

Prerequisiti:

- Possedere i primi elementi di probabilità e statistica.
- Possedere il concetto di probabilità condizionata.

L'unità riguarda il 2° biennio dei Licei e la 5ª classe degli Istituti Tecnici e degli Istituti Professionali.

## OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:

- *fornire esempi di due eventi compatibili e indipendenti ed esempi di due eventi compatibili e dipendenti*
- *avere consapevolezza che sono diversi il concetto di eventi incompatibili e quello di eventi indipendenti*
- *dimostrare la formula di Bayes e spiegarne il significato*
- *utilizzare la formula di Bayes in qualche semplice problema*
- *riconoscere situazioni problematiche diverse riconducibili a uno stesso modello matematico*

### 57.1 Eventi incompatibili ed eventi indipendenti.

### 57.2 Formula di Bayes.

#### *Verifiche.*

Una breve sintesi per domande e risposte.

## Formula di Bayes

## Unità 57

## 57.1 EVENTI INCOMPATIBILI ED EVENTI INDIPENDENTI

**57.1.1** Due concetti fondamentali di cui potresti già aver consapevolezza, riguardanti gli eventi casuali, sono i concetti di *eventi incompatibili* ed *eventi indipendenti*; e di riflesso quelli di *eventi compatibili* ed *eventi dipendenti*. Li richiamiamo comunque per un loro consolidamento e per qualche approfondimento.

- Due eventi casuali, A e B, si dicono **incompatibili** se  $A \cap B = \emptyset$ , cioè se i due eventi non si verificano contemporaneamente. In caso contrario, cioè se  $A \cap B \neq \emptyset$ , per cui i due eventi si possono verificare nel medesimo tempo, allora essi si dicono **compatibili**.

Evidentemente, se gli eventi A e B sono incompatibili la probabilità che si verifichino assieme è nulla, vale a dire  $p(A \cap B) = 0$ ; se sono compatibili è invece  $p(A \cap B) \neq 0$ .

È noto che, come che siano gli eventi casuali A e B, incompatibili o compatibili, vale la cosiddetta **regola della somma**:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B).$$

- Ricordato che con la scrittura  $p(A|B)$  <sup>(1)</sup> – che, com'è noto, si legge “pi di A se B” oppure “pi di A dato B” – si indica la probabilità di A condizionato da B, l'evento casuale A si dice **indipendente** da B se risulta  $p(A|B) = p(A)$ , cioè se il verificarsi dell'evento B non altera la probabilità di A. Se invece  $p(A|B) \neq p(A)$ , cioè se il verificarsi di B modifica la probabilità di A, allora l'evento A si dice **dipendente** da B.

È noto che vale la cosiddetta **regola del prodotto**:

$$p(A \cap B) = p(A|B) \cdot p(B).$$

Da qui, scambiando A con B, segue  $p(B \cap A) = p(B|A) \cdot p(A)$ . E siccome  $p(A \cap B) = p(B \cap A)$ , allora risulta:

$$[1] \quad p(A|B) \cdot p(B) = p(B|A) \cdot p(A).$$

Da questa relazione, se  $p(A|B) = p(A)$ , purché queste probabilità siano non nulle, vale a dire se A è indipendente da B, segue subito  $p(B|A) = p(B)$ , che è come dire che B è indipendente da A.

Insomma, se un evento A è indipendente da un evento B allora anche B è indipendente da A: si dice più semplicemente che i due eventi sono **indipendenti** (o **mutuamente indipendenti**).

Ti proponiamo adesso alcuni esercizi.

1. Fornisci esempi di due eventi che siano:
  - a) compatibili; b) incompatibili; c) dipendenti; d) indipendenti.
2. Siano A e B due eventi indipendenti. Dimostra che sono indipendenti anche gli eventi:

$$A \text{ e } \bar{B}; \quad \bar{A} \text{ e } B; \quad \bar{A} \text{ e } \bar{B},$$

dove  $\bar{A}$  e  $\bar{B}$  sono ovviamente gli eventi contrari di A e B rispettivamente.

Fornisci qualche esempio che verifichi quanto qui abbiamo affermato.

$$[R. \text{ Nel primo caso basta mostrare che } p(\bar{B}|A) = p(\bar{B}) \text{ e da qui ...}]$$

3. Si effettua un doppio lancio di un dado, le cui facce, numerate da 1 a 6, hanno la stessa probabilità di uscire. Considera i seguenti eventi:
  - A: il numero uscito nel primo lancio è 4;
  - B: la somma dei due numeri usciti è 7;
  - C: la somma dei due numeri usciti è 8;

<sup>1</sup> Ci corre l'obbligo di segnalare che alcuni autori indicano con la scrittura  $P_B(A)$  la probabilità di A se B.

D: i due numeri usciti sono uguali.

Spiegare perché gli eventi A e B sono indipendenti, così come lo sono gli eventi A e D, mentre sono dipendenti gli eventi A e C.

57.1.2 Si pone il problema di stabilire se esistano due eventi casuali, di probabilità non nulle, che siano:

- a) compatibili e dipendenti;                      b) compatibili e indipendenti;  
c) incompatibili e dipendenti;                    d) incompatibili e indipendenti.

- Mostriamo anzitutto che *esistono due eventi casuali compatibili e dipendenti*.

Consideriamo al riguardo l'esperimento di estrarre da un'urna due palline a caso, una dopo l'altra, senza reinserimento. Supponiamo che l'urna contenga 5 palline, di cui 3 bianche e 2 nere.

A sia l'evento "la prima pallina estratta è bianca";

B sia l'evento "la seconda pallina estratta è nera".

Tali eventi sono per l'appunto compatibili e dipendenti.

Quanto vale  $p(A \cap B)$ ? Quanto  $p(A \cup B)$ ?

- Mostriamo adesso che *esistono due eventi casuali compatibili e indipendenti*.

Consideriamo per questo l'esperimento del doppio lancio di una moneta (che supponiamo "onesto") nel gioco TESTA-CROCE.

A sia l'evento "nel primo lancio esce testa";

B sia l'evento "nel secondo lancio esce croce".

Si tratta di due eventi compatibili e indipendenti.

Quanto vale  $p(A \cap B)$ ? Quanto  $p(A \cup B)$ ?

- *La ricerca di eventi casuali incompatibili e dipendenti o di eventi incompatibili e indipendenti è inconcludente.* Ciò perché la distinzione fra eventi casuali indipendenti o dipendenti ha senso solo se essi sono compatibili. Se, al contrario, sono incompatibili allora il verificarsi di uno di essi esclude automaticamente che l'altro possa verificarsi. Ragion per cui non ha senso chiedersi se i due eventi sono indipendenti o dipendenti. O, se si preferisce, può anche dirsi che il verificarsi di uno dei due eventi condiziona il verificarsi dell'altro (che appunto non si può verificare) e perciò i due eventi sono dipendenti.
- Che poi sia escluso che possano presentarsi due eventi casuali (di probabilità non nulle) incompatibili e indipendenti è assicurato dal seguente teorema.

**TEOREMA.** Siano due eventi casuali di probabilità non nulle. Se sono incompatibili allora non possono essere indipendenti e se sono indipendenti allora non possono essere incompatibili.

**DIMOSTRAZIONE.** Siano A e B i due eventi di probabilità non nulle, ossia:  $p(A) \neq 0$ ,  $p(B) \neq 0$ .

Se sono incompatibili allora  $p(A \cap B) = 0$ . D'altro canto, se fossero indipendenti sarebbe:  $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$ , ossia  $p(A \cap B) \neq 0$  dal momento che  $p(A) \neq 0$  e  $p(B) \neq 0$ . E ciò è in contraddizione con la loro incompatibilità. Quindi i due eventi non possono essere indipendenti.

Viceversa, se i due eventi sono indipendenti, allora risulta  $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) \neq 0$ . E quindi i due eventi non possono essere incompatibili, non potendo essere contemporaneamente  $p(A \cap B) = 0$ .

Il teorema precedente conferma il seguente fatto incontestabile ma spesso ignorato:

**Sono diversi i concetti di eventi incompatibili e di eventi indipendenti.**

57.1.3 A questo punto, allo scopo di farti riprendere familiarità con le questioni di probabilità, ti invitiamo a risolvere alcuni esercizi:

- ESERCIZIO 1. Si lancia per tre volte una moneta “testa-croce”. Le due facce hanno la stessa probabilità di uscire.
  - 1) Rappresenta con un grafo le possibili successioni in cui si presentano le due facce della moneta.
  - 2) Calcola quindi la probabilità di ottenere nei tre lanci:
    - almeno una volta “testa”;
    - almeno una volta “testa” ed almeno una volta “croce”;
    - almeno due volte “testa”;
    - due volte “testa” ed una volta “croce”.
  - 3) Prova a calcolare le stesse probabilità precedenti utilizzando altri procedimenti (probabilità composte, probabilità condizionata, eccetera).

$$[\mathbf{R.} \text{ 1) } \dots ; \text{ 2) } \frac{7}{8}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}; \text{ 3) } \dots ]$$

- ESERCIZIO 2. In un’urna vi sono 5 palline bianche e 3 palline nere.
  - 1) Si estrae una pallina a caso e, senza guardarla, la si accantona. Si estrae quindi una seconda pallina. Qual è la probabilità che quest’ultima sia bianca?
  - 2) Si estrae una pallina a caso e si vede che è bianca. Senza rimetterla nell’urna, si estrae una seconda pallina. Qual è la probabilità che quest’ultima sia nera?
  - 3) Si estrae una pallina a caso e si vede che è nera. Senza rimetterla nell’urna, si estrae una seconda pallina. Qual è la probabilità che quest’ultima sia bianca?

$$[\mathbf{R.} \frac{5}{8}, \frac{3}{7}, \frac{5}{7}]$$

- ESERCIZIO 3. Un’urna contiene delle palline che possono essere bianche o nere, di vetro o di plastica. Precisamente: 75 sono bianche, 62 sono di vetro; si sa inoltre che 27 palline bianche sono di vetro e 30 palline nere sono di plastica. Si estrae una pallina a caso. Calcolare la probabilità che sia:
  - 1) nera; 2) di vetro; 3) nera e di vetro; 4) nera ma non di vetro;
  - 5) di vetro ma non nera; 6) non nera e non di vetro.

$$[\mathbf{R.} \text{ 1) } 45,26\%; \text{ 2) } 43,07\%; \text{ 3) } 23,36\%; \text{ 4) } 21,90\%; \text{ 5) } 19,71\%; \text{ 6) } 35,04\% ]$$

- ESERCIZIO 4. In tre urne, contrassegnate con i numeri 1-2-3, vengono messe a caso tre buste, una in ogni urna, esse pure contrassegnate con i numeri 1-2-3. Calcolare la probabilità che capiti nell’urna che porta lo stesso numero:
  - 1) almeno una busta; 2) una ed una sola busta; 3) una busta al più.

$$[\mathbf{R.} \text{ 1) } 66,67\% ; \text{ 2) } 50\% ; \text{ 3) } 83,33\% ]$$

- ESERCIZIO 5. Due persone – A e B – decidono di giocare alcune partite. Ogni partita si conclude con la vittoria di uno dei due giocatori, le cui probabilità di vincita sono le stesse. Vince l’intera posta il giocatore che arriva per primo a vincere 5 partite. Dopo 6 partite, A ne ha vinte 2 e B ne ha vinte 4. A questo punto i giocatori decidono di smettere. Come deve essere ripartita la posta?

$$[\mathbf{R.} \text{ Nel rapporto } 1:7 \text{ tra A e B}]$$

- **Ⓜ** ESERCIZIO 6. Giuseppe propone all’amico Antonio, che è un bravo matematico, il seguente problema: «In queste quattro buste ci sono delle figurine di calciatori, ma non ci sono due buste con un ugual numero di figurine. Nella busta con il minor numero di figurine c’è quella di Gattuso, che però non è da sola. Inoltre, il numero totale delle figurine è un numero dispari, mentre il prodotto dei numeri di figurine contenute nelle varie buste è 1260. Se indovini qual è il totale delle figurine te le regalo.» Quale probabilità ha Antonio di aggiudicarsi le figurine?

$$[\mathbf{R.} \text{ Se è veramente bravo in matematica, trova che ha probabilità } 1/3]$$

**57.1.4** Del seguente esercizio vogliamo invece fornire anche la risoluzione, per la quale però richiediamo la tua collaborazione.

- **ESERCIZIO 1.** In un salone ci sono 4 lampadari:
  - il lampadario  $L_1$  ha 4 lampadine di cui 3 buone e 1 fulminata;
  - il lampadario  $L_2$  ha 4 lampadine di cui 2 buone e 2 fulminate;
  - il lampadario  $L_3$  ha 3 lampadine di cui 2 buone e 1 fulminata;
  - il lampadario  $L_4$  ha 3 lampadine di cui 1 buona e 2 fulminate.

Calcolare la probabilità che, scegliendo a caso sia un lampadario sia una lampadina dello stesso, questa risulti buona.

**RISOLUZIONE.** Diciamo:

- $A$  l'evento «la lampadina scelta è buona»;
- $E_i$  l'evento «il lampadario scelto è  $L_i$ » ( $i=1,2,3,4$ );
- $H|E_i$  l'evento «la lampadina scelta dal lampadario  $L_i$  è buona».

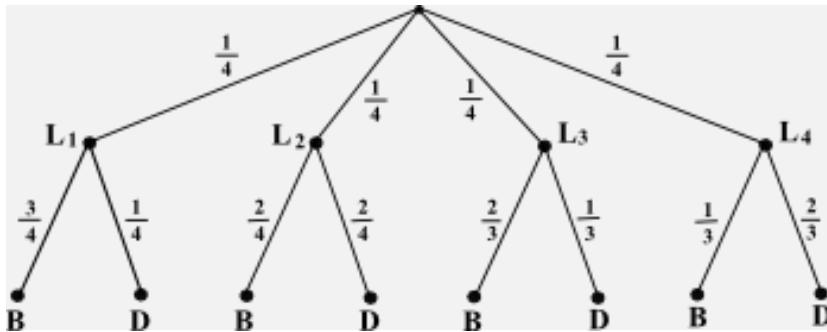


FIG. 1

Dopo aver calcolato (puoi farlo da solo) che (Fig. 1):

$$p(E_1)=p(E_2)=p(E_3)=p(E_4)=\frac{1}{4}, \quad p(A|E_1)=\frac{3}{4}, \quad p(A|E_2)=\frac{2}{4}, \quad p(A|E_3)=\frac{2}{3}, \quad p(A|E_4)=\frac{1}{3},$$

si ottiene: 
$$p(A)=\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{16}.$$

L'esercizio ci tornerà subito utile. Ma prima prova da solo a risolvere questi altri esercizi.

- **ESERCIZIO 2.** Un'azienda produce pezzi di ricambio, utilizzando 3 macchinari diversi: A, B, C. Tra i pezzi prodotti ve ne sono di difettosi, nella percentuale espressa dalla seguente tabella (Tab. 1). Scelti a caso un macchinario ed un pezzo tra quelli da esso prodotti, calcolare la probabilità che tale pezzo sia difettoso.

Macchinario	A	B	C
Pezzi difettosi	2,5%	1,7%	2,1%

TAB. 1

- **ESERCIZIO 3.** In un gruppo di persone i fumatori sono nel rapporto 1/3 con i non fumatori. Tra i fumatori sono nella misura del 72% coloro che accusano problemi alle vie respiratorie mentre questa percentuale scende al 13% fra i non fumatori. Scelta a caso una delle persone del gruppo, qual è la probabilità che abbia problemi alle vie respiratorie?
- **ESERCIZIO 4.** In due urne,  $U_1$  e  $U_2$ , sono poste 3 palline, di cui 2 bianche ed 1 nera, in uno dei seguenti

modi:

- a) tutte le palline nell'urna U1 e nessuna nell'urna U2.
- b) due palline bianche nell'urna U1 e la pallina nera nell'urna U2;
- c) una pallina bianca nell'urna U1 e le altre nell'urna U2;

Si sceglie a caso un'urna e da essa si estrae a caso una pallina. È meno probabile che sia bianca nel caso a), nel caso b) o nel caso c)? In quale caso è più probabile che sia bianca?

## 57.2 FORMULA DI BAYES

**57.2.1** Con riferimento agli esercizi del paragrafo 57.1.4, ci domandiamo adesso:

- Scelta a caso una delle lampadine e constatato che è buona, qual è la probabilità che provenga dal lampadario  $L_1$ ? (Es. 1)
- Scelto a caso un pezzo e constatato che è difettoso, qual è la probabilità che sia stato prodotto dal macchinario A? (Es. 2)
- Scelta a caso una delle persone del gruppo e constatato che ha problemi alle vie respiratorie, qual è la probabilità che sia un fumatore? (Es. 3)
- Scelta a caso una pallina e constatato che è bianca, qual è la probabilità che provenga dall'urna U1 in ciascuno dei casi considerati a), b), c)? (Es. 4)

Il modello matematico che permette di risolvere tali questioni non è di facile intuizione, ma pure non è difficile da trovare. Esso è basato su una formula che è immediata conseguenza della precedente formula [1]. Da questa formula si deduce infatti la seguente relazione, nota come *formula di Bayes* (la quale esprime il cosiddetto *teorema di Bayes*, detto anche *teorema della probabilità delle cause*):

$$p(A|B) = \frac{p(B|A) \cdot p(A)}{p(B)}.$$

Prende il nome dal matematico che la scoprì, il reverendo inglese **Thomas Bayes** (1702-1761).

La formula fu pubblicata, per la prima volta, nel 1763, dopo la morte del suo autore, ma divenne celebre soltanto dopo che il francese **Pierre Simon de Laplace** (1749-1827) la rispolverò o forse, come sostengono alcuni storici, la ritrovò da solo senza conoscere il lavoro di Bayes. Egli la incluse comunque sia nel celebre trattato *Teoria analitica delle probabilità* (1812) sia nel *Saggio filosofico sulle probabilità* (1814).

A dirla tutta, molti storici della matematica asseriscono che Laplace, grande scienziato, fosse però un vero e proprio opportunista e arrivista, sempre pronto a schierarsi col potente di turno. Egli avrebbe utilizzato spesso risultati scoperti da altri studiosi senza mai citarli, dando così ad intendere che fossero farina del suo sacco. Lo stesso sarebbe accaduto con la formula di Bayes, che Laplace utilizza per la prima volta in una memoria del 1774 intitolata *Sulla probabilità delle cause dei successi*, senza citare Bayes. Che invece citerà nella *Teoria analitica delle probabilità*.

Colui che per primo denominò *teorema di Bayes* il “teorema della probabilità delle cause” fu il matematico e logico britannico **Augustus De Morgan** (1806-1871), il quale volle in questo modo rimarcare che la priorità della scoperta andava attribuita al suo compatriota Thomas Bayes.

**57.2.2** La formula di Bayes permette di risolvere tutte le questioni proposte sopra, nelle quali **si richiede di stabilire la probabilità di una causa, noto che sia il successo.**

- Incominciamo con la prima di esse, vale a dire con l'esercizio dei lampadari. Ricordiamo, anzitutto, che:  $p(E_1)=1/4$ ,  $p(A|E_1)=3/4$ ,  $p(A)=9/16$ . In virtù della formula di Bayes risulta:

$$p(E_1|A) = \frac{p(A|E_1) \cdot p(E_1)}{p(A)} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{9}{16}} = \frac{1}{3}.$$

- Passiamo adesso alla terza delle questioni proposte sopra, vale a dire a quella dei fumatori. Per questo indichiamo con:
  - F l'evento "la persona scelta è un fumatore",
  - D l'evento "la persona scelta soffre di disturbi alle vie respiratorie",
  - F|D l'evento, ovviamente, "la persona scelta è un fumatore sapendo che soffre di disturbi alle vie respiratorie".

Per la formula di Bayes:

$$p(F|D) = \frac{p(D|F) \cdot p(F)}{p(D)},$$

dove, essendo D|F l'evento "la persona scelta soffre di disturbi alle vie respiratorie sapendo che è un fumatore", si ha:  $p(D|F)=0,72$ ; mentre risulta:  $p(F)=1/4$  (perché?). Si tratta allora di calcolare  $p(D)$ . Per questo è conveniente riferirsi alla figura 2, la cui lettura non dovrebbe creare difficoltà. Si ha:

$$p(D) = \frac{1}{4} \cdot 0,72 + \frac{3}{4} \cdot 0,13.$$

Pertanto, a conti fatti, risulta:  $p(D|F) \approx 64,86\%$ .

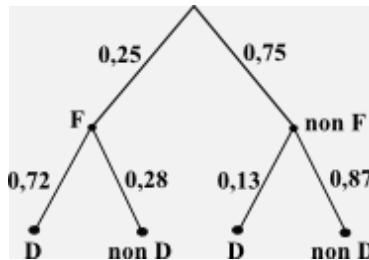


FIG. 2

- La seconda e la quarta questione, con le quali abbiamo introdotto l'unità, si risolvono alla stessa maniera delle altre due. Te le lasciamo per esercizio.

Ti proponiamo inoltre di risolvere quest'altra questione.

In 4 urne vi sono palline bianche e palline nere, nelle seguenti composizioni:

- nell'urna  $U_1$  vi sono 2 palline bianche e una pallina nera;
- nell'urna  $U_2$  vi sono una pallina bianca e 2 palline nere;
- nell'urna  $U_3$  vi sono 2 palline bianche e 3 palline nere;
- nell'urna  $U_4$  vi sono 3 palline bianche e 2 palline nere.

Si sceglie a caso un'urna e da essa si estrae a caso una pallina: si constata che è bianca. Qual è la probabilità che la pallina provenga dall'urna  $U_1$ ? Quale che provenga dall'urna  $U_2$ ? O dall'urna  $U_3$ ? O dall'urna  $U_4$ ? Quanto vale la somma delle 4 probabilità trovate? Ti aspettavi che fosse così?

**57.2.3** Prendiamo adesso in esame altre questioni che si risolvono con il ricorso alla formula di Bayes.

- **PROBLEMA 1.** Lancio due monete, le cui facce hanno la medesima probabilità di uscire, e vedo una “testa”. Qual è la probabilità che sia uscita una seconda “testa”?

**RISOLUZIONE.** La questione può essere risolta ricorrendo alla formula di Bayes: lasciamo a te questo compito. In realtà, in questo caso il ricorso a quella formula è un tantino esagerato. È infatti possibile un procedimento risolutivo del tutto elementare. Lo andiamo a descrivere.

Nel lancio delle due monete i casi possibili sono i seguenti, dove T sta per “testa” e C per “croce”:

TT, TC, CT, CC.

Se vedo una “testa” il caso CC non può proprio presentarsi ed in uno solo degli altri tre casi, tutti ugualmente possibili, si può presentare una seconda “testa”, nel caso TT. La probabilità cercata è  $1/3$ .

- **PROBLEMA 2.** In un’urna ci sono due palline: una è bianca, l’altra può essere bianca o nera. Si estrae a caso una pallina e si constata che è bianca. È vero che la probabilità che la pallina rimasta nell’urna sia essa pure bianca è  $1/2$ ?

**RISOLUZIONE.** È la risposta che solitamente si dà senza riflettere. Facciamo vedere che è sbagliata.

Conviene immaginare che ci siano due urne: una, urna U, contenente due palline bianche; l’altra, urna V, contenente una pallina bianca ed una nera. Ora, scelta a caso un’urna ed estratta a caso da essa una pallina e constatato che è bianca, la pallina rimasta nell’urna è bianca solo nel caso che sia stata scelta l’urna U. Dunque, ricorrendo al teorema di Bayes, la probabilità che la pallina rimasta nell’urna sia bianca è (costruisci da te un grafo che illustri la situazione):

$$p(U|B) = \frac{p(B|U) \cdot p(U)}{p(B)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

- **PROBLEMA 3.** Si dispone di 5 monete, di cui 4 regolari (TESTA su una faccia e CROCE sull’altra) e 1 truccata (TESTA su entrambe le facce). Si sceglie a caso una moneta e, dopo averla lanciata per 4 volte, si ottiene 4 volte TESTA. Trovare qual è la probabilità che la moneta scelta sia quella truccata.

**RISOLUZIONE.** Consideriamo gli eventi: E: «la moneta scelta è truccata», H: «in 4 lanci consecutivi esce TESTA». Chiaramente dobbiamo calcolare la probabilità di E sapendo che si è verificato H; cioè  $p(E|H)$ . Applichiamo la formula di Bayes tenendo presente che (Fig. 3):

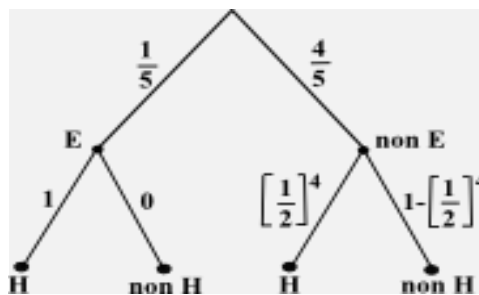


FIG. 3

- $p(E)$  è la probabilità che sia scelta la moneta truccata senza avere altre informazioni; per cui:

$$p(E) = \frac{1}{5};$$

- $p(H|E)$  è la probabilità che in 4 lanci consecutivi esca TESTA sapendo che la moneta è truccata (ha TESTA su entrambe le facce); per cui:

$$p(H|E) = 1;$$

-  $p(\bar{E})$  è la probabilità che sia scelta una moneta non truccata senz'altre informazioni; per cui:

$$p(\bar{E}) = \frac{4}{5};$$

-  $p(H|\bar{E})$  è la probabilità che in 4 lanci consecutivi esca TESTA sapendo che la moneta scelta non è truccata; per cui:

$$p(H|\bar{E}) = \left(\frac{1}{2}\right)^4;$$

-  $p(H) = p(H|E) \cdot p(E) + p(H|\bar{E}) \cdot p(\bar{E}) = \frac{1}{5} \cdot 1 + \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}$ .

Dunque:

$$p(E|H) = \frac{p(H|E) \cdot p(E)}{p(H)} = \frac{\frac{1}{5} \cdot 1}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{5} = 80\%.$$

• **PROBLEMA 4.** In una di tre buste sigillate c'è un premio mentre le altre due sono vuote. Io so in quale busta c'è il premio ma tu non lo sai. Scegli una busta a caso, dopo di che io scarto, tra le due buste rimaste, una busta in cui non c'è il premio e te la mostro. Ti do la possibilità di scambiare la tua busta con quella rimasta. Pensi che sia conveniente tale scambio oppure ritieni che comunque tu faccia non modifichi la probabilità di ottenere il premio?

**RISOLUZIONE.** Ad un'analisi superficiale può sembrare che lo scambio non modifichi la probabilità  $1/3$  di una scelta casuale della busta con il premio. Se però si riflette attentamente ci si rende conto che l'aver scartato una delle due buste senza il premio fornisce un'informazione aggiuntiva che comporta una strategia che dovrebbe migliorare quella probabilità. Giacché le possibilità sono due (tieni la busta originaria o la scambi con quella rimasta), siccome nel primo caso la probabilità rimane  $1/3$ , c'è da ritenere che convenga lo scambio.

Questo ragionamento, condotto in modo non ortodosso, può essere formalizzato ricorrendo proprio alla formula di Bayes.

Supponiamo allora che la busta da te scelta a caso sia la busta 1 (indichiamo con busta 2 e busta 3 le altre due buste). Io, che so dov'è il premio, scarto la busta 2, che dunque non contiene il premio<sup>(2)</sup>.

Si presentano tre situazioni a seconda della busta contenente il premio. Chiamiamo  $B_i$  ( $i=1,2,3$ ) l'evento "il premio è nella busta  $i$ " ed  $S$  l'evento "è scartata la busta 2, che non contiene il premio".

Esaminiamo quindi le tre situazioni, tenendo presente che *a priori* la probabilità di scegliere fra le tre buste quella con il premio è  $1/3$ , mentre la probabilità di scartare una delle due buste senza premio è  $1/2$ .

1) **Premio in busta 1.** La probabilità di scartare la busta 2, cioè una busta senza premio è  $1/2$  dal momento che le due buste rimaste sono entrambe senza premio. Dunque:  $P(S|B_1) = 1/2$ . Di conseguenza la probabilità che il premio sia nella busta 1, sapendo che è stata scartata la busta 2 è:

$$p(B_1|S) = \frac{p(S|B_1) \cdot p(B_1)}{p(S)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

2) **Premio in busta 2.** È 0 la probabilità di scartare la busta 2, che è proprio la busta con il premio.

<sup>2</sup> Nulla cambia se si fanno ipotesi diverse.

Dunque:  $P(S|B_2)=0$ . Di conseguenza la probabilità che il premio sia nella busta 2, sapendo che è stata scartata la busta 2 è:

$$p(B_2|S) = \frac{p(S|B_2) \cdot p(B_2)}{p(S)} = \frac{0 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = 0.$$

Ma questo per la verità si sapeva senza fare tanti conti.

3) Premio in busta 3. Lo scarto della busta 2 questa volta è certo dal momento che è l'unica delle due buste rimaste che non contiene il premio. La probabilità di scartare la busta 2 è dunque:  $P(S|B_3)=1$ . Di conseguenza la probabilità che il premio sia nella busta 3, sapendo che è stata scartata la busta 2 è:

$$p(B_3|S) = \frac{p(S|B_3) \cdot p(B_3)}{p(S)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

In conclusione, dopo che hai scelto a caso la busta 1 ed è stata scartata la busta 2, la probabilità che il premio sia nella busta 1 è  $1/3$  e quello che sia nella busta 3 è  $2/3$ . Conviene certamente lo scambio.

Ad onor del vero, quello esposto è il modo “complicato” di risolvere il problema. L’abbiamo riportato per fornire un’interessante applicazione della formula di Bayes. C’è in effetti una risoluzione semplice e immediata. Basta constatare che, accettando lo scambio fra la busta scelta originariamente e quella rimasta dopo averne scartato una senza il premio, è come se scegliessi due buste su tre. Per cui la nuova probabilità è  $2/3$ .

Altra modalità di risoluzione semplice. Bisogna tener presente che in origine puoi scegliere una busta senza il premio in due modi e la busta con premio in un solo modo. Ragion per cui, sintetizzando in apposita tabella (Tab. 2), si constata che la probabilità di vincere il premio in seguito allo scambio è  $2/3$ .

Scelta originaria	Busta senza premio (1)	Busta senza premio (2)	Busta con premio
Dopo lo scambio	Vinci il premio	Vinci il premio	Non vinci il premio

TAB. 2

**PROBLEMA 5.** Una comunità è suddivisa in classi (supponiamo 3 per fissare le idee: A, B, C). Il 42% dei soggetti della comunità appartiene alla classe A, il 35% alla classe B ed il resto alla classe C. Si sa poi che una certa caratteristica (la indichiamo per comodità con Q) contraddistingue alcuni soggetti della comunità nella percentuale seguente: presenta quella caratteristica il 15% dei soggetti della classe A, il 25% dei soggetti della classe B ed il 32% dei soggetti della classe C.

Si estrae a caso un soggetto della comunità e si constata che presenta la caratteristica Q.

- a) Qual è la probabilità che il soggetto appartenga alla classe A?
- b) Quale quella che appartenga alla classe B?
- c) Quale la probabilità che appartenga alla classe C?

**RISOLUZIONE** (indicazioni). Questo problema, che descrive una situazione generica, assurge a modello di molte situazioni analoghe. La sua risoluzione si basa sull’applicazione della formula di Bayes. La lasciamo a te, ma per facilitarti il compito ti forniamo il grafo (fig. 4) che sta alla base del procedimento risolutivo.

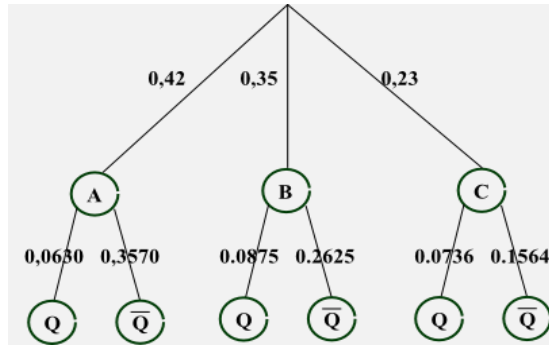


FIG. 4

**VERIFICHE <sup>(3)</sup>**

1. Una scuola è composta da 2 corsi completi equivalenti a 10 classi. Gli alunni (tutti) e gli alunni ripetenti sono distribuiti secondo la seguente tabella:

Classe	1 <sup>a</sup> A	1 <sup>a</sup> B	2 <sup>a</sup> A	2 <sup>a</sup> B	3 <sup>a</sup> A	3 <sup>a</sup> B	4 <sup>a</sup> A	4 <sup>a</sup> B	5 <sup>a</sup> B	5 <sup>a</sup> B
N° alunni	24	25	24	24	22	24	20	19	19	20
N° ripetenti	2	0	1	2	3	4	1	0	1	2

1. A) Trovare la probabilità che, prendendo a caso un alunno delle classi seconde, risulti ripetente.  
 B) Trovare la probabilità che, prendendo a caso un alunno di una classe scelta pure a caso, risulti non ripetente.
2. A) Trovare la probabilità che, scelto a caso un alunno e constatato che è ripetente, esso provenga dalla 3<sup>a</sup>A.  
 B) Trovare la probabilità che, scelto a caso un alunno e constatato che non è ripetente, provenga dalla 4<sup>a</sup>B

[R. 1A) ... , 1B) 92,86 % ; 2A) 19,10 % ; 2B) ...]

2. Tre famiglie  $F_1, F_2, F_3$  sono tali che: nella famiglia  $F_1$  ci sono 2 figli, entrambi maschi; nella famiglia  $F_2$  ci sono 3 figli, di cui due femmine e un maschio; nella famiglia  $F_3$  ci sono 3 figli, di cui una femmina e due maschi.

Calcolare la probabilità che:

- a) scelti a caso una famiglia e, in essa, un figlio, questo sia di sesso maschile;
- b) scelto a caso un figlio e constatato che è di sesso maschile, esso provenga dalla famiglia:
  - 1)  $F_1$ , 2)  $F_2$ , 3)  $F_3$ .

Quanto vale la somma di queste tre probabilità?

$$\left[ \text{R. a) } \frac{2}{3}; \text{ b1) } \frac{1}{2}, \text{ b2) } \frac{1}{6}, \dots \right]$$

3. Una ditta che fabbrica bottiglie suddivide il lavoro fra tre succursali: nella succursale A c'è uno scarto di bottiglie difettose pari al 2% di quelle prodotte dalla stessa succursale; nella succursale B lo scarto è pari all'1,5%; nella succursale C esso è del 2,2% .

Calcolare la probabilità che:

<sup>3</sup> I problemi (o gli esercizi) contrassegnati col simbolo ® sono risolti (totalmente o parzialmente) e la risoluzione è situata nella cartella "Integrazione 2", file "Matematica – Integrazione 2, unità 28-88", pubblicata in questo medesimo sito e scaricabile gratuitamente.

- 1) scegliendo a caso una delle 3 succursali ed una bottiglia prodotta da essa, questa bottiglia risulti buona;
- 2) scegliendo a caso una bottiglia della ditta e constatato che è difettosa, essa sia stata prodotta dalla succursale A.

[R. 1) 98,1% ; 2) 35,09% ]

4. I 90 numeri della Tombola sono ripartiti in 4 urne: l'urna A contiene i numeri da 1 a 20; l'urna B quelli da 21 a 35; l'urna C i numeri da 36 a 60; l'urna D contiene i numeri da 61 a 90. Calcolare la probabilità che:

- 1) scelta a caso un'urna ed estratto da essa un numero, questo sia divisibile per 3;
- 2) scelto a caso uno dei 90 numeri e constatato che è divisibile per 3, esso provenga dall'urna D.

[R. 1) 33,17% ; 2) 25,13% ]

5. Si hanno tre monete, una delle quali è truccata (TESTA su entrambe le facce). Si sceglie a caso una moneta e si effettuano 3 lanci.

- 1) Calcolare la probabilità che per 3 volte esca CROCE.
- 2) Sapendo che per 3 volte è uscita TESTA, calcolare la probabilità che la moneta scelta sia: a) truccata; b) non truccata.

[R. 1)  $\frac{1}{12}$  ; 2a)  $\frac{4}{5}$ , 2b) ... ]

6. Si dispone di N monete, una delle quali è truccata (TESTA su entrambe le facce). Si sceglie a caso una moneta e si effettuano h lanci.

- 1) Calcolare la probabilità che per h volte esca CROCE.
- 2) Sapendo che per h volte è uscita TESTA, calcolare la probabilità che la moneta scelta sia truccata.
- 3) Supposto che sia N=4, calcolare il minimo valore di h per il quale: a) sia almeno 1/5 la probabilità che per h volte esca CROCE; b) sia almeno 9/10 la probabilità che la moneta scelta sia truccata, sapendo che per h volte è uscita TESTA.

[R. 1)  $\frac{N-1}{N} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^h$  ; 2)  $\frac{2^h}{2^h+N-1}$  ; 3a) h=1, 3b) h=5 ]

7. In una scuola superiore vi sono 3 classi quinte, nelle quali gli alunni sono distribuiti per sezione e per sesso secondo la tabella sottostante:

	sezione	A	B	C
secco				
M		10	8	12
F		16	20	12

Calcolare la probabilità che:

- a) scelto a caso uno studente di quinta e constatato che è di sesso femminile, provenga dalla sezione A.
- b) scelti a caso una classe quinta e, in essa, una coppia di studenti, questa sia formata da due alunni di sesso differente.

[R. a) ... ; b)  $\approx 47,91\%$  ]

8. In seguito ad una indagine condotta tra gli ospiti di una comunità costituita da "italiani" e "stranieri", si è scoperto che tra gli italiani i tifosi di CALCIO sono il 72%, mentre tra gli stranieri sono il 53%. Scelto a caso uno degli ospiti della comunità e constatato che NON è un tifoso di CALCIO, qual è la

- probabilità che sia italiano? [R.  $\approx 37,33\%$ ]
9. Un gruppo di persone è formato per  $1/4$  da maschi maggiorenni, per  $1/3$  da femmine maggiorenni e per il resto da minorenni. Un virus ha colpito il 20% dei maschi maggiorenni, il 35% delle femmine maggiorenni e il 25% dei minorenni. Calcolare la probabilità che, scelta a caso una persona del gruppo e constatato che è stata colpita dal virus, sia un minorenne.
10. In un'urna ci sono due palline bianche, in una seconda urna ci sono due palline nere e in una terza urna ci sono una pallina bianca e una pallina nera. Scegli a caso un'urna ed estrai, sempre a caso, una delle due palline in essa contenute: è bianca. Saresti disposto a scommettere alla pari che la pallina rimasta nell'urna che hai scelto sia essa pure bianca?  
[Quesito assegnato nell'esame di Stato 2005, indirizzo sperimentale, sessione suppletiva]
11. Nell'urna U1 vi sono due palline bianche, nell'urna U2 due palline nere e nell'urna U3 vi sono una pallina bianca e una nera. La probabilità di scegliere l'urna U1 è a, quella di scegliere l'urna U2 è b; mentre sono uguali le probabilità di estrarre una pallina o l'altra delle due che ci sono in ciascuna urna. Si estraggono a caso un'urna e una delle due palline che essa contiene: si constata che questa pallina è bianca. Quale relazione sussiste fra a e b sapendo che sono uguali le probabilità che la pallina rimasta nell'urna scelta sia bianca o sia nera? [R.  $3a+b=1$ ]
12. Nell'urna U1 ci sono 3 palline bianche e 2 palline nere, nell'urna U2 ci sono 2 palline bianche e 3 palline nere. Si lancia un dado con le facce numerate da 1 a 6, aventi le stesse probabilità di uscire: se esce un divisore di 6 si sceglie l'urna U1, altrimenti si sceglie l'urna U2. Dall'urna così scelta si estrae a caso una pallina: si constata che è bianca. Qual è la probabilità che provenga dall'urna U1? Quale che provenga dall'urna U2? Quanto vale la somma di queste due probabilità? [R.  $3/4, \dots$ ]
13. Si lanciano due dadi con le facce numerate da "1" a "6", aventi tutte le stesse probabilità di uscire. Il prodotto dei due numeri usciti è 12. Qual è la probabilità che: a) almeno uno dei due numeri sia 3? b) nessuno dei due numeri sia 3? [R.  $\frac{11}{72}, \frac{25}{72}$ ]
14. Ci sono due dadi da gioco: - uno a forma di esaedro regolare con le facce numerate da 1 a 6, aventi le stesse probabilità di uscire; - l'altro a forma di ottaedro regolare con le facce numerate da 1 a 8, aventi le stesse probabilità di uscire. Si sceglie a caso uno dei due dadi e lo si lancia. a) Qual è la probabilità che esca un numero diverso da 7 e da 8? b) Sapendo che è uscito un numero diverso da 7 e da 8, è più probabile che il dado scelto sia quello a forma di esaedro regolare o quello a forma di ottaedro regolare? [R. a)  $7/8$ ; b) esaedro]
15. Uno stesso manufatto può essere prodotto da tre macchinari diversi: A, B, C. I pezzi prodotti dai tre macchinari in una giornata di lavorazione, compresi quelli difettosi, sono indicati nella sottostante tabella:

Macchinario	A	B	C
Pezzi prodotti			
totale	800	700	500
difettosi	32	35	25

- Si sceglie a caso uno dei pezzi prodotti in una giornata di lavorazione e si scopre che è difettoso. Calcolare le probabilità che esso sia stato prodotto da A, da B o da C. Quanto vale la somma delle tre probabilità trovate? [R.  $2/7, 5/14, \dots$ ]
16. Un'azienda produce pezzi di ricambio, utilizzando tre macchinari diversi: M1, M2, M3. Precisamente, in una giornata lavorativa: M1 produce 1230 pezzi di cui 50 difettosi, M2 ne produce 860 di cui 30 difettosi, M3 ne produce 945 di cui 38 difettosi. Si sceglie a caso uno dei pezzi prodotti in una

data giornata e si constata che è difettoso. Quant'è la probabilità che sia stato prodotto dal macchinario che ha la maggiore probabilità di produrre pezzi difettosi? Quant'è quella che sia stato prodotto dal macchinario che ha la minore probabilità di produrre pezzi difettosi [R.  $\approx 35,15\%$ ,  $\approx 30,14\%$ ]

17. Una ditta produce pezzi di ricambio, utilizzando tre macchinari diversi: A, B, C. I pezzi prodotti presentano tutti uno stesso difetto, ma non nella medesima percentuale. Precisamente, quelli prodotti dal macchinario A sono difettosi nel 2% dei casi, quelli prodotti da B lo sono nel 3% dei casi e quelli prodotti da D nel 4% dei casi. Ogni confezione dei pezzi prodotti è formata al 50% da pezzi provenienti dal macchinario A, al 30% dal macchinario B ed al 20% da C. Si tira fuori un pezzo a caso da una confezione e si constata che non è difettoso. Qual è la probabilità che provenga dal macchinario A? Quale quella che provenga da B? Quale quella che provenga da C? [R. A)  $\approx 50,36\%$ ; ...]
18. Tre associazioni di tifosi – A, B, C – sono costituite da persone che tifano “calcio” e/o “pallavolo”. Precisamente, i tifosi sono distribuiti nelle associazioni nelle percentuali indicate nella tabella sottostante:

Associazione	A	B	C
Sport preferito			
calcio	65%	70%	50%
pallavolo	45%	50%	70%

- Qual è la percentuale di tifosi dell'associazione A che tifano per entrambi gli sport?
  - Quale quella dell'associazione B?
  - Quale dell'associazione C?
- Si scelgono a caso una delle tre associazioni e un tifoso dell'associazione scelta.
  - Qual è la probabilità che sia un tifoso di calcio?
  - Qual è la probabilità che non sia tifoso di calcio?
  - Qual è la probabilità che sia un tifoso di entrambi gli sport?
- Si estrae a caso un associato e si constata che non è tifoso di calcio.
  - Qual è la probabilità che provenga dall'associazione A?
  - Quale dalla B?
  - Quale dalla C?
  - Quanto vale la somma di queste tre probabilità?

[R. 1A):  $80,75\%$ , ... ; 2B):  $\approx 38,33\%$ , 2C):  $\approx 83,58\%$ ; 3A):  $7/23$ , 3B): ..., 3C):  $10/23$ ; ...]

19. Un rivenditore di bibite rifornisce tre città: A, B, C. Di una partita di bibite egli si propone di consegnarne  $1/3$  nella città A,  $1/4$  nella città B e la parte rimanente nella città C. Sotto i tappi di alcune bibite della partita è indicato un premio. Precisamente i tappi con premio sono nella seguente misura:
- città A:  $1/30$  delle bibite da consegnare in questa città;
  - città B:  $1/50$  delle bibite da consegnare in questa città;
  - città C:  $1/60$  delle bibite da consegnare in questa città.

Si prende una bibita a caso e si constata che sotto il suo tappo non è indicato alcun premio. Calcolare la probabilità che provenga dal lotto di bibite da consegnare alla città A, da quello da consegnare alla città B o da quello da consegnare alla città C. Quanto vale la somma di queste tre probabilità?

[R. A: ..., B:  $\approx 25,08\%$ , C:  $\approx 41,94\%$ ; ... .]

20. Alla fase finale di una gara di tiro con l'arco partecipano 3 arcieri: Aldo, Giovanni e Giacomo. Ciascuno di loro ha già effettuato 100 tiri, ma con esiti leggermente diversi: Aldo ha centrato 85 volte il

bersaglio, Giovanni lo ha centrato 90 volte e Giacomo 95 volte. I tre hanno diritto ad un ultimo tiro. Una volta eseguito, si prende atto che il bersaglio è stato centrato una sola volta. Calcolare la probabilità che a farlo sia stato Aldo, quella che sia stato Giovanni e quella che sia stato Giacomo. Quanto vale la somma di queste tre probabilità?

[R. Aldo:  $\approx 31,48\%$ , Giovanni:  $\approx 33,33\%$ , Giacomo: ... ; ...]

21. Nel dado A le facce sono numerate da “1” a “6”; nel dado B due facce sono contrassegnate dal numero “1”, due dal numero “2” e due dal numero “3”; nel dado C due facce recano il numero “1”, due il numero “3” e due il numero “5”. Tutte le facce hanno le medesime probabilità di uscire. Sapendo che, in seguito ad un doppio lancio dello stesso dado, la somma dei due numeri usciti non supera 5, qual è la probabilità che il dado lanciato sia A? [R. 5/27]

22. In un’urna sono contenute 4 palline: si sa che una è bianca ed una è nera, mentre delle altre due non si conosce il colore ma di ciascuna di esse si sa che è bianca o nera. Inoltre tutte le palline hanno la stessa probabilità di essere estratte. Si estraggono a caso due palline dall’urna e si constata che sono di colore diverso. Qual è la probabilità che anche le due palline rimaste nell’urna siano di colore diverso?

[R. Conviene immaginare che ci siano 3 urne – X, Y, Z – contenenti ciascuna 4 palline, con questa composizione: X) BNBB, Y) BNB, Z) BNN; per cui ... la probabilità cercata è 4/7]

23. In un’urna sono contenute 3 palline, che possono essere bianche o nere ed hanno la stessa probabilità di essere estratte. Si estraggono a caso due palline dall’urna e si constata che sono bianche. Calcolare la probabilità che nell’urna vi siano: a) 3 palline bianche; b) 2 palline bianche e una nera.

[R. Conviene immaginare che ci siano 2 urne – X, Y – contenenti ciascuna 3 palline, con questa composizione: X) BBB, Y) BBN; per cui ...  $p(X)=3/4$ ,  $p(Y)=1/4$ ]

## UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

### DOMANDE.

- A e B sono due eventi casuali: in genere la probabilità di A sapendo che si è verificato B è diversa dalla probabilità di B sapendo che si è verificato A. È possibile che queste due probabilità siano uguali?
- Si effettua un doppio lancio di un dado, le cui facce, numerate da 1 a 6, hanno la stessa probabilità di uscire. Considera i seguenti eventi:  
E: La somma dei due numeri usciti è un multiplo di 3;  
F: La somma dei due numeri usciti è un numero primo.  
G: La somma dei due numeri usciti supera 6.  
Delle seguenti alternative, individuare l’unica corretta e fornire un’esauriente spiegazione della scelta operata:  
[A] Entrambi gli eventi E ed F sono dipendenti da G.  
[B] Nessuno dei due eventi E ed F è dipendente da G.  
[C] L’evento E è dipendente da G ma l’evento F non lo è.  
[D] L’evento F è dipendente da G ma l’evento E non lo è.
- È possibile fornire un esempio di due eventi casuali compatibili e dipendenti? È possibile fornire un esempio di due eventi casuali, di probabilità non nulle, incompatibili e indipendenti?
- Il sig. Verde ha due figli. Calcolare la probabilità che siano entrambi maschi in ciascuna delle seguenti situazioni:

- A) Non si dispone di alcuna informazione.  
 B) Si sa che il minore dei due figli è maschio.  
 C) Si sa che uno dei due figli è maschio.
5. Si lancia un dado con le facce numerate da 1 a 6, aventi tutte la stessa probabilità di uscire. Si considerino le seguenti probabilità:  
 $p$  = probabilità che esca un numero pari,  
 $p'$  = probabilità che esca un numero pari sapendo che è uscito un numero composto,  
 $p''$  = probabilità che esca un numero pari sapendo che è uscito un numero non composto.  
 Verificare che risulta  $p \neq p' + p''$ . Qual è invece una relazione generale che lega  $p$ ,  $p'$  e  $p''$ ?
6. Il sig. Rossi ha due figli, un maschio e una femmina. Il sig. Bianchi ha invece tre figli, un maschio e due femmine. Si sceglie a caso una delle due famiglie e, sempre a caso, uno dei figli: si constata che si tratta di una femmina. Qual è la probabilità che provenga dalla famiglia Rossi? Quale quella che provenga dalla famiglia Bianchi?
7. In un'urna ci sono tre palline: una nera e due rosse. Si estrae a caso una pallina e si constata che è rossa. Senza rimetterla nell'urna si estrae una seconda pallina: qual è la probabilità che anch'essa sia rossa?

**RISPOSTE.**

1. In effetti  $p(A|B) \cdot p(B) = p(B|A) \cdot p(A)$ , per cui di regola  $p(A|B) \neq p(B|A)$ . Se, tuttavia,  $p(A) = p(B) \neq 0$ , è evidente che risulta pure  $p(A|B) = p(B|A)$ . Si pensi, ad esempio, all'estrazione casuale di un numero della TOMBOLA ed agli eventi A: “il numero estratto è pari” e B: “il numero estratto è maggiore di 45”. Si verifica facilmente che risulta  $p(A|B) = p(B|A)$ .
2. [A] è l'alternativa corretta, giacché sia E sia F sono dipendenti da G, essendo:

$$p(E) = \frac{1}{3}, \quad p(E|G) = \frac{5}{21}, \quad p(F) = \frac{5}{12}, \quad p(F|G) = \frac{8}{21}.$$

3. Di esempi di due eventi casuali compatibili e dipendenti se ne possono fornire a iosa. Non è possibile invece fornire esempi di eventi casuali, di probabilità non nulle, incompatibili e indipendenti giacché non ne esistono. Si dimostra, infatti, che se due eventi casuali, di probabilità non nulle, sono incompatibili allora non possono essere indipendenti e se sono indipendenti allora non possono essere incompatibili.
4. I casi possibili, in mancanza di informazioni sul sesso dei due figli, sono i seguenti:

MM, MF, FM, FF,

dove M sta per maschio ed F per femmina e dove si è messo per primo il sesso del figlio maggiore. Ora, nella situazione A) risulta evidentemente:

$$p(MM) = \frac{1}{4}.$$

Nella situazione B) sono possibili solamente i seguenti casi: MM, FM. Quindi:

$$p(MM) = \frac{1}{2}.$$

Nella situazione C) i casi possibili sono invece questi: MM, MF, FM. Pertanto:

$$p(MM) = \frac{1}{3}.$$

Sei invitato a ritrovare quest'ultimo risultato utilizzando il teorema di Bayes.

5. Basta calcolare che  $p = 1/2$ ,  $p' = 1$ ,  $p'' = 1/4$  e constatare che  $p' + p'' \neq p$ . In realtà, chiamata  $p_1$  la probabilità che esca un numero composto, risulta:  $p = p'p_1 + p''(1-p_1)$ . Infatti, calcolato che  $p_1 = 1/3$ , risulta:

$$p'p_1 + p''(1 - p_1) = 1 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} = p.$$

In generale si ha  $p(H) = p(H|E) \cdot p(E) + p(H|\bar{E}) \cdot p(\bar{E})$ .

6. La probabilità che la figlia femmina provenga dalla famiglia Rossi è:

$$p(R|F) = \frac{P(F|R) \cdot p(R)}{p(F|R) \cdot p(R) + p(F|B) \cdot p(B)}.$$

Siccome:  $p(F|R)=1/4$ ,  $p(R)=p(B)=1/2$ ,  $p(F|B)=1/3$ , allora, a conti fatti:  $p(R|F)=3/7$ . La probabilità che la figlia femmina provenga dalla famiglia Bianchi è, evidentemente:  $p(B|F)=4/7$ .

7. Se si risolve istintivamente, senza riflettere, si può essere indotti a fare questo pseudo-ragionamento: è stata estratta una pallina rossa, quindi nell'urna rimangono una pallina rossa ed una pallina nera, per cui la probabilità di estrarre ancora pallina rossa è  $1/2$ . Tutto sbagliato. L'errore consiste nel fatto che non si è tenuto conto che la pallina rossa estratta per prima può essere estratta in due modi diversi: pallina rossa R1 oppure pallina rossa R2. Ragionando correttamente sia in modo elementare sia ricorrendo alla formula di Bayes si trova che la probabilità cercata è  $2/3$ . Prova da solo.