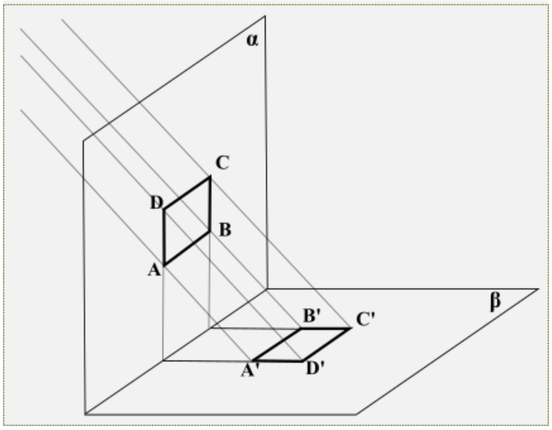

FIG. 3

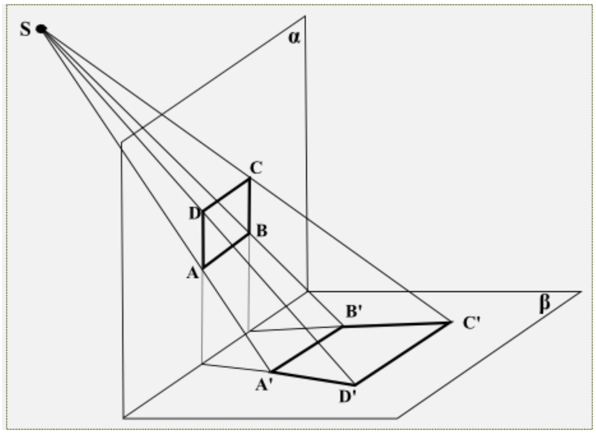

FIG. 4

♦ Un altro caso si ha quando i due piani α e β sono incidenti (in particolare perpendicolari) ed il fascio di luce proviene da una sorgente puntiforme S (Fig. 4).
In questo caso il quadrato ABCD è trasformato nel quadrilatero A'B'C'D'. Questa trasformazione si chiama **proiettività** fra i due piani α e β. In essa si conserva l'allineamento dei punti, ma si perde il parallelismo delle rette. Non si conserva l'ampiezza degli angoli né la distanza dei punti.

ESERCIZI.

1. Sono dati due piani, α verticale e β orizzontale, e sia u la retta comune ad esse. Sia fissata inoltre una direzione non parallela ad alcuno dei due piani. Nel piano β è tracciato un triangolo rettangolo in modo che un cateto sia parallelo alla retta u. Proiettare il triangolo sul piano α secondo la direzione assegnata.
2. Sono dati due piani, α verticale e β orizzontale, e sia u la retta comune ad esse. Sia fissato inoltre un punto S non appartenente ad alcuno dei due piani. Nel piano β è tracciato un triangolo rettangolo in modo che un cateto sia parallelo alla retta u. Proiettare il triangolo da S sul piano α.

50.2 PROIETTIVITÀ E BIRAPPORTO

50.2.1 Nella proiettività fra due piani c'è un altro invariante, ma per comprendere di cosa si tratti abbiamo bisogno di un nuovo concetto, il concetto di *birapporto* di quattro punti (allineati). Siano allora A,B,C,D quattro punti scelti arbitrariamente su una retta r. Consideriamo le lunghezze dei segmenti orientati (A,C), (B,C), (A,D), (B,D), che per comodità indichiamo semplicemente con le scritture AC, BC, AD, BD. Ebbene il numero reale che esprime il rapporto fra il rapporto AC/BC ed il rapporto AD/BD si chiama **birapporto** dei quattro punti A,B,C,D e si indica con la scrittura (ABCD). Dunque:

$$(\mathrm{ABCD}) = \frac{\mathrm{AC}/\mathrm{BC}}{\mathrm{AD}/\mathrm{BD}}.$$

Prima di procedere ti proponiamo alcuni esercizi su questo argomento.

1. Su una retta cartesiana (O,U) sono fissati i punti $A(-2)$, $B(1)$, $C(2)$, $D(4)$. Calcola il valore del birapporto (ABCD). [**R.** 2]
2. Ripeti l'esercizio precedente con questi nuovi punti: $A(0)$, $B(3)$, $C(2)$, $D(5)$. [**R.** $-4/5$]

3. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la retta di equazione $y=2x+1$. Una volta presi su di essa i punti A, B, C, D, di ascisse rispettivamente $-1, 0, -2, 4$, siano A',B',C',D' le loro rispettive proiezioni sull'asse x e A",B",C",D" quelle sull'asse y. Verificare che risulta: (A,B,C,D)=(A',B',C',D')=(A",B",C",D").
4. Ripeti l'esercizio precedente con la stessa retta ma con questi nuovi punti: A, B, C, D, di ascisse rispettivamente $1, -1, 3, 0$.
5. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnati il punto $S(2{,}3)$ e la retta a di equazione $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$. Presi sull'asse x i punti A, B, C, D di ascisse rispettivamente 1, 2, 4, 5, indica con A', B', C', D' i punti in cui la retta a interseca nell'ordine le rette SA, SB, SC, SD. Verifica che i birapporti (ABCD) e (A'B'C'D') sono uguali.
6. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le rette r ed r', di equazioni rispettivamente $y=-2x+2$ e $y=-\frac{3}{4}x+3$. Le rette a, b, c, d, di coefficienti angolari rispettivamente $1, 0, \frac{1}{2}, 2$, condotte per O, secano nell'ordine la retta r nei punti A, B, C, D e la retta r' nei punti A', B', C', D'. Verificare che (ABCD) = (A'B'C'D').
7. Su una retta cartesiana (O,U) sono assegnati i punti $A(1)$, $B(x)$, $C(2)$, $D(3)$. Calcolare il birapporto (ABCD) e provare a stabilire a quali valori esso si avvicina quando B si avvicina "infinitamente" a C e quando B si avvicina "infinitamente" a D.

$$\left[\textbf{R.}\ \frac{3-x}{2(2-x)},\ \ \pm\infty \text{ per } B\to C,\ \ 0 \text{ per } B\to D\right]$$

50.2.2 Vale il seguente teorema, che generalizza il fatto insito nei precedenti esercizi n. 5 e n. 6.

♦ TEOREMA. In una proiettività fra due piani, eseguita da un centro S, il birapporto (ABCD) di quattro punti A,B,C,D (allineati) scelti su uno di essi è uguale al birapporto (A'B'C'D') dei punti corrispondenti A',B',C',D' dell'altro piano. Vale a dire: (ABCD)=(A'B'C'D').

DIMOSTRAZIONE. Siano α e β due piani incidenti e sia S un punto esterno ad entrambi. Su una retta r contenuta nel piano α si prendono quattro punti qualsiasi A,B,C,D, e si proiettano da S sul piano β. Si ottengono i punti A',B',C',D', ovviamente allineati, dal momento che la trasformazione conserva l'allineamento dei punti: sia r' la loro retta.

Incominciamo a ragionare sulla figura formata dal punto S e dalla retta r con i suoi punti A,B,C,D (Fig. 5). In virtù del teorema dei seni applicato in successione ai triangoli SAC, SBC, SAD, SBD, si ha nell'ordine:

$$\frac{AC}{SC}=\frac{\sin A\hat{S}C}{\sin S\hat{A}C},\quad \frac{BC}{SC}=\frac{\sin B\hat{S}C}{\sin S\hat{B}C},\quad \frac{AD}{SD}=\frac{\sin A\hat{S}D}{\sin S\hat{A}D},\quad \frac{BD}{SD}=\frac{\sin B\hat{S}D}{\sin S\hat{B}D}.$$

Si effettua il rapporto membro a membro dapprima fra le uguaglianze prima e seconda e poi fra la terza e la quarta. Si ottengono le due uguaglianze seguenti:

$$\frac{AC/SC}{BC/SC}=\frac{\sin A\hat{S}C/\sin S\hat{A}C}{\sin S\hat{A}C/\sin S\hat{A}C},\qquad \frac{AD/SD}{BD/SD}=\frac{\sin A\hat{S}D/\sin S\hat{A}D}{\sin B\hat{S}D/\sin S\hat{B}D}.$$

Si effettua di nuovo il rapporto membro a membro fra queste due uguaglianze e si semplifica tenendo presente che $S\hat{A}C=S\hat{A}D$ e $S\hat{B}C=S\hat{B}D$. Si ottiene la seguente uguaglianza:

$$\frac{AC/BC}{AD/BD}=\frac{\sin A\hat{S}C/\sin B\hat{S}C}{\sin A\hat{S}D/\sin B\hat{S}D}.$$

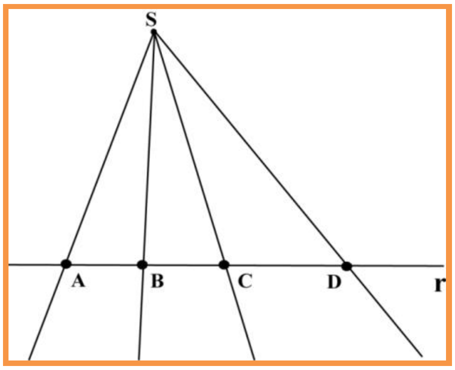

FIG. 5

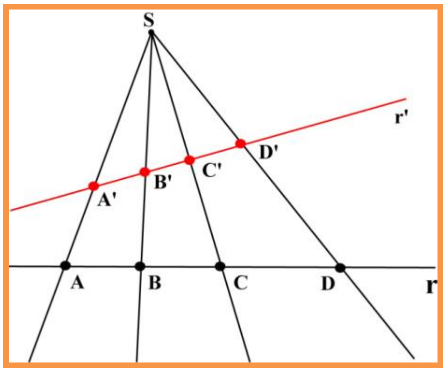

FIG. 6

Si comprende che, se le rette SA, SB, SC, SD intersecano il piano β nei punti A',B',C',D', situati sulla retta r' corrispondente di r nella proiettività in questione (Fig. 6), il rapporto:

$$\frac{A'C'/B'C'}{A'D'/B'D'}$$

è ancora uguale al rapporto

$$\frac{\sin A\hat{S}C/\sin B\hat{S}C}{\sin A\hat{S}D/\sin B\hat{S}D}$$

per cui, in definitiva:

$$\frac{AC/BC}{AD/BD}=\frac{A'C'/B'C'}{A'D'/B'D'}$$

vale a dire: (ABCD)=(A'B'C'D'). [c.v.d.]

50.3 IL PIANO PROIETTIVO

50.3.1 Nella proiettività fra due piani abbiamo supposto il centro S della proiezione in posizione generica, per cui non ci siamo potuti render conto di cosa succede in situazioni particolari, come ad esempio nei casi in cui il piano dei punti S,A,B è parallelo al piano β dello schermo. In questo caso, infatti, i raggi SA ed SB non intercettano β e pertanto la proiezione del quadrato ABCD, condotta da S su tale piano, non è più un quadrilatero. Di nuovo, per capire bene cosa succede, hai bisogno di ampliare le tue conoscenze.

Per questo, invece di ragionare sui piani α e β, conviene ragionare sulle rette a e b, ottenute intersecando i due piani con un piano perpendicolare alla loro retta comune (Fig. 7). Preso un punto S, esterno ai due piani (e quindi anche alle due rette), e considerato un punto A della retta a, la retta SA intercetta la retta b nel punto A'; così pure la retta SB intercetta b in B'. Ma la retta SP, parallela alla retta b, non interseca questa retta in alcun punto, per cui al punto P della retta a non corrisponde alcun punto della retta b. Ugualmente il punto Q' della retta b, tale che SQ' è parallela alla retta a non è il corrispondente di alcun punto di questa retta. Tali punti P e Q' sono chiamati solitamente ***punti limite*** o ***punti di fuga***.

Ora, al fine di eliminare queste fastidiose eccezioni, i matematici si sono inventati una cosa che può apparire cervellotica a prima vista. Constatato che le rette parallele b ed SP hanno la stessa direzione, hanno convenuto col dire che ogni direzione individua un *punto improprio* (o *punto all'infinito*) ed è individuata da esso. Ragion per cui *anche due rette parallele hanno in comune un punto*, non nel senso tradizionale però, ma un punto all’infinito. Abbiamo indicato con P'_{∞} (si legge: “P’ infinito”) il punto all’infinito della retta b e con Q_{∞} (si legge: “Q infinito”) il punto all’infinito della retta a. Per questo motivo possiamo dire che al punto limite P della retta a corrisponde il punto all’infinito P'_{∞} della retta b ed il punto limite Q’ della retta b è il corrispondente del punto all’infinito Q_{∞} della retta a.

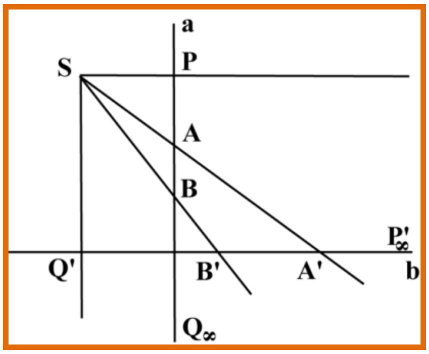

FIG. 7

S’intende che un piano ha tanti punti impropri quante sono le sue direzioni. I matematici hanno pure fatto la convenzione che tali punti impropri si trovassero tutti su una retta e l’hanno chiamata *retta impropria* (o *retta all’infinito*).
Il piano, ampliato con i *punti impropri* e la retta che li contiene (*retta impropria*), prende il nome di **piano proiettivo**.

50.3.2 A questo punto, hai tutto ciò che ti serve per capire in quali figure il quadrato ABCD del piano α dello specchio è proiettato dal punto S sul piano β dello schermo, sempre nell’ipotesi che i due piani siano perpendicolari, nei seguenti casi:

a) il piano SAB è parallelo al piano β; b) il piano SCD è parallelo al piano β.

Noi ti lasciamo per esercizio lo studio della prima situazione, mentre ti forniamo il disegno relativo alla seconda (Fig. 8). Da tale disegno intuisci che la figura trasformata del quadrato ABCD è un quadrilatero strano: ha infatti come lati il segmento A’B’, le semirette $A'D'_{\infty}$ e $B'C'_{\infty}$ e la retta impropria $C'_{\infty}D'_{\infty}$.

ESERCIZI.

1. Sono dati due piani, α verticale e β orizzontale, e sia u la retta comune ad esse. Sia fissato inoltre un punto S non appartenente ad alcuno dei due piani. Nel piano α è tracciato il triangolo ABC, rettangolo in A, in modo che il cateto AB sia parallelo alla retta u ed in modo, inoltre, che la retta SA sia perpendicolare al piano α. Proiettare il triangolo da S sul piano β.
2. Sono dati due piani, α verticale e β orizzontale, e sia u la retta comune ad esse. Sia fissato inoltre un punto S non appartenente ad alcuno dei due piani. Nel piano α è tracciato il triangolo ABC, isoscele sulla base BC, in modo che questa base sia contenuta nella retta u ed in modo che la retta SA sia perpendicolare al piano α. Proiettare il triangolo sul piano β.

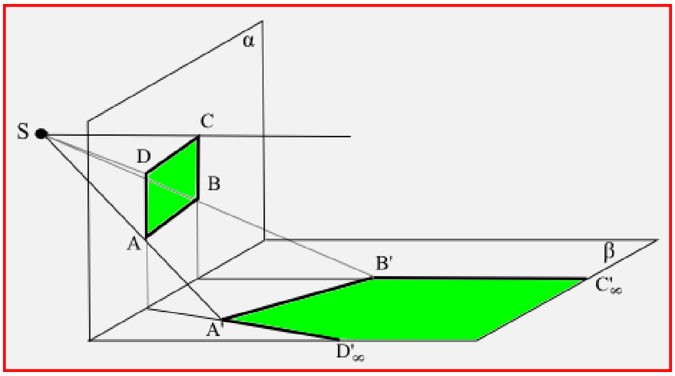

FIG. 8

50.4 LA PROIETTIVITÀ OMOLOGICA

50.4.1 È facile passare dalla proiettività fra due piani distinti a quella in un piano. Basta fissare nel piano:

a) una retta u, assumendola come retta unita luogo di punti uniti (non è altro che la retta comune ai due piani quando si considera la proiettività fra di essi),
b) un punto fisso S al di fuori della retta u,
c) una coppia di punti corrispondenti P, P'.

Allora per costruire il corrispondente di un punto A del piano, esso pure ovviamente al di fuori della retta u (ché altrimenti corrisponderebbe a se stesso), è sufficiente tener presenti le due proprietà che si conservano in una proiettività: a) l'allineamento dei punti, b) il birapporto di quattro punti allineati.

Si traccia perciò la retta PA, la quale interseca la retta unita u nel punto unito U. Il punto A', corrispondente di A, è l'intersezione delle rette SA e UP' (Fig. 9).

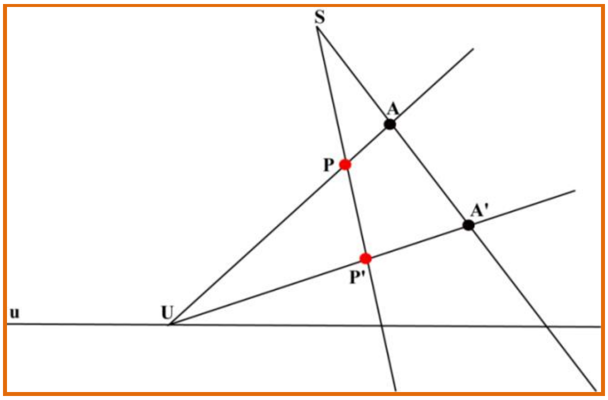

FIG. 9

La proiettività nel piano si chiama più propriamente **proiettività omologica** (o **omologia proiettiva** o semplicemente **omologia piana**). Il punto S e la retta u si chiamano rispettivamente *centro* e *asse* dell'omologia.

Ti proponiamo per esercizio di dimostrare i seguenti teoremi.

♦ TEOREMA 1. Un'omologia proiettiva è determinata da una retta u, assunta come asse dell'omologia, e da due coppie di punti corrispondenti (P,P') e (Q,Q').

♦ TEOREMA 2. Un'omologia proiettiva è determinata da una retta u, assunta come asse dell'omologia, da un punto fisso S, assunto come centro dell'omologia, e da due rette corrispondenti, che ovviamente s'intersecano in un punto di u.

In entrambi i casi, costruisci il corrispondente A' di un assegnato punto A.

50.4.2 Concludiamo questo argomento con alcune riflessioni sulle coniche.
Supponiamo allora assegnata un'omologia proiettiva mediante il suo centro S, l'asse u ed una coppia di punti corrispondenti P, P'. Supponiamo inoltre assegnata nel piano una circonferenza. La curva che corrisponde ad essa può essere un'ellisse, una parabola o un'iperbole a seconda della posizione di S rispetto alla circonferenza.
Se il centro S dell'omologia è esterno alla circonferenza e nessuna delle rette tangenti ad essa condotte per S è parallela ad u, la proiezione omologica della circonferenza è un'ellisse. La costruzione è riportata, ancorché parzialmente, nella figura sottostante (Fig. 10).
Se il centro S è esterno alla circonferenza, ma una delle due tangenti condotte per esso alla circonferenza medesima è parallela all'asse u, la proiezione omologica della circonferenza è una parabola.
Se, infine, il centro S è interno alla circonferenza la sua proiezione omologica è un'iperbole.

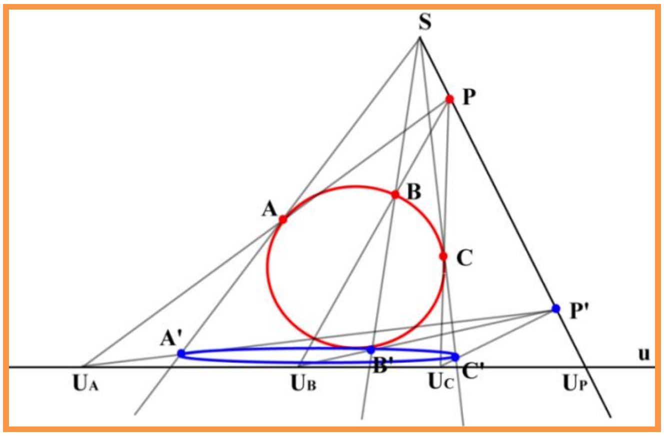

FIG. 10

ESERCIZI.
1. Fissata una generica omologia (piana), disegnare la figura trasformata in base ad essa di un quadrato avente un lato sull'asse dell'omologia.
2. Fissata una generica omologia (piana), disegnare la figura trasformata in base ad essa di un triangolo rettangolo avente l'ipotenusa parallela all'asse dell'omologia.
3. Fissata una generica omologia (piana), disegnare la figura trasformata in base ad essa di un cerchio tangente all'asse dell'omologia.

50.5 LA PROSPETTIVA

50.5.1 La proiettività omologica è alla base della *prospettiva*.
La **prospettiva** è una rappresentazione degli oggetti che presenta un pregio e un difetto. Il pregio consiste nel fatto che essa fornisce degli oggetti una visione molto somigliante a quella reale. Il difetto è determinato dall'oggettiva difficoltà di risalire dal disegno alle dimensioni effettive dell'oggetto.

Ciò implica, come conseguenza, che la prospettiva è un eccellente metodo di rappresentazione nel campo delle arti figurative; si presta invece poco e male per scopi tecnici.
Solitamente, specie in campo artistico, si distingue fra ***prospettiva lineare*** e ***prospettiva aerea***. La prima si sofferma sulle regole geometriche che ne sono alla base e permettono di giungere al disegno. La seconda si occupa degli artifici cui si può ricorrere, con l'appropriato uso dei colori e delle sfumature, per rendere la spazialità dell'immagine nel migliore dei modi possibili.
Noi faremo un cenno solo alla "prospettiva lineare", che chiameremo semplicemente "prospettiva".
Occupiamoci allora di alcune delle regole che stanno alla base della prospettiva.
Per prima cosa si stabilisce che l'occhio P dell'osservatore e l'oggetto da rappresentare siano da parti opposte rispetto al piano α del disegno o quadro, supposto in posizione verticale.
Il punto P è chiamato ***centro di vista*** (o ***punto di vista***). È importante poter identificare la sua posizione e l'operazione avviene nel modo seguente (Fig. 11):

a) si traccia il punto Q, piede della perpendicolare condotta per P al piano α: il punto Q si chiama ***punto principale*** (o ***punto di fuga***);
b) considerata la retta t (detta ***linea di terra***) in cui il quadro α interseca il piano orizzontale β (detto ***geometrale*** o ***piano stazione***), si traccia per Q la retta r parallela a t: la retta r è chiamata ***linea di fuga*** (o ***linea d'orizzonte*** o semplicemente ***orizzonte***);
c) si fissano, sulla linea di fuga, da parte opposta rispetto a Q, i punti U e V in modo che le loro distante da Q siano uguali alla distanza h di P da α: questa distanza è detta ***distanza principale*** mentre i punti U, V sono chiamati ***punti di distanza***.

Si capisce che – una volta che sono stati fissati sul quadro il punto Q ed uno dei punti U, V – è facile risalire al punto P.

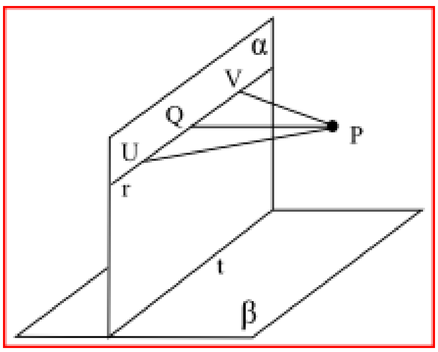

FIG. 11

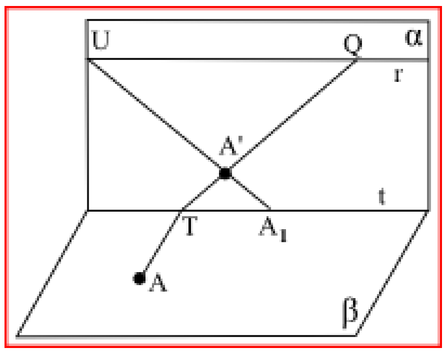

FIG. 12

50.5.2 Descriviamo adesso "come" si costruisce la prospettiva di un punto A.
Siano fissati anzitutto il quadro α e il geometrale β e sia t la loro intersezione; sia inoltre r la linea di fuga, cioè la parallela alla linea di terra, condotta per il punto principale Q, e sia ancora fissato uno dei punti di distanza, per esempio U (Fig. 12). Sia infine A il punto, appartenente a β, di cui si vuole costruire la rappresentazione prospettica. Ecco come si procede:

a) si traccia il piede T della perpendicolare alla linea di terra t, condotta per A;
b) si prende, a destra di T, il punto A_1 tale che la sua distanza da T sia uguale alla distanza di A dal quadro, vale a dire uguale alla misura di AT;
c) il punto A', prospettiva del punto A, è l'intersezione sei segmenti TQ e UA_1.

Questa costruzione, ripetuta tutte le volte che occorre, permette di ottenere la prospettiva di un qualunque oggetto contenuto nel piano β.

A tale riguardo, ti proponiamo per esercizio di costruire la prospettiva di una retta, contenuta nel piano stazione, considerando i casi che sia parallela alla linea di terra oppure perpendicolare ad essa oppure, infine, obliqua.

È suggestiva la costruzione della prospettiva di un piano pavimentato a quadretti.
A tal fine supponiamo di avere un piano verticale α (il "quadro") nel quale si vuole rappresentare una serie di quadrati congruenti (si pensi ad una superficie pavimentata con mattonelle quadrate uguali) situati in un piano orizzontale β, così come sono percepiti da un certo punto P (il "centro di vista"), situato da parte opposta del quadro rispetto al pavimento.
Nel "quadro" (Fig. 13) riportiamo la retta RS, intersezione dei due piani α e β e il punto Q, piede della perpendicolare condotta da P al "quadro" α (il "punto di fuga"). Conduciamo quindi, per Q, la parallela alla retta RS (la "linea di fuga") e prendiamo su di essa i punti U e V, simmetrici l'uno dell'altro rispetto al punto Q.
Indicato, quindi, con H il punto in cui il piano verticale contenente la retta PQ interseca la retta RS, riportiamo, a partire da H, nei due versi sulla retta RS, i segmenti HA, AB, BC, …, HA', A'B', B'C', … congruenti fra loro.
Tracciamo quindi i segmenti congiungenti il punto U (ma lo stesso si poteva fare col punto V) con in punti H, A, A', B, B', C, C', … . Questi segmenti intersecano, per esempio il segmento QC, in una serie di punti: da questi punti conduciamo la parallela alla retta RS. Si viene a formare un insieme di trapezi, i quali altro non sono che le prospettive della serie di quadrati disposti nel piano orizzontale, che in figura non è rappresentato.
Naturalmente in questa costruzione bisogna tener conto opportunamente delle distanze e lunghezze coinvolte.

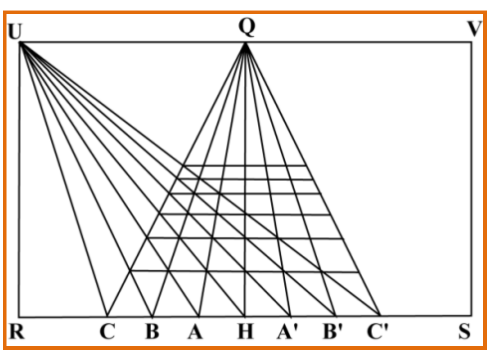

FIG. 13

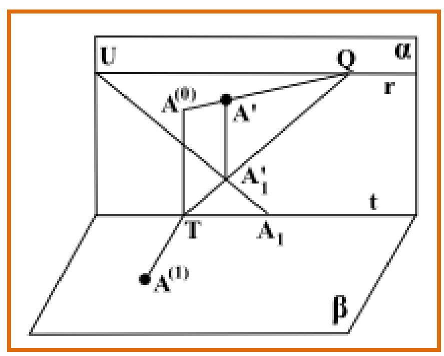

FIG. 14

50.5.3 Le cose si complicano se l'oggetto da rappresentare non è contenuto nel piano stazione bensì in una qualsiasi posizione dello spazio.
Descriviamo appunto come si costruisce la prospettiva di un qualsiasi punto A dello spazio, ammesso sempre di aver fissato: il quadro α, il piano stazione β, la linea di terra t, la linea di fuga r, il punto principale Q e uno dei punti di distanza, per esempio U (Fig. 14). Ecco allora come si procede:

a) Del punto A si tracciano anzitutto la proiezione ortogonale $A^{(0)}$ sul quadro α e la proiezione ortogonale $A^{(1)}$ sul piano stazione β.

b) Tracciata anche la proiezione ortogonale T del punto $A^{(1)}$ sulla linea di terra t, sono evidenti alcuni fatti (che, peraltro, puoi spiegare da solo):
   - la retta $TA^{(0)}$ è essa pure perpendicolare alla retta t;
   - la distanza di $A^{(0)}$ dalla retta t, vale a dire la lunghezza di $TA^{(0)}$, è uguale alla distanza di A dal piano stazione β;
   - la distanza di $A^{(1)}$ dalla retta t, vale a dire la lunghezza di $TA^{(1)}$, è uguale alla distanza di A dal quadro α.

c) Si costruisce la prospettiva del punto $A^{(1)}$, contenuto nel piano stazione β, secondo il procedimento descritto in 50.5.2: sia essa il punto A'_1.

d) La prospettiva del punto A è il punto A' in cui la verticale condotta per A'_1 incontra il segmento $QA^{(0)}$.

Questa costruzione, ripetuta tutte le volte che occorre, permette di ottenere la prospettiva di un qualunque oggetto dello spazio.

A questo riguardo ti proponiamo per esercizio di costruire la prospettiva di una retta, distinguendo i casi che essa sia parallela al quadro ma non al piano stazione oppure parallela al piano stazione ma non al quadro oppure, infine, che sia parallela ad entrambi i piani.

È suggestiva, ancor più che nel caso di un oggetto contenuto nel piano stazione, la prospettiva di una stanza (Fig. 15).

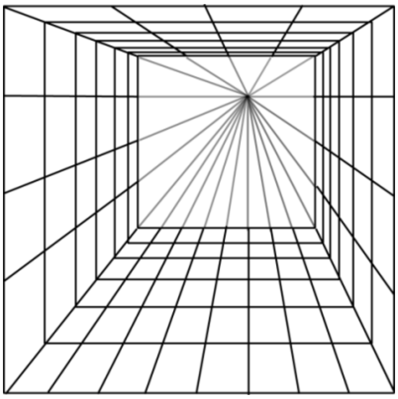

FIG. 15

Un paio di esercizi per concludere.

1. Costruire la prospettiva di un quadrato, contenuto nel piano stazione e avente un lato parallelo alla linea di terra.
2. Costruire la prospettiva di un quadrato, strettamente parallelo al piano stazione e avente un lato parallelo alla linea di terra.

50.6 NOTA STORICA

Le tecniche di rappresentazione piana delle figure solide sfruttano, come hai avuto modo di costatare, molte proprietà delle figure dello spazio. Esse affondano le loro radici in un'opera di Euclide (III sec. a.C.) dal titolo *Ottica*. Queste tecniche stabiliscono un legame forte fra la geometria e le arti figurative.

Fra di esse in particolare la "prospettiva" ha svolto un ruolo determinante. In origine, e in particolare nel periodo del Medioevo, la *perspectiva* era sostanzialmente un nome diverso dell'*ottica*, ma in seguito diventò uno dei metodi più importanti di rappresentazione piana delle figure solide, anzi, secondo alcuni, il metodo che forniva l'unica "vera" rappresentazione dello spazio.
Le regole che stavano alla base della prospettiva comparvero, quantunque in forma sperimentale e non ancora esplicita, nel periodo del Rinascimento italiano [(1)], per merito principale di **Filippo Brunelleschi** (1377-1466) e della sua nuova concezione dello spazio (infinito e continuo, preesistente agli oggetti in esso contenuti). E trovarono seguaci più o meno fedeli in Donatello (1386-1466), Lorenzo Ghiberti (1378-1455) e Tommaso Masaccio (1401-1428).
Fu, però, soprattutto l'opera ***De pictura***, scritta intorno al 1435, che trattò in maniera approfondita ed esauriente delle leggi matematiche della prospettiva. Il suo autore fu **Leon Battista Alberti** (1404-1472), che aveva appreso i rudimenti della prospettiva proprio da Brunelleschi, al quale peraltro il *De pictura* è dedicato, ed aveva deciso che era giunto il momento di operare una sistemazione teorica delle precedenti sperimentazioni.
Per spiegare, quantunque in maniera assai sintetica, come si articola il *De pictura*, ci affidiamo direttamente alle parole del suo autore, riportando un brano [(2)] tratto dal "Prologo". In esso, rivolgendosi all'amico Brunelleschi, Alberti così si esprime:
«*Mi piacerebbe che tu rivedessi questa mia operetta* de pictura*, che in tuo nome composi in lingua toscana. Vedrai tre libri: il primo, tutto matematico, fa sorgere questa leggiadra e nobilissima arte* [la pittura] *dalle sue radici naturali* [la geometria]. *Il secondo libro pone l'arte in mano all'artista, distinguendone le varie parti e dimostrando tutto. Il terzo definisce come debba essere l'artista e come possa e debba acquistare perfetta arte e conoscenza di tutta la pittura. Ti piaccia dunque leggermi con diligenza e correggimi se credi che in qualche punto debba essere emendato*».
Il *De pictura* fu un sicuro punto di riferimento sia per gli artisti contemporanei ad Alberti sia per gli sviluppi successivi.
Al fine di comprendere appieno l'idea di Alberti, ti invitiamo a ritornare sulla descrizione del procedimento, di sua invenzione, idoneo a rappresentare in un "quadro" disposto verticalmente una serie di quadrati congruenti situati in un piano orizzontale e di cui ci siamo occupati in chiusura di 50.5.2 (Fig. 13).
Il rigore prospettico di L. B. Alberti si ritrova, completamente assimilato, non solo nell'espressione artistica di **Piero della Francesca** (1415 ca. – 1492), ma anche nella sua produzione letteraria. Il suo trattato ***De perspectiva pingendi*** fa addirittura dei passi avanti rispetto al *De pictura*. Alberti, infatti, si era preoccupato prevalentemente di rappresentare all'interno di un "quadro" figure situate su un piano orizzontale e quindi, in sostanza, figure piane. Piero della Francesca, invece, affrontò il proble-

[1] In base ad una tesi di Catastini-Ghione (Cfr.: Laura Catastini – Franco Ghione, *Le Geometrie della Visione: Scienza, Arte, Didattica*, Milano, Springher – Verlag Italia, 2004) le opere pittoriche delle ville pompeiane (Pompei) e la Stanza delle Maschere della villa augustea (Roma) testimoniano di una civiltà pittorica romana in grado di produrre dipinti prospetticamente corretti. Gli autori non escludono un'eredità lasciata dalla civiltà ellenistica.
[2] In realtà il brano è una nostra traduzione letterale del brano originale, scritto in volgare.

ma, certamente più complesso, di rappresentare nel “quadro” oggetti dello spazio tridimensionale, in modo da dare un’impressione simile a quella della visione diretta degli oggetti e, nel medesimo tempo, il senso della profondità. È, insomma, con l’opera di Piero della Francesca che la prospettiva trova una sistemazione definitiva, finendo per essere considerata la “vera” rappresentazione dello spazio.
Per avere un’idea più chiara di ciò che stiamo dicendo, ti invitiamo a rivedere la prospettiva di una stanza, rappresentata in figura 15, ma soprattutto il dipinto di figura 16 (Piero della Francesca: *La Flagellazione di Cristo*, 1450-1460, 59×81,5 cm^2, Galleria Nazionale delle Marche – Urbino).
Piero della Francesca non fu soltanto uno dei maestri d’arte più importanti del Quattrocento, ma si dimostrò anche un valente matematico. Egli, in verità, si dedicò agli studi matematici solo negli ultimi anni della sua vita, quando si vide costretto a ritirarsi dall’attività di artista a causa di una malattia agli occhi, che l’avrebbe portato alla cecità. E, dopo il *De perspectiva pingendi*, composto intorno al 1478, portò a termine altre due opere: una, di geometria, dal titolo *Libellus de quinque corporibus regularibus*, si occupa evidentemente dei cinque poliedri regolari; l’altra, di aritmetica, dal titolo *De Abaco*, è un manuale di calcolo.

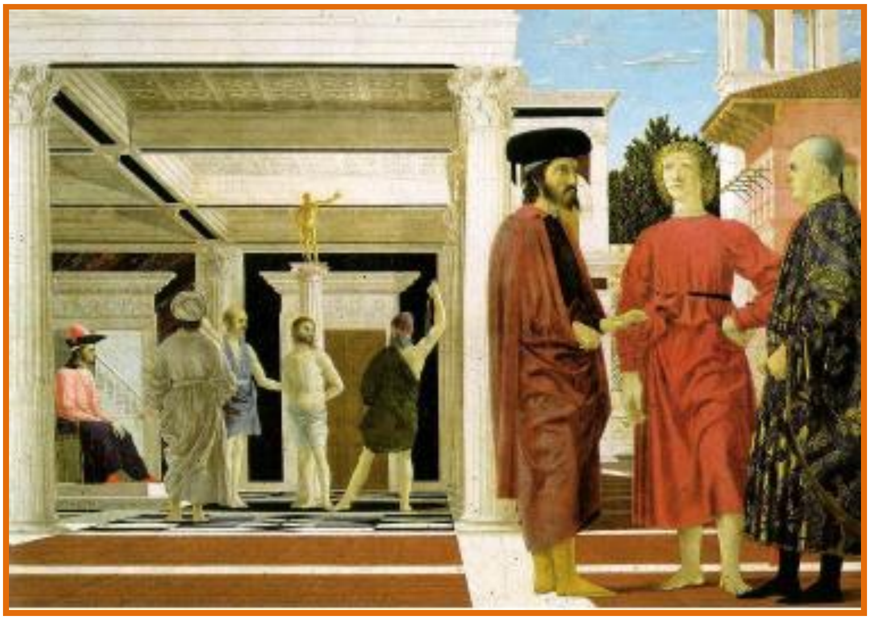

FIG. 16

Tra gli artisti che, dopo P. della Francesca, si occuparono di prospettiva ci piace ricordarne due:
- **Leonardo da Vinci** (1452-1519), il cui *Trattato sulla pittura* contiene, in apertura, l’ammonimento: «*Non mi legga chi non è matematico*» e che ricorda l’altro ammonimento «*Non entri chi non è geometra*», che pare campeggiasse all’ingresso dell’Accademia platonica.
- **Albrecht Dürer** (1471-1528), tedesco di Norimberga, di cui segnaliamo un’opera dal lungo titolo: *Ricerche sulla misurazione di figure piane e solide mediante cerchi e linee rette*.

A partire dal sec. XVII i problemi legati alla "prospettiva" sono inquadrati in quelli più generali della "geometria proiettiva", che in quegli anni si veniva formando soprattutto per merito del francese **Girard Desargues** [3] (1591-1661).

E in seguito diventano un capitolo, ancorché importante, della "geometria descrittiva", termine coniato dal matematico e uomo politico francese **Gaspard Monge** (1746-1818), allorché a Parigi venne pubblicato nel 1799 il suo trattato intitolato per l'appunto *Géométrie descriptive*.

In realtà, quest'opera è una raccolta delle lezioni che Monge tenne nel corso degli anni 1794-1795 nella École Normale di Parigi (fondata proprio nel 1794) e fu curata dal suo discepolo **Jean Nicolas Pierre Hachette** (1769-1834). Questi, non solo continuò e approfondì l'opera di Monge nell'insegnamento della geometria descrittiva, ma contribuì in modo determinante a far conoscere l'opera del suo maestro.

Nota Bene. Riteniamo che gli esercizi proposti passo dopo passo, durante lo svolgimento dell'unità, siano sufficienti per gli obiettivi prefissati, ragion per cui manca la sezione "verifiche".

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

DOMANDE.

1. Due piani α e β sono paralleli. Da un punto S, non appartenente ad alcuno di essi, si proietta su α un triangolo contenuto nel piano β. Quale relazione sussiste fra il triangolo assegnato e la figura che si ottiene in seguito alla proiezione suddetta?
2. Due piani α e β sono perpendicolari. Secondo una direzione incidente ciascuno dei due piani si proietta su α un trapezio contenuto nel piano β. Quale relazione sussiste fra il trapezio assegnato e la figura che si ottiene in seguito alla proiezione suddetta?
3. Come si definisce una proiettività fra due piani?
4. Cosa s'intende per piano proiettivo?
5. È assegnata un'omologia piana di centro S ed asse u. Quale figura si ottiene trasformando, in base ad essa, un quadrato inscritto in una circonferenza? Si prenda in esame il caso in cui il punto S è esterno alla circonferenza e nessuna delle tangenti ad essa condotte per S è parallela all'asse u.
6. Quale differenza sussiste fra la prospettiva lineare e la prospettiva aerea?
7. Quali sono gli elementi essenziali per la rappresentazione prospettica di un dato oggetto?

---

[3] Il termine *geometria proiettiva* sarebbe stato però coniato molto tempo dopo per merito del matematico e ingegnere francese Victor Poncelet (1788-1867), il quale nel 1822 pubblicò l'opera intitolata *Traité des propriétés projectives des figures* (*Trattato sulle proprietà proiettive delle figure).*
In realtà, l'opera di Desargues, pubblicata nel 1639 e oggigiorno citata con la sola parola iniziale del lungo titolo, vale a dire *Brouillon* (*Brogliaccio*), all'inizio fu oscurata dalla *Géométrie* di Cartesio, che praticamente monopolizzò l'interesse degli studiosi e, comunque, non fu compresa. E questo nonostante l'impegno del suo amico Abraham Bosse (1602-1676), che provò a far conoscere la sua opera con alcune pubblicazioni nel corso degli anni 1643-1648. Ad ogni modo, l'opera di Desargues fu capita solo molto tempo dopo, dapprima con la pubblicazione, avvenuta nel 1739, di un'opera del francese Amédée-François Frézier (1682-1773). Opera, questa, che quasi certamente influenzò Monge. E, successivamente, ma quasi un secolo più tardi, con la succitata opera di Poncelet, il quale riconobbe di essere stato preceduto, in alcune scoperte, proprio da Desargues.

8. A chi si deve l'invenzione della prospettiva? A chi va il merito di averne esteso le regole alle figure spaziali?

RISPOSTE.

1. La proiezione altro non è che una similitudine, ragion per cui la figura trasformata del triangolo considerato è un triangolo simile ad esso.
2. La proiezione è un'affinità, ragion per cui la figura trasformata del trapezio considerato è un quadrilatero affine ad esso. Vale a dire ancora un trapezio, dal momento che l'affinità conserva il parallelismo delle rette.
3. Una proiettività fra due piani è una corrispondenza biunivoca fra i punti dei due piani, nella quale si conservano l'allineamento dei punti ed il birapporto di quattro punti.
4. Il piano proiettivo è il piano usuale ampliato con gli elementi all'infinito: punti impropri e retta impropria, luogo dei punti impropri.
5. La circonferenza è trasformata in un'ellisse ed il quadrato in un quadrilatero generico inscritto in essa.
6. La prospettiva lineare si occupa delle regole geometriche che ne stanno alla base. La prospettiva aerea si interessa degli artifici atti a rendere il disegno più gradevole sul piano estetico.
7. Sono il quadro, il piano stazione, la linea di terra, la linea di fuga, il punto principale, uno dei punti di distanza.
8. L'inventore della prospettiva fu Leon Battista Alberti. Fu invece Piero della Francesca che ne estese le regole alla rappresentazione degli oggetti in posizione generica nello spazio.