Prerequisiti:
- Conoscenze approfondite degli insiemi numerici
- Conoscenze di geometria elementare

L'unità, a parte il diverso grado di approfondimento, è rivolta ai Licei, agli Istituti Tecnici, Settore Tecnologico, ed agli Istituti Professionali. I Licei ne affronteranno lo studio nel 2° biennio, gli Istituti Tecnici e Professionali nella 5ª classe.

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:

- *fornire la definizione di insieme infinito e di insieme finito*
- *spiegare il paradosso di Achille e la tartaruga*
- *dimostrare che l'insieme dei numeri primi è infinito*
- *spiegare i concetti di potenza del numerabile e di potenza del continuo*
- *fornire esempi di insiemi numerabili e di insiemi continui, dandone adeguata dimostrazione*
- *dimostrare che il numerabile è minore del continuo*
- *spiegare in che cosa consista l'ipotesi del continuo*
- *spiegare i concetti di "infinito potenziale" e "infinito attuale"*

Insiemi numerici e infinito

Unità 54

54.1 FINITO E INFINITO

54.1.1 Più volte, nel corso dei tuoi studi hai incontrato i termini *finito* e *infinito*. Hai certamente consapevolezza del loro significato, ma ce ne vogliamo occupare ugualmente in modo approfondito.

Diciamo subito che i concetti "finito" e "infinito" sono usati in matematica in contesti diversi. A volte sono riferiti agli insiemi, per cui si parla di "insieme finito" e "insieme infinito". A volte riguardano i numeri. In particolare, il termine "finito" è usato per indicare un qualunque valore numerico reale, mentre il termine "infinito" è usato per indicare una quantità maggiore di un qualunque numero reale, senza che con questo si possa considerare un numero. È da entrambi i punti di vista che noi esamineremo i due termini.

Incominciamo allora a domandarci:

Quando un insieme si dice finito? Quando si dice infinito?

Una definizione soddisfacente fu possibile solo dopo la fondazione della teoria degli insiemi, operata dal matematico tedesco **Georg Cantor** (1845-1918) tra i 1878 ed il 1884. Il merito della definizione è da attribuirsi a **Richard Dedekind** (1831-1916), anch'egli tedesco e amico di Cantor.

La definizione è la seguente:

Un insieme si dice **infinito** se è possibile metterlo in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria. Altrimenti si dice **finito**.

Ora, si capisce subito che è impossibile stabilire una tale corrispondenza per l'insieme delle dita di una mano, o per quello delle pagine di un libro, o per l'insieme dei capelli di una persona, o per quello degli abitanti della Terra; o, in generale, per un qualunque insieme I che si possa mettere in corrispondenza biunivoca con l'insieme $\{1,2,3,4,...,n\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Infatti, indicata con P una parte propria di I, una volta che si sono esauriti gli elementi di P, nel tentativo di stabilire una corrispondenza biunivoca tra P ed I, resta in I almeno un elemento che non appartiene a P e che non è possibile associare ad alcun elemento di P.

Questo implica la seguente conclusione:

Ogni insieme che possa mettersi in corrispondenza biunivoca con l'insieme $\{1,2,3,\ldots,n\}$, dove n è un qualunque numero naturale, è un insieme **finito**.

Accantoniamo per un momento il discorso sugli insiemi infiniti, che riprenderemo fra breve, ed andiamo ad occuparci dell'altro aspetto dei concetti "finito" e "infinito".

54.1.2 Certamente non suscita alcun clamore constatare che la somma di un numero finito di termini numerici (finiti) abbia un valore finito. Come, d'altro canto, non sorprende che la somma di infiniti termini numerici (finiti) abbia un valore infinito.

Si pensi, per esempio, alla somma dei primi n numeri naturali a partire da 1.

Questa somma, com'è noto, vale $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Ora, se $n=10$, si trova subito che $S_{10}=55$. Al crescere di n anche S_n cresce e si capisce facilmente che quando n diventa infinitamente grande anche S_n lo diventa.

Non è avvenuta, invece, senza meraviglia la constatazione che la somma di infiniti termini numerici potesse avere un valore finito, anche se oggi la cosa appare del tutto scontata.

Così, per esempio, oggigiorno nessuno si sorprende del seguente risultato:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2\,.$$

Forniamone una giustificazione.

Incominciamo col porre:

$$S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}.$$

Moltiplicando entrambi i membri dell'uguaglianza per 1/2, otteniamo:

$$\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}$$

e perciò, sottraendo membro a membro la seconda uguaglianza dalla prima:

$$S-\frac{1}{2}S=1-\frac{1}{2^{n+1}}\text{ , da cui segue: }S=2-\frac{1}{2^n}\,.$$

Ora, quando n cresce, diventando infinitamente grande, la quantità $1/2^n$ tende ad approssimarsi sempre più a 0, per cui S tende al valore 2. Che è quello che si voleva giustificare.

Che la somma degli infiniti termini:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

sia uguale a 1 si può spiegare anche intuitivamente attraverso una rappresentazione geometrica della somma medesima, come mostra la figura sottostante (Fig. 1), che non ha bisogno di molte spiegazioni.

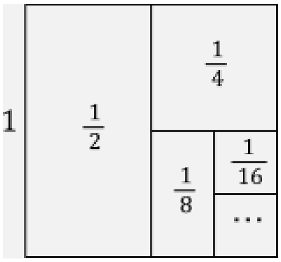


FIG. 1

54.1.3 In realtà, proprio l'ignoranza del fatto che la somma di infiniti termini numerici potesse avere valore finito ha generato alcuni fra i paradossi di **Zenone** di Elea [1] (495-430 a.C.). Paradossi che portarono la matematica ufficiale a bandire l'uso diretto dell'infinito perché foriero di contraddizioni.

Occupiamoci in dettaglio di uno di questi paradossi, forse il più celebre, il ***paradosso di Achille e la tartaruga***.

Questo paradosso afferma che se Achille sfida alla corsa una tartaruga, concedendole un piede di vantaggio, non la raggiungerà mai. Questo perché Achille, per raggiungere la tartaruga, dovrebbe prima raggiungere la posizione occupata da lei all'inizio della gara; ma quando Achille avrà raggiunto quella posizione, la tartaruga nel frattempo si sarà portata in un'altra posizione e tutto ricomincia per prolungarsi all'infinito.

Proviamo ad interpretare nel nostro linguaggio simbolico questo paradosso.

[1] **Elea** è il nome che gli antichi greci davano all'odierna **Velia**, frazione del comune di Ascea in provincia di Salerno, così chiamata fin dai tempi di Cicerone (106-43 a.C.)

Ammettiamo che all'inizio Achille occupi la posizione A e la tartaruga la posizione T_1, per cui il segmento AT_1 sarebbe lungo un piede (Fig. 2). Allora:

- nel tempo t_1 Achille raggiunge la posizione T_1, ma nel frattempo la tartaruga si è portata nella posizione T_2, percorrendo lo spazio T_1T_2;
- per raggiungere la posizione T_2, Achille impiegherà un tempo t_2, ma nel frattempo la tartaruga si sarà portata nella posizione T_3, percorrendo lo spazio T_2T_3;
- … ;
- per raggiungere la posizione T_n, Achille impiegherà un tempo t_n, ma nel frattempo la tartaruga si sarà portata nella posizione T_{n+1}, percorrendo lo spazio T_nT_{n+1};
- e così all'infinito.

Ad Achille, per raggiungere la tartaruga, occorre pertanto un tempo T tale che:

$$T = t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_n + \dots ,$$

formato dalla somma di infiniti termini e **secondo Zenone questa somma non può essere che infinita** e perciò Achille non raggiungerà mai la tartaruga.

FIG. 2

Facciamo vedere che in realtà il paradosso non esiste poiché la conclusione di Zenone è errata.
Ammettiamo allora che Achille tenga una velocità V, pari a k volte quella della tartaruga ($k>1$): si capisce che nel medesimo tempo la tartaruga percorre $1/k$ dello spazio percorso da Achille. Come dire che:

$$T_1T_2=\frac{1}{k}AT_1,\ \ T_2T_3=\frac{1}{k}T_1T_2=\frac{1}{k^2}AT_1,\ \dots,\ T_{n-1}T_n=\frac{1}{k}T_{n-2}T_{n-1}=\frac{1}{k^{n-1}}AT_1,\ \dots .$$

D'altra parte, risulta:

$$t_1=\frac{AT_1}{V}\ ,\ \ t_2=\frac{T_1T_2}{V}=\frac{1}{k}\cdot\frac{AT_1}{V}\ ,\ \ t_3=\frac{T_2T_3}{V}=\frac{1}{k^2}\cdot\frac{AT_1}{V}\ ,\ \dots,\ t_n=\frac{T_{n-1}T_{n-2}}{V}=\frac{1}{k^{n-1}}\cdot\frac{AT_1}{V}\ ,\ \dots .$$

Per cui si ha:

$$T = t_1+t_2+t_3+\dots+t_n+\dots = \frac{AT_1}{V}\left(1+\frac{1}{k}+\frac{1}{k^2}+\dots+\frac{1}{k^{n-1}}+\dots\right).$$

La quantità dentro parentesi, con un ragionamento simile a quello esposto poco sopra, si dimostra essere uguale a $\frac{k}{k-1}$. Pertanto il tempo T impiegato da Achille per raggiungere la tartaruga è in realtà un tempo finito, dato precisamente dalla seguente espressione:

$$T = \frac{AT_1}{V}\cdot\frac{k}{k-1}\ .$$

contrariamente a quanto sosteneva Zenone.

Risolviamo il problema senza coinvolgere i sofismi di Zenone. A tal riguardo, stabiliamo sulla retta del moto (Fig. 2) un riferimento cartesiano e sia A l'origine. Sia inoltre $AT_1=s_0$. Le leggi del moto di Achille e della tartaruga, tenendo presente che i due contendenti partono contemporaneamente, sono allora rispettivamente:

$$s = Vt,\quad s=\frac{V}{k}t+s_0 .$$

Nell'istante T in cui Achille raggiunge la tartaruga, i due contendenti si trovano nella stessa posizione, per cui risulta:

$$\mathrm{VT} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{k}}\mathrm{T} + \mathrm{s}_0 \,.$$

Da qui, risolvendo rispetto a T, segue:

$$\mathrm{T} = \frac{\mathrm{s}_0}{\mathrm{V}} \cdot \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{k}-1} \,.$$

Ovviamente lo stesso risultato trovato sopra.

C'è da dire, a giustificazione di Zenone e di coloro che non riuscirono a sciogliere il paradosso, che il fatto che una somma di infiniti termini numerici potesse avere un valore finito è una scoperta molto posteriore a lui: risale infatti al XIV secolo ed è opera di un logico inglese, di nome **Richard Suiseth** (attivo, secondo Boyer [2], nel 1350), noto con l'appellativo di **Calculator**.

Oggigiorno, di esempi di somme di infiniti termini numerici aventi valore finito ne conosciamo a bizzeffe.

54.1.4 Strettamente connesso a quello di "infinito" è il concetto di "infinitamente piccolo". Come di quello anche di questo era inibito l'uso nella matematica ufficiale antica. Ed è ancora Zenone il responsabile. Ecco, con libera interpretazione, il suo ragionamento per escludere l'infinitamente piccolo, che egli assimilava al nulla.

Se una grandezza si divide in parti, le parti sono sempre più piccole della grandezza originaria; per cui, continuando la suddivisione all'infinito, si finisce per ottenere parti "infinitamente piccole" e perciò "nulle". Ora, volendo ricostituire la grandezza originaria a partire da tali parti "infinitamente piccole", si dovrebbero "sommare le infinite parti infinitamente piccole", ossia si dovrebbero sommare infinite grandezze nulle. Ma questo darebbe come risultato una grandezza nulla, mentre la grandezza originaria non lo è. Dunque non ha senso parlare di suddivisione infinita né di grandezze infinitamente piccole.

In realtà, proprio il modo di ragionare di Zenone è alla base del calcolo integrale (ce ne occuperemo nel prosieguo degli studi) ed oggi non crea più alcuna sorpresa né tantomeno scandalo il fatto che la "somma di infinite quantità infinitamente piccole" possa dare come risultato un valore finito.

Ma questo Zenone non lo poteva sapere. Due secoli più tardi il grande Archimede, rifacendosi alla concezione atomistica di Democrito di Abdera (460-360 a.C.), non si sarebbe fatto scrupolo di utilizzare proprio il concetto di somma di infinite quantità infinitamente piccole per giungere alla scoperta di risultati eccezionali.

54.2 IL NUMERABILE

54.2.1 Riprendiamo il discorso sugli insiemi infiniti, per domandarci se esistono realmente insiemi che si possano mettere in corrispondenza biunivoca con una loro parte propria.

Il grafo sottostante (Fig. 3) mostra chiaramente che la relazione che ad $x \in \mathbb{N}$ associa $y \in N_p$ tale che "x è la metà di y", dove $\mathbb{N}$ è l'insieme dei naturali ed N_p è l'insieme dei naturali pari, stabilisce una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{N}$ ed N_p. Per cui è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra l'insieme $\mathbb{N}$ e la sua parte propria N_p. Dunque l'insieme $\mathbb{N}$ è infinito.

[2] Cfr.: Carl B. Boyer, *Storia della matematica*, Milano, Mondatori, 1976.

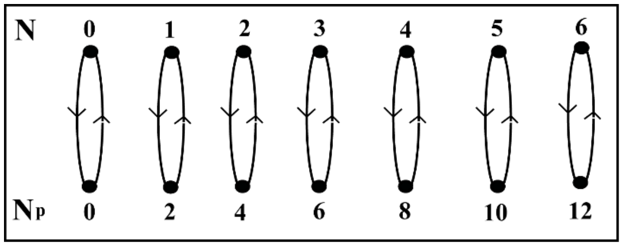
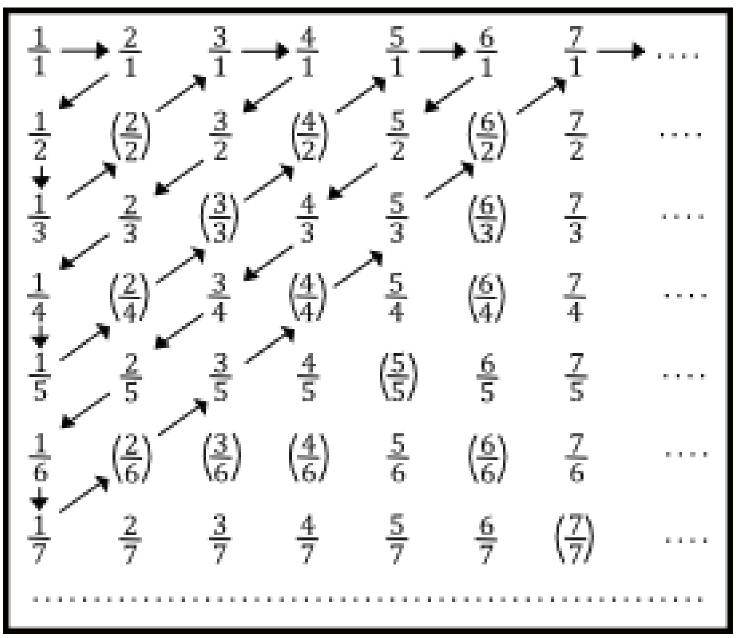


FIG. 3

Ora, questo fatto non è eccezionale. Si ripete, infatti, in molte situazioni; come, per esempio, quando si considerano: l'insieme dei numeri naturali e quello dei loro quadrati, l'insieme dei numeri naturali e quello dei loro tripli, e altri casi analoghi.

Ma addirittura è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca fra l'insieme $\mathbb{N}$ e l'insieme $\mathbb{Q}^+$ dei razionali non negativi. Si procede così: si scrive l'insieme $\mathbb{Q}_0^+$ dei razionali positivi come nella tabella 1 e si enumerano i suoi elementi seguendo le diagonali e tralasciando i numeri già incontrati (che nella tabella sono racchiusi tra parentesi).



TAB. 1

Una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{N}_0$ e $\mathbb{Q}_0^+$ è implicita sostanzialmente già nella tabella medesima, ma è meglio evidenziata da un grafo (Fig. 4), benché naturalmente incompleto, dove è però estesa agli insiemi $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}^+$. Dunque l'insieme $\mathbb{Q}^+$ è infinito.

Pensiamo che tu abbia compreso il ruolo svolto dal grafo. Ad ogni buon conto precisiamo che con esso non si ha la pretesa di scrivere i numeri razionali positivi in ordine crescente. Ma soltanto di far vedere che esiste almeno un modo di associare ad ogni $n \in \mathbb{N}$ uno ed un solo $q \in \mathbb{Q}^+$ e viceversa.

A titolo di esercizio, ti proponiamo di determinare quale $q \in \mathbb{Q}^+$ corrisponde al naturale 27 e quale $n \in \mathbb{N}$ corrisponde al razionale positivo 9/5.

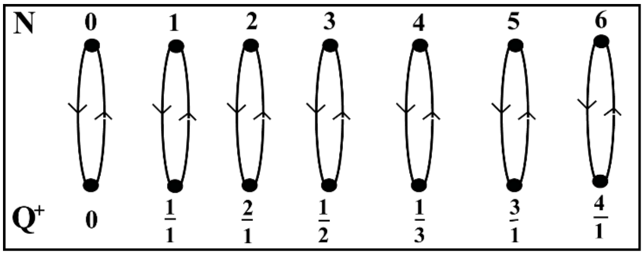


FIG. 4

54.2.2 S'intuisce – ma se ne potrebbe dare una dimostrazione – che:

- *Ogni insieme, che si può mettere in corrispondenza biunivoca con un insieme infinito, è esso pure infinito.*
- *Ogni insieme, che contiene come parte propria un insieme infinito, è infinito.*

Sulla base di quanto detto sopra, ti proponiamo di spiegare perché i seguenti insiemi sono infiniti:

- numeri naturali pari;
- numeri naturali dispari;
- multipli di un qualunque numero naturale n diverso da 0;
- quadrati dei numeri naturali;
- numeri interi;
- numeri razionali;
- numeri reali.

54.2.3 Quando tra due insiemi A e B è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca, si dice che A e B sono ***equipotenti***.

Se due insiemi finiti sono equipotenti, è evidente che hanno lo stesso numero di elementi: questo numero si chiama **potenza** (o **cardinalità**) di ciascuno dei due insiemi.

La potenza di un insieme A si indica con una delle seguenti scritture: **|A|**, **card(A)**.

Ma se ad essere equipotenti sono due insiemi infiniti? Ovviamente in questo caso non ha senso dire che hanno lo stesso numero di elementi, giacché gli elementi sono appunto in numero infinito. Ebbene, un genio matematico superò questo limite, creando una nuova categoria di numeri, i cosiddetti "numeri transfiniti".

Ma non precorriamo i tempi e procediamo con ordine.

Ogni insieme equipotente all'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali si dice che **ha la potenza del numerabile** o **la cardinalità del numerabile**. O, più semplicemente, si dice che l'insieme è **numerabile**.

Un insieme che sia finito o infinito numerabile è detto a volte **contabile**.

Ovviamente la potenza del numerabile non è un numero naturale, per cui nessun numero naturale può rappresentarla. Il nostro genio la chiamò *numero transfinito* ed inventò un simbolo per rappresentarlo, il seguente:

$$\aleph_0$$

che si legge "*aleph con zero*" [3].

Da quanto precede si desume che oltre ad $\mathbb{N}$ sono numerabili molti altri insiemi. Come per esempio: naturali pari; quadrati dei naturali; razionali assoluti; eccetera.

---

[3] *Aleph* è la prima lettera dell'alfabeto ebraico.

Inoltre sono numerabili gli insiemi: $\mathbb{Z}$ degli interi relativi; $\mathbb{Q}$ dei razionali.
Per il primo di questi ultimi due insiemi basta esaminare il grafo di figura 5.
Un grafo simile spiega poi la numerabilità di $\mathbb{Q}$.

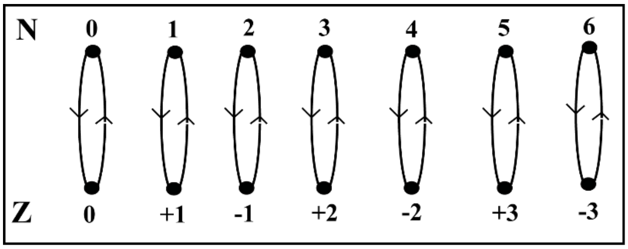


FIG. 5

54.2.4 Un altro insieme numerabile è l'insieme **P** dei numeri primi. Già sappiamo che esso è un sottoinsieme di $\mathbb{N}$. Adesso <u>dimostriamo che è infinito</u>.
Lo facciamo riportando – anche se tradotta in un linguaggio a noi più familiare – la prima dimostrazione che è stata elaborata: ne fu autore **Euclide** (*Elementi*, libro IX, prop. 20) [4].

DIMOSTRAZIONE. Questa dimostrazione è condotta con un ragionamento per assurdo. Per questo si comincia col negare la tesi, cioè si ammette che i numeri primi siano in numero finito. Questo implica che da un certo punto in poi non vi siano più numeri primi. Di conseguenza ci sarebbe un numero primo che risulterebbe essere il maggiore nell'insieme dei numeri primi: chiamiamolo p. Cosicché, in base a questa ipotesi, possiamo scrivere tutti i numeri primi:

$$2, 3, 5, 7, 11, \ldots, \mathrm{p}.$$

Consideriamo a questo punto il seguente numero N, ottenuto aumentando di una unità il prodotto di tutti i numeri primi:

$$\mathrm{N} = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot \mathrm{p} + 1.$$

Esso è evidentemente maggiore di p, quindi non può essere primo, poiché si è supposto che p fosse il numero primo più grande. Di conseguenza p deve essere composto. Dividendolo ora per 2, 3, 5, 7, 11, … , p, si ottiene sempre resto 1: perciò N non è divisibile per nessuno dei numeri primi da 2 a p. Per cui, essendo composto, deve essere divisibile per un numero primo maggiore di p: il che è assurdo poiché si è ammesso che p fosse il maggiore numero primo.
Insomma l'ipotesi che i numeri primi siano in numero finito è insostenibile poiché conduce ad una contraddizione. Si deve concludere che l'insieme dei numeri primi è infinito.

Per concludere che l'insieme dei numeri primi è numerabile, basta la spiegazione intuitiva evidenziata da un grafo (Fig. 6), il quale fa appunto intuire come sia possibile stabilire una corrispondenza biunivoca fra $\mathbb{N}$ e **P**. Anche se poi, in pratica, non è tanto immediato determinare quale $\mathrm{p}\in\mathbf{P}$ corrisponde ad un dato $\mathrm{n}\in\mathbb{N}$ o quale n corrisponde a p.

[4] In realtà Euclide non poteva utilizzare direttamente il termine "infinito", per cui fu costretto ad una formulazione arzigogolata: "*Esistono numeri primi in numero maggiore di quanti numeri primi si voglia proporre*". Cfr: Euclide, *Gli Elementi* (a cura di A. Frajese e L. Maccioni), Torino, UTET, coll. Classici, 1970.

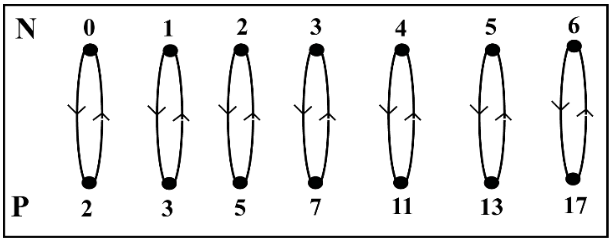


FIG. 6

Se è vero che l'insieme dei numeri primi è infinito, è pur vero che tali numeri diventano sempre più rari man mano che si avanza nella serie dei numeri naturali. Nel 1849 il matematico francese **Alphonse de Polignac** (1817-1890) formulò una congettura, chiamata appunto **congettura di Polignac**, il cui enunciato è il seguente:

Per ogni numero pari n, esistono, nella successione dei numeri primi, infinite coppie di numeri primi consecutivi p, q tali che q – p = n.

Intendiamoci, la congettura è solo tale dal momento che non è stata dimostrata né confutata. Ma essa ipotizza qualcosa di veramente incredibile: anche se si pensa ad un numero pari α molto grande (diciamo mille miliardi di miliardi, cioè 1 seguito da 21 zeri, ma solo per fissare le idee, poiché si possono immaginare numeri ben più grandi), la congettura di Polignac afferma che nella successione dei numeri primi esistono due numeri primi consecutivi p, q tali che q–p è proprio quel numero α. Il che vorrebbe dire che tra p e q, pur essendoci un'enormità di numeri naturali (mille miliardi di miliardi nel nostro esempio), non ce n'è uno che sia primo. Veramente si può parlare, ed a ragion veduta, di "solitudine dei numeri primi".
Ti invitiamo a verificare la congettura di Polignac, nei seguenti casi: n=4, n=6, n=8.
Noi lo andiamo a fare invece per altri valori pari di n successivi ai precedenti:
- per n=10 basta prendere p=139 e q=149;
- per n=12 basta prendere p=199 e q=211;
- per n=14 basta prendere p=113 e q=127;
- per n=16 basta prendere p=1831 e q=1847;
- per n=18 basta prendere p=523 e q=541;
- per n=20 basta prendere p=887 e q=907;
- per n=22 basta prendere p=1129 e q=1151.

54.2.5 Gli insiemi $\mathbb{N}$, N_p, P, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{Q}$ hanno tutti la potenza del numerabile. Questo, volendolo esprimere in termini grossolani, significa che ciascuno di essi ha tanti elementi quanti ne ha ogni altro di essi medesimi. Il che può apparire una stranezza ove si pensi al fatto che ognuno di tali insiemi, tranne $\mathbb{Q}$, risulta strettamente incluso in qualche altro degli stessi insiemi. Ma non lo è affatto perché ciò è tipico degli insiemi infiniti, come specifica appunto la definizione di Dedekind.
Lo strano comportamento degli insiemi infiniti era stato già rilevato nel 1638 da **Galileo Galilei** (1564-1642) nei *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, ma il grande scienziato pisano non ne trasse alcuna interessante conclusione [5]. Dice, infatti, a proposito di tale comportamento, che egli non riesce a spiegare: «*Queste son di quelle difficoltà che derivano dal discorrer che noi facciamo col nostro intelletto finito intorno a gl'infiniti, dandogli quelli attributi che*

[5] Ti suggeriamo di effettuare la "lettura" in chiusura dell'unità.

noi diamo alle cose finite e terminate».

54.3 IL CONTINUO

54.3.1 Fino ad ora, nonostante abbiamo preso in esame molti insiemi, non ne abbiamo trovato alcuno che fosse infinito senza essere equipotente ad ℕ. Ci sorge un dubbio:

Tutti gli insiemi infiniti hanno forse la stessa potenza?

Come dire, seppure in termini grossolani:

Gli insiemi infiniti sono infiniti e non c'è altro da aggiungere?

In verità molti, se non addirittura tutti i matematici, la pensarono così per molti secoli e comunque fino agli ultimi anni dell'Ottocento. Galileo Galilei puntualizzò questo fatto nell'opera sopra citata, affermando che: «*gli attributi di maggiore minore o eguale non aver luogo non solamente tra gl'infiniti, ma né anco tra gl'infiniti e i finiti*».
Sennonché il solito genio matematico spariglìò il campo, riuscendo a stabilire una gerarchia tra i molteplici insiemi infiniti.
Riassumiamo quanto da lui fatto. Per questo incominciamo a considerare l'insieme ℝ dei numeri reali al fine di stabilire se anch'esso sia o no numerabile.
Per raggiungere lo scopo facciamo riferimento, in un primo momento, al noto modello geometrico di ℝ, vale a dire alla retta reale e facciamo subito vedere che:

Due qualsiasi rette sono equipotenti.

A questo riguardo prendiamo due qualsiasi rette a, b (Fig. 7) – che supponiamo secanti – e scegliamo un punto P che non appartenga a nessuna di esse. Ebbene, detto A un qualunque punto di a, è sufficiente associare ad esso il punto B in cui la retta PA interseca b; e viceversa.
Se poi il punto A coincide col punto X tale che PX è parallela alla retta b, ad X si associa il punto Y in cui la retta b è secata dalla parallela ad a condotta per P; e naturalmente ad Y si associa X.

Se le due rette a, b sono parallele, la corrispondenza biunivoca tra i loro punti si spiega ancora più facilmente. Ne lasciamo il compito a te.

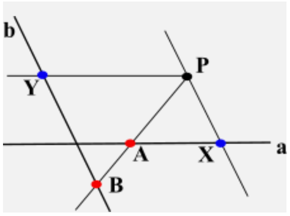


FIG. 7

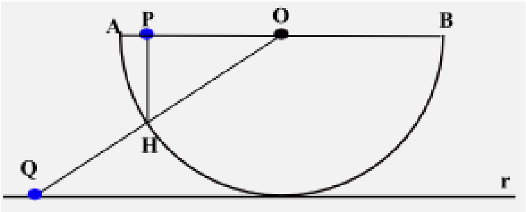


FIG. 8

54.3.2 Adesso facciamo vedere che:

Una retta ed un segmento sono equipotenti.

Per questo prendiamo una semicirconferenza di centro O e diametro AB e la retta r tangente ad essa e parallela ad AB (Fig. 8). Preso $P \in]AB[$ e condotta per esso la perpendicolare alla retta AB, sia H il punto in cui questa interseca la semicirconferenza e sia Q il punto in cui la retta OH interseca la retta r. Questa costruzione, che s'inverte facilmente, associando P e Q evidenzia una corrispondenza biunivoca tra i punti di]AB[e quelli di r. Pertanto il segmento e la retta sono equipotenti.
In conclusione, non solo ogni retta ha tanti punti quanti ne ha ogni altra, ma ogni segmento ha tanti

punti quanti ne ha una retta. Come dire: un segmento (di retta reale, si capisce) ha tanti punti quanti sono i numeri reali.

54.3.3 Occupiamoci adesso del seguente teorema, il quale mostra fra l'altro che la "numerabilità" è una caratteristica che si perde nel passaggio dall'insieme dei numeri razionali a quello dei numeri reali.

♦ TEOREMA. **L'insieme dei numeri reali è più che numerabile (**vale a dire**: ha una potenza maggiore di quella del numerabile).**

La dimostrazione del teorema è un'altra invenzione del solito genio. Vogliamo riprodurla non prima di aver premesso che è basata sul seguente criterio, di cui invece non forniamo la dimostrazione:

♦ CRITERIO. **Se S è un insieme equipotente ad un sottoinsieme di un insieme T ma non è equipotente a T allora la potenza di S è minore della potenza di T.**

DIMOSTRAZIONE del teorema. Basta dimostrare che un sottoinsieme dell'insieme $\mathbb{R}$ dei reali non è numerabile ma contiene un sottoinsieme che è numerabile. A questo riguardo scegliamo il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}$: $J=\{x\in\mathbb{R} \mid 0\le x\le 1\}$, vale a dire l'intervallo [0,1] dei numeri reali compresi fra 0 e 1 inclusi.
Che esso contenga un sottoinsieme numerabile è banale; è sufficiente considerare l'insieme:

$$\{x \mid x=1/n\ ,\ n\in\mathbb{N}_0\}\ .$$

Per dimostrare invece che J non è numerabile osserviamo preliminarmente che ogni elemento di questo intervallo può mettersi sotto forma di allineamento decimale illimitato con parte intera nulla e, viceversa, ogni allineamento decimale illimitato con parte intera nulla è un numero di quell'intervallo. Cioè, detto α un tale numero: $\alpha=0,a_1a_2a_3a_4\ldots$, dove a_i ($i\in\mathbb{N}$) sono numeri tali che $0\le a_i\le 9$. In particolare: $0=0,0000\ldots$, $1=0,9999\ldots$.
Adesso, per dimostrare che l'insieme J non è numerabile, ragioniamo per assurdo, supponendo che sia numerabile. Questo implica che è possibile disporre i suoi elementi in modo che risulti evidenziata una corrispondenza biunivoca tra i due insiemi $\mathbb{N}$ e J. Ammettiamo allora che la disposizione sia la seguente:

$$\alpha_0 = 0,a_{00}a_{01}a_{02}a_{03}\ldots$$
$$\alpha_1 = 0,a_{10}a_{11}a_{12}a_{13}\ldots$$
$$\alpha_2 = 0,a_{20}a_{21}a_{22}a_{23}\ldots$$
$$\alpha_3 = 0,a_{30}a_{31}a_{32}a_{33}\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Di modo che sarebbe $J = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\}$. Ciò significa che non esiste alcun allineamento decimale illimitato con parte intera nulla che non appartenga all'insieme $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\}$. Per cui, se riusciamo a costruire un tale allineamento ma non appartenente a quest'insieme, avremo provato l'assurdo. Ora, in effetti, un allineamento siffatto si può costruire. Per questo bisogna:
a) considerare dapprima il seguente numero $\alpha=0,a_{00}a_{11}a_{22}a_{33}\ldots$ ottenuto con le cifre della "diagonale principale" dei numeri α_i ;
b) costruire quindi il numero $\beta=0,b_0b_1b_2b_3\ldots$ tale che ogni b_i sia diverso da a_{ii}. Ossia, per esteso:

$$b_0 \ne a_{00}\ ;\quad b_1 \ne a_{11}\ ;\quad b_2 \ne a_{22}\ ;\quad b_3 \ne a_{33}\ ;\ \ldots\ .$$

Il numero β appartiene certamente all'intervallo [0,1] ma non all'insieme $\{\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3, \ldots\}$. Esso è, infatti, diverso da ogni α_k, dove $k\in\mathbb{N}$, poiché tali due numeri differiscono almeno per la cifra decimale di posto $k+1$.
L'insieme [0,1] è dunque più che numerabile e, di conseguenza, l'insieme dei reali è più che numerabile.

54.3.4 Ogni insieme equipotente all'insieme dei numeri reali si dice che ha la ***potenza del continuo*** o che ha la ***cardinalità del continuo***. O, più semplicemente, si dice che è ***continuo***.
Il "continuo" è il secondo numero transfinito trovato dal nostro genio. Provvisoriamente lo indichiamo con il simbolo $|\mathbb{R}|$.

Poiché l'appetito vien mangiando, il nostro genio indagò per **stabilire se esistono insiemi infiniti più che continui**. E dal momento che erano esaurite le ricerche riguardo alla retta, prese in considerazione il piano, giungendo alla seguente conclusione:

Il piano ha la potenza del continuo.

Ci sembra interessante far vedere la dimostrazione di un teorema che fa cogliere l'aspetto essenziale di questa proposizione.

♦ TEOREMA. **L'insieme dei punti di un quadrato unitario ha la potenza del continuo.**

DIMOSTRAZIONE. Nel piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), consideriamo il quadrato costruito sui lati unitari OU ed OV, dove U(1,0) e V(0,1) (Fig. 9). È sufficiente dimostrare che questo quadrato è equipotente al segmento OU, che, come noto, ha la potenza del continuo.
Dimostriamo anzitutto che ad ogni punto P del quadrato corrisponde uno ed un sol punto Q del segmento. Le coordinate cartesiane di P sono due numeri reali a, b che si possono scrivere sotto forma di allineamenti decimali illimitati: $a=0,a_1a_2a_3a_4\ldots$, $b=0,b_1b_2b_3b_4\ldots$. Possiamo allora costruire il numero reale α tale che: $\alpha=0,a_1b_1a_2b_2a_3b_3\ldots$; il quale è certamente compreso fra 0 e 1. Cosicché il punto Q di ascissa α appartiene al segmento OU.

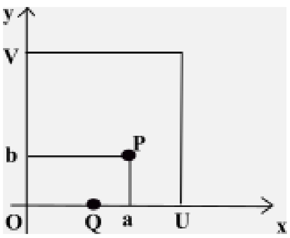


FIG. 9

Facciamo vedere adesso che a Q corrisponde P. Per questo, ammesso che Q abbia ascissa α tale che: $\alpha=0,a_1b_1a_2b_2a_3b_3\ldots$, basta prendere le coordinate (a,b) di P in modo che sia: $a=0,a_1a_2a_3a_4\ldots$, $b=0,b_1b_2b_3b_4\ldots$.
Per esempio, se $a=0,3579\ldots$ e $b=0,2468\ldots$ allora $\alpha=0,325476\ldots$; al contrario, se $\alpha=0,54930132\ldots$ allora $a=0,5903\ldots$ e $b=0,4312\ldots$.

In realtà il nostro genio dimostrò, con un procedimento simile al precedente, che addirittura:

Lo spazio ha la potenza del continuo.

54.4 I CARDINALI TRANSFINITI E L'IPOTESI DEL CONTINUO

54.4.1 Sembrava, dunque, che non si riuscisse a superare la potenza del continuo. Ma il nostro genio non si arrese. Finalmente giunse a dimostrare il seguente teorema, che apriva le porte ad una vera e propria sinfonia di numeri transfiniti.

♦ TEOREMA. **Per ogni insieme A, l'insieme P(A) delle parti di A ha una potenza maggiore di quella di A**.

DIMOSTRAZIONE. Basta provare che A è equipotente ad un sottoinsieme di P(A) ma non è equipotente ad A. La prima parte è immediata: basta considerare l'insieme $B \subset P(A)$ tale che

$$B = \{x \mid x=\{a\}, a \in A\};$$

si comprende facilmente che la relazione, che ad ogni $a \in A$ associa $\{a\} \in B$, è una corrispondenza biunivoca tra A e B. Per cui effettivamente A è equipotente ad un sottoinsieme di P(A).
La dimostrazione che A non è equipotente a P(A) è un po' più complicata. Ragioniamo per assurdo e supponiamo che A sia equipotente a P(A). Allora esiste almeno una funzione biiettiva F che ad ogni $x \in A$ associa $F(x) \in P(A)$. Consideriamo adesso il seguente sottoinsieme di P(A):

$$E = \{x \mid x \in A, x \notin F(x)\}.$$

Esso è certamente associato ad un determinato $x_0 \in A$; cioè: $E=F(x_0)$.
Sono possibili due casi, a seconda che x_0 appartenga o no a $F(x_0)$. Esaminiamoli:
1°) $x_0 \in F(x_0)$: di conseguenza $x_0 \notin E$ e quindi, poiché $E=F(x_0)$, $x_0 \notin F(x_0)$;
2°) $x_0 \notin F(x_0)$: di conseguenza $x_0 \in E$ e quindi, poiché $E=F(x_0)$, $x_0 \in F(x_0)$.
In entrambi i casi si giunge ad un assurdo. Quindi è falsa l'ammissione che A sia equipotente a P(A).
In conclusione, A è equipotente ad un sottoinsieme di P(A) ma non è equipotente ad A. Pertanto, come si voleva dimostrare, la potenza di P(A) è maggiore di quella di A.

Ora, come ricorderai, se un insieme finito ha n elementi, l'insieme delle sue parti ne ha 2^n. Questa proprietà vale anche per gli insiemi infiniti. Ragion per cui, in generale, possiamo affermare che:

L'insieme delle parti di un qualunque insieme A ha potenza uguale a $2^{|A|}$

dove con |A| stiamo indicando, come noto, la potenza di A.
Cosicché abbiamo una successione di **numeri cardinali transfiniti**, disposti in ordine crescente:

$$\aleph_0,\ 2^{\aleph_0}=\aleph_1,\ 2^{\aleph_1}=\aleph_2,\ 2^{\aleph_2}=\aleph_3,\ \dots .$$

Con essi è possibile costruire una vera e propria aritmetica che è detta appunto **aritmetica dei transfiniti**, che presenta molte differenze con l'aritmetica dei numeri cardinali finiti. Non ce ne possiamo occupare.
Ovviamente si ponevano due interrogativi fondamentali:
1) La potenza del continuo coincide con uno di questi numeri cardinali transfiniti oppure è un transfinito diverso?
2) Esistono cardinali transfiniti fra il numerabile ed il continuo?

Il nostro genio, nonostante molti tentativi, non riuscì a dimostrarlo e si limitò a congetturare che:

La potenza del continuo è esattamente uguale a $2^{\aleph_0}$.

E, di conseguenza:

Non esiste un cardinale transfinito compreso tra il numerabile ed il continuo.

Oggi sappiamo che ci sono teorie degli insiemi in cui questa congettura – nota come ***ipotesi del continuo*** – è effettivamente vera, ma esistono teorie in cui invece è falsa. Chi proseguirà gli studi in ambito matematico avrà modo di approfondire questa questione, che noi interrompiamo qui.

54.4.2 Il genio del quale stiamo parlando non è una finzione letteraria ma una persona reale. Si tratta del già citato **Georg Cantor**, inventore della teoria degli insiemi. Il quale, preso dall'entusiasmo che le sue scoperte gli assicuravano, scrisse così all'amico Dedekind: "*Lo vedo, ma non lo credo!*". Egli formulò per la prima volta l'ipotesi del continuo nel 1878. Le teorie degli insiemi in cui essa è vera sono

dette teorie *cantoriane* degli insiemi, quelle in cui invece è falsa sono dette teorie *non-cantoriane* degli insiemi
Purtroppo per Cantor, le sue creazioni non gli procurarono molte soddisfazioni, almeno finché fu in vita. Egli, infatti, proprio a causa delle sue ardite costruzioni concettuali, trovò il continuo ostracismo di quello che era stato il suo maestro ed amico, **Kronecker** [6], il quale – ancorato com'era al concetto di ***infinito potenziale*** – giammai avrebbe accettato l'idea di ***infinito attuale*** che è insita nella creazione di Cantor. E questa ostilità portò Cantor, seppure anche per altri motivi, di natura familiare, a morire pazzo nel manicomio di Halle (6 gennaio 1918).
Bisogna riconoscere che prima di Cantor nessun matematico avrebbe accettato il concetto di "*infinito in atto*", ma solo quello di "*infinito in potenza*".
E questo fin da quando Zenone aveva mostrato, con i suoi paradossi, come l'introduzione dell'infinito nei ragionamenti matematici potesse implicare delle contraddizioni e soprattutto da quando **Aristotele** (384-322 a.C.) aveva inibito di fatto ai matematici l'uso dell'infinito attuale: dopo di lui (ipse dixit!), nessun matematico avrebbe osato accettare come rigorosa una dimostrazione basata sul concetto di infinito.
Citiamo, prendendoli fra tanti, i pensieri di due grandi matematici, partendo da quello più vicino a noi, il francese **Jules-Henri Poincaré** (1854-1912): «*Non esiste un infinito attuale; ciò che noi chiamiamo infinito è soltanto la possibilità di creare incessantemente nuovi oggetti, per quanto numerosi siano gli oggetti già creati*».
L'altro matematico che aveva rifiutato l'infinito attuale è il grande **Gauss** [7]: «*Così io protesto contro l'uso di una grandezza infinita come compiutamente data, il che in matematica non è mai permesso*».
Cantor superò questo limite. E, in realtà, circa la sua originale creazione, non tutti erano della stessa opinione di Kronecker o Poincaré, e anzi vi furono di quelli che accettarono con entusiasmo la costruzione di Cantor e, fra questi, certamente **Hilbert** [8]. È sua la celebre esclamazione: «*Nessuno ci scaccerà mai dal paradiso che Cantor ha creato per noi*».

54.5 Funzioni calcolabili [9].

Le "invenzioni" di Cantor permettono di approfondire la riflessione sulle funzioni calcolabili alle quali abbiamo fatto un cenno nell'unità 28.
Qui vogliamo fare ancora un breve cenno alle scoperte dei matematici, senza soffermarci però sulle dimostrazioni.
Incominciamo a occuparci delle funzioni aritmetiche.
Una ***funzione aritmetica*** f(n) è una funzione a valori reali (o complessi), definita per ogni numero naturale non nullo, la quale esprime una particolare proprietà dei numeri naturali.
Per esempio, è una funzione aritmetica la funzione $\pi(n)$ la quale fornisce il numero dei numeri primi non maggiori di n. In particolare, ricordando ancora una volta che il numero 1 non si considera primo:

---
[6] **Kronecker**, Leopold; matematico tedesco, 1823-1891.
[7] **Gauss**, Carl Friedrich, 1777-1855.
[8] **Hilbert**, David; matematico tedesco, 1862-1943.
[9] Riguarda i soli Licei scientifici.

$$\pi(1)=0,\ \ \pi(5)=3,\ \ \pi(12)=5.$$

Un altro esempio di funzione aritmetica è la funzione $D(n)$ che esprime il numero dei divisori di n. In particolare:

$$D(1)=1,\ \ D(5)=2,\ \ D(12)=6.$$

Un terzo esempio di funzione aritmetica è costituito dalla funzione $\Phi(n)$ che fornisce il numero dei numeri minori di n e primi con esso (è chiamata *indicatore di Gauss* o *funzione di Eulero*). In particolare:

$$\Phi(1)=0,\ \ \Phi(5)=4,\ \ \Phi(12)=4.$$

Ricordiamo adesso che una funzione si dice ***calcolabile*** se e solo se esiste almeno un algoritmo che ne calcoli i valori. Altrimenti si dice ***non calcolabile***.

Ora, se F_C rappresenta l'insieme delle funzioni calcolabili e A indica l'insieme degli algoritmi, si dimostra quanto segue:

- $\text{card}(F_C) \le \text{card}(A)$;
- **l'insieme A degli algoritmi è al più numerabile**;
- (di conseguenza) anche l'insieme $\mathbf{F_C}$ **delle funzioni calcolabili è al più numerabile**;
- **l'insieme $\mathbf{F_A}$ delle funzioni aritmetiche è più che numerabile**.

La conseguenza più notevole di tutte queste proprietà è che **esistono funzioni aritmetiche non calcolabili**. Anzi queste sono in quantità infinitamente superiore al numero delle funzioni calcolabili.

Da qui a trovare una funzione aritmetica non calcolabile il passo non è affatto breve. Ma noi non possiamo occuparcene e dobbiamo fermarci qui.

VERIFICHE

1. Considerati due insiemi finiti A e B, si indicano, come noto, con N(A) ed N(B) i loro numeri cardinali. Spiega perché, in generale, risulta: $N(A\cup B) \le N(A)+N(B)$.
Quale condizione deve essere soddisfatta affinché si abbia: $N(A\cup B) = N(A)+N(B)$? Sotto questa condizione qual è il numero cardinale di $A\cap B$?

2. Si comprende facilmente che: $N(A\times B) = N(A)\cdot N(B)$, dove A e B sono insiemi finiti qualsiasi.
Tenendo presente questo fatto, risolvi le seguenti questioni:
a) Se $N(A\times B)=3$, quanto valgono N(A) ed N(B)? C'è una sola soluzione?
b) L'insieme $A\times B$ è costituito da 6 elementi. Quanti elementi ha ciascuno degli insiemi A e B? Quante soluzioni ci sono?
c) L'insieme $A\times B$ è costituito da 12 elementi. Quanto valgono N(A) ed N(B)?
d) Se $N(A\times B)=15$ ed $N(A^2)=9$, da quanti elementi è formato B?
e) L'insieme A^2 è formato da 25 elementi e l'insieme $A\times B$ da 20. Quanti elementi ha l'insieme B^2 ?

3. ESERCIZIO RISOLTO. Dimostrare che:
a) Se ad un insieme finito si aggiunge un elemento si ottiene ancora un insieme finito.
b) Se da un insieme infinito si toglie un elemento si ottiene ancora un insieme infinito.
RISOLUZIONE.
a) Sia A un insieme finito. Ciò significa che esiste un naturale n tale che A si può mettere in corrispondenza biunivoca con l'insieme $\{1, 2, \dots, n\}$. Se all'insieme A si aggiunge un elemento si ot-

tiene un insieme B che può mettersi in corrispondenza biunivoca con l'insieme $\{1, 2, ..., n, n+1\}$ e perciò anche B è finito.

b) Sia X un insieme infinito e sia Y l'insieme che si ottiene togliendo da X un elemento. Se Y fosse finito, aggiungendovi l'elemento tolto prima si otterrebbe di nuovo l'insieme X, che per la dimostrazione precedente dovrebbe essere finito, contro l'ipotesi che sia infinito. Quindi Y è infinito.

4. Dimostrare che se ad un insieme infinito si aggiunge un elemento si ottiene ancora un insieme infinito.

5. Disegnare un grafo che spieghi in maniera convincente la numerabilità dell'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali.

6. Dimostrare che l'insieme dei multipli di un qualunque numero naturale n non nullo ha la potenza del numerabile.

7. Dimostrare che l'insieme dei numeri reali x tali che $0<x<1$ contiene almeno un sottoinsieme avente la potenza del numerabile.

8. Fornire una costruzione geometrica che evidenzi l'equipotenza tra:
- due qualsiasi segmenti;
- un segmento ed una semiretta;
- un segmento e la retta che lo contiene;
- una retta e una circonferenza;
- una retta e una parabola.

9. Spiegare in maniera convincente perché i numeri irrazionali sono più "numerosi" dei numeri razionali.

10. È lecito affermare che un quadrato contiene tanti punti quanti ne contiene un suo lato? Sapresti dare una spiegazione della risposta?

11. Fornisci almeno tre esempi di funzione aritmetica calcolabile.

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

DOMANDE.

1. Quando un insieme si dice infinito? Quando finito?
2. Fornire un esempio di somma di infiniti termini numerici, avente un valore finito.
3. Che significa che un insieme è numerabile?
4. È corretto affermare che i numeri primi sono in quantità minore dei numeri naturali?
5. Che significa che un insieme ha la potenza del continuo?
6. Risulta essere più numeroso l'insieme dei numeri razionali o quello degli irrazionali?
7. In cosa consiste l'ipotesi del continuo?
8. Una funzione si dice non calcolabile se non si è in grado di costruire un algoritmo che ne calcoli i valori. È vero o falso?

RISPOSTE.

1. Un insieme si dice infinito se è possibile metterlo in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria. Altrimenti si dice finito.

2. Basta considerare la somma:
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots,$$
il cui valore è 2.
3. Un insieme si dice numerabile se è possibile stabilire una corrispondenza tra l'insieme stesso e l'insieme dei numeri naturali.
4. No. Può sembrare sorprendente ma in realtà è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra i due insiemi e questo autorizza ad affermare che i numeri primi sono nella stessa quantità dei numeri naturali.
5. Si dice che un insieme ha la potenza del continuo se è possibile stabilire una corrispondenza tra l'insieme stesso e l'insieme dei numeri reali.
6. L'insieme degli irrazionali è più numeroso di quello dei razionali. Infatti i razionali e gli irrazionali formano i reali, i quali hanno potenza superiore a quella dei razionali. Se gli irrazionali avessero potenza minore o uguale a quella dei razionali questo (che, cioè, i reali abbiano potenza maggiore di quella dei razionali) non potrebbe accadere. Dunque gli irrazionali devono avere la medesima potenza dei reali e dunque maggiore di quella dei razionali.
7. L'ipotesi del continuo è una congettura formulata da Cantor nel 1878, in base alla quale si afferma che non esiste alcuna potenza fra il numerabile ed il continuo.
8. È falso. Una funzione si dice non calcolabile se non esiste proprio alcun algoritmo che ne calcoli i valori.

LETTURA

[tratta da G. Galilei, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, 1638]

Galileo e l'infinito

[…]
Simplicio. Qui nasce subito il dubbio, che mi pare insolubile: ed è, che sendo noi sicuri trovarsi linee una maggior dell'altra, tutta volta che amendue contenghino punti infiniti, bisogna confessare trovarsi nel medesimo genere una cosa maggior dell'infinito, perché la infinità de i punti della linea maggiore eccederà l'infinità de i punti della minore. Ora questo darsi un infinito maggior dell'infinito mi par concetto da non poter esser capito in verun modo.
Salviati. **Queste son di quelle difficoltà che derivano dal discorrer che noi facciamo col nostro intelletto finito intorno a gl'infiniti, dandogli quelli attributi che noi diamo alle cose finite e terminate;** il che penso che sia inconveniente, perché stimo che questi attributi di maggioranza, minorità ed egualità non convenghino a gl'infiniti, de i quali non si può dire, uno esser maggiore o minore o eguale all'altro. Per prova di che già mi sovvenne un sì fatto discorso, il quale per più chiara esplicazione proporrò per interrogazioni al Sig. Simplicio, che ha mossa la difficoltà. Io suppongo che voi benissimo sappiate quali sono i numeri quadrati, e quali i non quadrati.
Simplicio. So benissimo che il numero quadrato è quello che nasce dalla moltiplicazione d'un altro numero in se medesimo: e così il quattro, il nove, etc., son numeri quadrati, nascendo quello dal dua, e questo dal tre, in se medesimi moltiplicati.
Salviati. Benissimo: e sapete ancora, che sì come i prodotti si dimandano quadrati, i producenti, cioè quelli che si multiplicano, si chiamano lati o radici; gli altri poi, che non nascono da numeri multiplicati in se

stessi, non sono altrimenti quadrati. Onde se io dirò, i numeri tutti, comprendendo i quadrati e i non quadrati, esser più che i quadrati soli, dirò proposizione verissima: non è così?
Simplicio. Non si può dir altrimenti.
Salviati. Interrogando io di poi, quanti siano i numeri quadrati, si può con verità rispondere, loro esser tanti quante sono le proprie radici, avvenga che ogni quadrato ha la sua radice, ogni radice il suo quadrato, né quadrato alcuno ha più d'una sola radice, né radice alcuna più d'un quadrato solo.
Simplicio. Così sta.
Salviati. Ma se io domanderò, quante siano le radici, non si può negare che elle non siano quante tutti i numeri, poiché non vi è numero alcuno che non sia radice di qualche quadrato; e stante questo, converrà dire che i numeri quadrati siano quanti tutti i numeri, poiché tanti sono quante le lor radici, e radici son tutti i numeri: e pur da principio dicemmo, tutti i numeri esser assai più che tutti i quadrati, essendo la maggior parte non quadrati. E pur tuttavia si va la moltitudine de i quadrati sempre con maggior proporzione diminuendo, quanto a maggior numeri si trapassa; perché sino a cento vi sono dieci quadrati, che è quanto dire la decima parte esser quadrati; in dieci mila solo la centesima parte sono quadrati, in un millione solo la millesima: e pur nel numero infinito, se concepir lo potessimo, bisognerebbe dire, tanti essere i quadrati quanti tutti i numeri insieme.
Sagredo. Che dunque si ha da determinare in questa occasione?
Salviati. Io non veggo che ad altra decisione si possa venire, che a dire, infiniti essere tutti i numeri, infiniti i quadrati, infinite le loro radici, né la moltitudine de' quadrati esser minore di quella di tutti i numeri, né questa maggior di quella, ed in ultima conclusione, gli attributi di eguale maggiore e minore non aver luogo ne gl'infiniti, ma solo nelle quantità terminate. E però quando il Sig. Simplicio mi propone più linee diseguali, e mi domanda come possa essere che nelle maggiori non siano più punti che nelle minori, io gli rispondo che non ve ne sono né più né manco né altrettanti, ma in ciascheduna infiniti: o veramente se io gli rispondessi, i punti nell'una esser quanti sono i numeri quadrati, in un'altra maggiore quanti tutti i numeri, in quella piccolina quanti sono i numeri cubi, non potrei io avergli dato sodisfazione col porne più in una che nell'altra, e pure in ciascheduna infiniti? E questo è quanto alla prima difficoltà.
Sagredo. Fermate in grazia, e concedetemi che io aggiunga al detto sin qui un pensiero, che pur ora mi giugne: e questo è, che, stanti le cose dette sin qui, parmi che non solamente non si possa dire, un infinito esser maggiore d'un altro infinito, ma né anco che e' sia maggior d'un finito, perché se 'l numero infinito fusse maggiore, v. g., del millione, ne seguirebbe, che passando dal millione ad altri e ad altri continuamente maggiori, si camminasse verso l'infinito; il che non è: anzi, per l'opposito a quanto maggiori numeri facciamo passaggio, tanto più ci discostiamo dal numero infinito; perché ne i numeri, quanto più si pigliano grandi, sempre più e più rari sono i numeri quadrati in esso contenuti; ma nel numero infinito i quadrati non possono esser manco che tutti i numeri, come pur ora si è concluso; adunque l'andar verso numeri sempre maggiori e maggiori è un discostarsi dal numero infinito.
Salviati. E così dal vostro ingegnoso discorso si conclude, **gli attributi di maggiore minore o eguale non aver luogo non solamente tra gl'infiniti, ma né anco tra gl'infiniti e i finiti**.
[…]