

Prerequisiti:

- Risolvere equazioni algebriche di 1° grado ed equazioni esponenziali

Questa unità è rivolta al 2° biennio del seguente indirizzo dell'Istituto Tecnico, settore Tecnologico: Agraria, Agroalimentare e Agroindustria.

#### OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:

- *enunciare il principio di equivalenza finanziaria*
- *risolvere problemi di capitalizzazione semplice e composta anche servendosi di strumenti di calcolo automatico*
- *risolvere problemi sulle rendite*
- *redigere un piano di ammortamento ed esplicitarlo mediante l'uso di strumenti informatici*

- 61.1** Situazioni economiche e principio di equivalenza finanziaria.
- 61.2** Capitalizzazione semplice.
- 61.3** Capitalizzazione composta.
- 61.4** Accumulazioni, rendite e ammortamenti.

*Verifiche.*

Una breve sintesi per domande e risposte.  
Complementi: TAN e TAEG.

## Cenni di matematica finanziaria

### Unità 61

## 61.1 SITUAZIONI ECONOMICHE E PRINCIPIO DI EQUIVALENZA FINANZIARIA

**61.1.1** Consideriamo la seguente operazione, che si realizza in due fasi:

- la persona A cede in prestito alla persona B la somma C al tempo 0 (per convenzione chiamiamo “tempo 0” il momento in cui ha inizio l’operazione);
- la persona B restituisce alla persona A la somma M al tempo t (ovviamente  $t > 0$ ).

L’operazione – detta comunemente *operazione finanziaria* – comporta uno scambio di somme tra le due persone in due epoche diverse. Tali persone possono essere persone fisiche o enti: si indicano con il termine generico di *soggetti*.

Il soggetto A è detto più propriamente *creditore* (o *mutuante*); il soggetto B *debitore* (o *mutuatario*).

La differenza  $M - C$  si chiama *interesse* maturato dalla somma C nel tempo t.

L’operazione finanziaria si considera equa se vale il seguente principio:

**PRINCIPIO DI EQUIVALENZA FINANZIARIA.** Possedere la somma C al tempo 0 equivale, secondo un’opportuna convenzione, a possedere la somma M al tempo t.

**61.1.2** Questo principio, dunque, rende equivalenti la coppia ordinata  $(C, 0)$  e la coppia ordinata  $(M, t)$  in base ad un’opportuna convenzione della quale diremo fra breve.

Ogni coppia ordinata importo-tempo si chiama *situazione economica*.

Pertanto il principio di equivalenza finanziaria rende appunto equivalenti (in base ad un’opportuna convenzione) due situazioni economiche. Ossia stabilisce un legame fra le due somme C ed M e il tempo t.

Per esempio, un legame potrebbe essere questo:

$$M - C = k C t,$$

dove k è una costante.

Da ciò discendono due situazioni:

1. La somma prestata C può essere espressa per mezzo della somma M e del tempo t.  
In questo caso si dice che «C è il **valore attuale**, al tempo 0, della somma M esigibile al tempo t».
2. La somma M da restituire può essere espressa per mezzo della somma C e del tempo t.  
In questo caso si dice che «M è il **montante**, al tempo t, della somma C disponibile al tempo 0».

Con riferimento all’esempio precedente, il montante e il valore attuale sono espressi dalle formule seguenti:

$$M = C(1 + k t), \quad C = \frac{M}{1 + k t}.$$

**61.1.3** L’esempio fornito chiarisce sufficientemente che, una volta scelta la relazione che lega le situazioni economiche  $(C, 0)$  e  $(M, t)$ , sono determinate sia la legge che esprime M in funzione di C e t, sia quella che esprime C in funzione di M e t.

Quando si fissa la prima legge:

$$M = M(C, t)$$

si dice che è stabilita una **legge di capitalizzazione**.

Quando si fissa la seconda legge:

$$C = C(M, t)$$

si dice che è stabilita una **legge di attualizzazione** (o **legge di sconto**).

Rimane da capire cosa sia quella “opportuna convenzione” che rende valido il principio di equivalenza finanziaria. Ce ne occupiamo subito.

## 61.2 CAPITALIZZAZIONE SEMPLICE

**61.2.1** Una convenzione in base alla quale si reputano equivalenti le due situazioni economiche  $(C,0)$  e  $(M,t)$  è la seguente:

L’interesse  $I=M-C$  maturato nel tempo  $t$  è direttamente proporzionale alla somma  $C$  ceduta in prestito ed alla durata  $t$  del prestito.

Quando è adottata questa convenzione si parla di **capitalizzazione ad interesse semplice** (o **capitalizzazione semplice**).

In base ad essa deve risultare dunque:  $I = k C t$ , dove  $k$  è la costante di proporzionalità.

Per cogliere il significato economico di questa costante  $k$  osserviamo che risulta:

$$I=k \text{ se } C=1 \text{ e } t=1.$$

Vale a dire: La costante  $k$  è l’interesse prodotto dall’unità di capitale quand’è impiegato per un tempo unitario.

Tale interesse si chiama più propriamente **tasso** (o **saggio**) **di interesse** e si indica di solito con la lettera  **$i$** .

Risulta allora:

$$I = C i t.$$

Per cui, ricordando che  $I=M-C$ , si ha:  $M-C=Cit$ . E da qui, risolvendo rispetto ad  $M$ , segue:

$$[1] \quad M = C (1 + i t).$$

Questa formula esprime la cosiddetta **legge di capitalizzazione a interesse semplice** (o **legge di capitalizzazione semplice**). Concepita come funzione  $M=M(t)$ , rappresenta un modello di *crescita lineare* (Fig. 1).

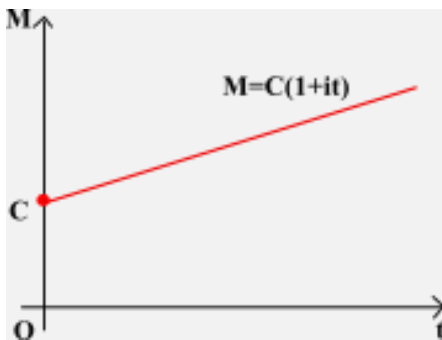


FIG. 1

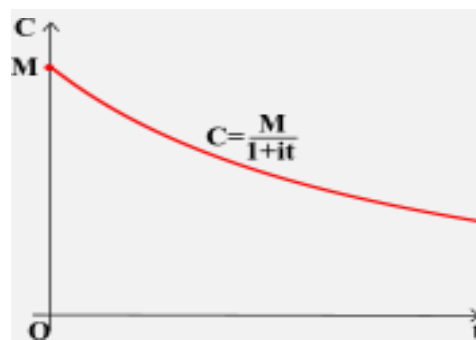


FIG. 2

Da essa, risolvendo rispetto a  $C$ , si ottiene rapidamente la **legge di attualizzazione** (o **di sconto**) **ad interesse semplice**:

$$C = \frac{M}{1 + i t}, \text{ che si può scrivere anche in questo modo: } C = M(1 + i t)^{-1}.$$

E questa legge, considerata come funzione  $C=C(t)$ , esprime questa volta un modello di *decrescita esponenziale* (Fig. 2). In realtà si tratta di un arco d’iperbole equilatera.

**61.2.2** Nella pratica commerciale la capitalizzazione semplice non è molto usata e, comunque, solitamente lo è solo per operazioni di breve scadenza, anche inferiore all'anno.

In tal caso, fermo restando che  $i$  sia il tasso annuo, alla variabile  $t$  bisogna sostituire la frazione di anno, che di volta in volta è presa in considerazione.

Così, per esempio, se la durata dell'operazione è di 4 mesi, a  $t$  si deve sostituire  $\frac{4}{12}$  di anno; se è di 1 anno e 2 mesi, bisogna sostituire  $1 + \frac{2}{12}$  di anno.

Vediamo un paio di esercizi sull'argomento.

- **ESERCIZIO 1.** La somma di € 2000 è investita al tasso annuo dello 0,96%. Sapendo che è impiegata per 8 mesi, calcolare l'interesse da essa prodotto.

**RISOLUZIONE.** Siccome l'interesse  $I$  è uguale ad  $M-C$ , dalla formula [1] segue:

$$I = C i t = 2000 \times 0,0096 \times \frac{8}{12} = 12,8 \text{ (€)}.$$

- **ESERCIZIO 2.** Un operatore finanziario ha investito la somma di € 5000 e dopo 4 mesi riscuote € 5025. Calcolare il tasso annuo di interesse che gli è stato praticato.

**RISOLUZIONE.** Dalla formula [1], concepita come un'equazione nell'incognita  $i$ , si ricava:  $i = \frac{M-C}{Ct}$ ; per cui:

$$i = \frac{5025 - 5000}{5000 \times \frac{4}{12}} = 1,5\%.$$

**61.2.3** Riprendiamo la legge di capitalizzazione semplice:

$$[1] \quad M = C(1 + i t).$$

e la legge, da essa dedotta, di attualizzazione semplice:

$$C = \frac{M}{1 + i t}.$$

Se l'importo  $M$  è inteso come la somma da pagare alla scadenza  $t$  e al tasso d'interesse  $i$ , l'importo  $C$  può essere concepito come la somma equivalente da pagare oggi. Tale importo  $C$  si chiama *somma scontata*, mentre la somma

$$[2] \quad S = M - C$$

si chiama **sconto** su  $M$ . Risulta evidentemente:

$$S = M - \frac{M}{1 + i t},$$

ossia, dopo aver semplificato:

$$[3] \quad S = \frac{M i t}{1 + i t}.$$

In base a questa formula risulta che:  $S = \frac{i}{1+i}$  se  $M=1$  e  $t=1$ .

Vale a dire:  $\frac{i}{1+i}$  è lo sconto sull'importo unitario esigibile alla scadenza dell'unità di tempo.

Si chiama **tasso di sconto** e si indica con la lettera **d**. Per cui:

$$[4] \quad d = \frac{i}{1 + i}.$$

Nella pratica commerciale si ricorre all'operazione di sconto per lo più in vista di scadenze ravvicinate, in genere inferiori all'anno e la legge con cui è calcolato lo sconto praticato è diversa dalla [3]. Essa è precisamente la seguente:

$$[5] \quad S = M d t.$$

Per comprendere come questa legge venga fuori, calcoliamo  $i$  dalla [4] e sostituiamolo nella [3].

Allora, siccome  $i = \frac{d}{1-d}$  dopo aver sostituito nella [3] si ottiene:

$$S = \frac{M \frac{d}{1-d} t}{1 + \frac{d}{1-d} t}, \text{ da cui segue } S = \frac{M d t}{1 + d(t-1)}.$$

Ora, ammesso che  $d$  sia il tasso di sconto annuo,  $t$  acquista un valore che possiamo ritenere compreso fra  $\frac{1}{12}$  e  $\frac{11}{12}$ . Considerato poi che  $d$  è dell'ordine dell'1% annuo (e perciò  $d=0,01$ ) risulta che il denominatore  $1+d(t-1)$  si può ritenere compreso all'incirca fra i seguenti valori:

$$1 + 0,01 \left( \frac{1}{12} - 1 \right) \approx 0,990 \text{ e } 1 + 0,01 \left( \frac{11}{12} - 1 \right) \approx 0,999.$$

Cosicché, pur essendo  $1+d(t-1) < 1$ , si pone, con approssimazione:  $1+d(t-1) \approx 1$ . Ne consegue la formula [5].

Lo sconto calcolato in base alla [5] si chiama **sconto commerciale**.

### 61.3 CAPITALIZZAZIONE COMPOSTA

**61.3.1** La convenzione adottata in capitalizzazione semplice porta a concludere che l'interesse  $I$  maturato alla fine di un certo periodo di tempo  $t$  si può concepire come la somma di  $t$  interessi, tutti del valore  $C_i$  maturato in un intervallo unitario. Per capire ciò basta osservare che, invece di  $I=C_i t$ , supponendo  $t$  intero, si può scrivere:

$$I = \underbrace{C_i + C_i + \dots + C_i}_{(t \text{ addendi})}.$$

In altri termini, in regime di capitalizzazione semplice, l'interesse maturato alla fine di ogni periodo unitario di tempo non frutta, cioè non produce a sua volta altro interesse nei periodi successivi.

Una convenzione diversa è la seguente:

L'interesse maturato alla fine di ogni periodo unitario di tempo si aggiunge al capitale e il nuovo capitale diventa fruttifero nel successivo periodo unitario di tempo.

Quando è adottata questa convenzione si parla di **capitalizzazione a interesse composto** (o **capitalizzazione composta**).

**61.3.2** Ci proponiamo di trovare la legge di capitalizzazione composta, ossia una formula che esprima il montante  $M$  per mezzo del capitale  $C$  impiegato al tasso (annuo)  $i$  per  $t$  anni.

Alla fine dell'anno  $t=1$  il montante – fornito dalla formula [1] – è evidentemente:  $M=C(1+i)$ . O anche, mettendo per comodità  $C_1$  al posto di  $M$  e  $C_0$  al posto di  $C$ :

$$C_1 = C_0 (1 + i).$$

Questa somma  $C_1$  – formata dal capitale  $C_0$  e dall'interesse da esso prodotto in un anno – costituisce il capitale all'inizio dell'anno  $t=2$ . Per cui alla fine di questo secondo anno il montante – sempre fornito dalla [1], dove questa volta si sostituisce  $C_2$  al posto di  $M$  e  $C_1$  al posto di  $C$  – diventerà:

$$C_2 = C_1 (1+i), \text{ ossia: } C_2 = C_0 (1+i)^2.$$

Alla fine dell'anno  $t=3$  il montante sarà:

$$C_3 = C_2 (1+i) = C_0 (1+i)^2 (1+i) = C_0 (1+i)^3.$$

Sembra di poter affermare che il montante, alla fine di  $t$  anni, sia:

$$C_t = C_0 (1+i)^t.$$

Ed effettivamente è così. Per provarlo basta ricorrere al principio d'induzione matematica. Ora, la base dell'induzione, per  $t=1$ , è certamente vera essendo  $C_1=C_0(1+i)$ . Dimostriamo che è vero il passo induttivo, vale a dire: ammesso che sia  $C_t=C_0(1+i)^t$ , dimostriamo che risulta  $C_{t+1}=C_0(1+i)^{t+1}$ . In effetti:

$$C_{t+1} = C_t(1+i) = C_0(1+i)^t(1+i) = C_0(1+i)^{t+1}.$$

Che è ciò che si voleva dimostrare.

In conclusione, ritornando ad indicare con  $M$  il montante al posto di  $C_t$  e con  $C$  il capitale al posto di  $C_0$ , si ha:

$$[6] \quad M = C (1+i)^t.$$

È questa la legge di capitalizzazione cercata. Concepita come funzione  $M=M(t)$ , rappresenta un modello di *crescita esponenziale* (Fig. 3).

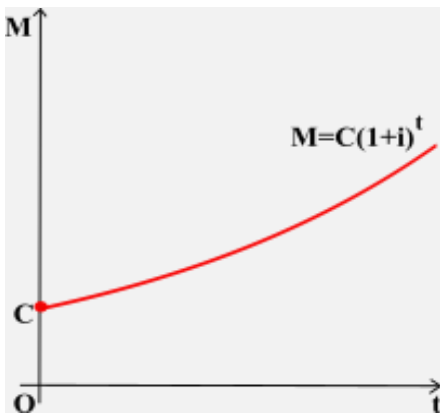


FIG. 3

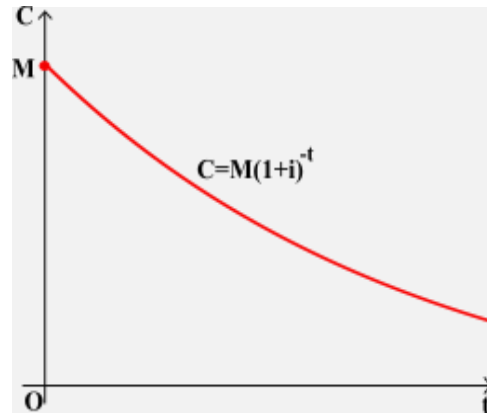


FIG. 4

Da essa, risolvendo rispetto a  $C$ , si ricava subito la legge di attualizzazione (o di sconto) ad interesse composto:

$$C = M (1+i)^{-t}$$

e questa legge, considerata come funzione  $C=C(t)$ , esprime un modello di *decrescita esponenziale* (Fig. 4).

**61.3.3** La formula [6], con qualche adattamento, è utilizzata anche quando la capitalizzazione avviene con scadenza periodica diversa dall'anno (per esempio: ogni mese, ogni semestre, eccetera). In generale, ammesso che la capitalizzazione (composta) avvenga  $k$  volte all'anno e ammesso inoltre che  $i$  sia il tasso annuo, allora l'interesse relativo ad ogni periodo (pari ad  $1/k$  di anno) è  $i/k$ . Pertanto, constatato che per  $t$  anni  $i$  periodi di capitalizzazione sono  $kt$ , la formula [6] assume la seguente forma:

$$M = C \left(1 + \frac{i}{k}\right)^{kt}.$$

Essa, in definitiva, calcola il montante  $M$  di un capitale  $C$  investito per  $t$  anni al tasso annuo  $i$  con capitalizzazione (composta) che avviene  $k$  volte all'anno.

Un esempio. Il montante  $M$  di un capitale  $C = € 10.000$ , investito per 4 anni al tasso annuo dell'1,5% con capitalizzazione (composta) quadrimestrale ( $k=3$ ), è il seguente:

$$M = 10.000 \left(1 + \frac{0,015}{3}\right)^{3 \cdot 4} \approx 10.616,77.$$

L'interesse maturato, alla scadenza dei 4 anni, è pertanto:

$$I = M - C = 10.616,77 - 10.000 = 616,77 \text{ (€)}.$$

In realtà, l'ente finanziario che pratica ai propri clienti questa modalità di calcolo dell'interesse, ne trae qualche beneficio sul piano economico. Spieghiamo perché.

Se l'ente dichiara di capitalizzare  $k$  volte all'anno al tasso annuo  $i$ , il tasso effettivo ad ogni periodo non dovrebbe essere  $i/k$  bensì un valore  $j$  leggermente più grande. Per calcolare questo tasso  $j$ , osserviamo che esso è l'interesse prodotto in un anno ( $t=1$ ) dal capitale  $C=1$  impiegato al tasso  $i/k$ . Dunque:

$$j = \left(1 + \frac{i}{k}\right)^k - 1.$$

Questa formula permette di calcolare  $j$ , noti  $i$  e  $k$ . Da essa, risolvendo rispetto ad  $i$ , si ottiene una formula che permette di calcolare  $i$ , noti  $j$  e  $k$ . Si trova esattamente:

$$i = k \left( (1 + j)^{\frac{1}{k}} - 1 \right).$$

Il tasso  $i$  si chiama **tasso annuo nominale** convertibile  $k$  volte all'anno. È il tasso che di norma gli istituti finanziari praticano ai loro clienti. Invece il tasso  $j$  è il **tasso annuo effettivo** corrispondente al tasso nominale annuo  $i$ .

Ed è  $i < j$ , come si potrebbe dimostrare in generale, ma che andiamo a verificare in qualche caso particolare.

- ESERCIZIO 1. Calcolare quale tasso effettivo annuo corrisponde al tasso nominale annuo del 2,5%:  
a) convertibile 4 volte all'anno;    b) convertibile 3 volte all'anno.

RISOLUZIONE. Bisogna tener presente che  $i=0,025$  mentre  $k=4$  nel primo caso e  $k=3$  nel secondo. Per cui:

$$\text{a) } j = \left(1 + \frac{i}{k}\right)^k - 1 = \left(1 + \frac{0,025}{4}\right)^4 - 1 \approx 2,523\%; \quad \text{b) } j = \left(1 + \frac{i}{k}\right)^k - 1 = \left(1 + \frac{0,025}{3}\right)^3 - 1 \approx 2,520\%.$$

In ogni caso:  $j > i$ .

- ESERCIZIO 2. Calcolare i seguenti tassi corrispondenti al tasso annuo effettivo dell'1,8%:  
a) tasso nominale annuo convertibile 2 volte all'anno;  
b) tasso nominale annuo convertibile 3 volte all'anno.

RISOLUZIONE. Bisogna tener presente che  $j=0,018$  e che  $k=2$  nel primo caso e  $k=3$  nel secondo. Per cui:

$$\text{a) } i = k \left( (1 + j)^{\frac{1}{k}} - 1 \right) = 2 \left( (1 + 0,018)^{\frac{1}{2}} - 1 \right) \approx 1,791\%;$$

$$\text{b) } i = k \left( (1 + j)^{\frac{1}{k}} - 1 \right) = 3 \left( (1 + 0,018)^{\frac{1}{3}} - 1 \right) = 1,789\%.$$

In ogni caso  $i < j$ .

**61.3.4** Sottoponiamo adesso alla tua attenzione alcuni esercizi risolti utilizzando la formula [6]. S'intende che ammettiamo disponibile una calcolatrice avente le funzioni "esponenziale" e "logaritmo". Come, del resto, negli esercizi precedenti.

- ESERCIZIO 1. La somma di € 80.000 è impiegata per 10 anni, in regime di capitalizzazione composta, al tasso annuo del 2,4%. Calcolare l'interesse che essa frutterà alla scadenza dell'operazione.

RISOLUZIONE. Siccome l'interesse  $I$  è uguale ad  $M-C$ , dove  $M$  è il montante e  $C$  il capitale impiegato, e siccome  $C=80.000$  (€), bisogna calcolare  $M$ . Il suo valore è fornito direttamente dalla [6]:

$$M = 80.000 (1 + 0,024)^{10} \approx 101.412 \text{ (€)}.$$

Dunque:

$$I = M - C = 101.412 - 80.000 = 21.412 \text{ (€)}.$$

- ESERCIZIO 2. Calcolare il tasso annuo d'interesse al quale bisogna investire la somma di € 50.000 per riscuotere, dopo 4 anni, la somma di € 54.000, in regime di capitalizzazione composta.

RISOLUZIONE. Dalla [6], concepita come un'equazione nell'incognita  $i$ , si ricava:

$$(1+i)^t = \frac{M}{C}, \text{ da cui segue: } 1+i = \left(\frac{M}{C}\right)^{\frac{1}{t}} \text{ e quindi: } i = \left(\frac{M}{C}\right)^{\frac{1}{t}} - 1.$$

Pertanto:

$$i = \left(\frac{54.000}{50.000}\right)^{\frac{1}{4}} - 1 \approx 1,94\%.$$

- ESERCIZIO 3. Calcolare in quanti anni la somma di € 70.000, impiegata in regime di capitalizzazione composta al tasso annuo del 2,3%, produce un interesse di € 25.000.

RISOLUZIONE. Dalla [6], concepita come un'equazione nell'incognita  $t$ , si ricava:

$$(1+i)^t = \frac{M}{C}, \text{ da cui segue: } \ln(1+i)^t = \ln \frac{M}{C}, \text{ o anche: } t \ln(1+i) = \ln \frac{M}{C}, \text{ e infine: } t = \frac{\ln \frac{M}{C}}{\ln(1+i)}.$$

Pertanto, constatato che  $M=C+I=70.000+25.000=95.000$  (€), si ottiene:

$$t = \frac{\ln \frac{95.000}{70.000}}{\ln(1 + 0,023)} \approx 13,43.$$

Dunque la somma deve essere impiegata per quasi 13 anni e mezzo.

## 61.4 ACCUMULAZIONI, RENDITE E AMMORTAMENTI

### 61.4.1 Prendiamo in considerazione il seguente problema:

Mario Rossi, in seguito ad un'eredità ricevuta, ha acquisito il diritto di riscuotere € 25.000 all'anno per 10 anni, a partire dalla fine dell'anno che inizia oggi.

Oltre alla riscossione cadenzata di tali somme, egli valuta altre due strade:

- 1) Depositare immediatamente in banca le somme che via via riscuote e ritirarle alla scadenza del 10° anno. Sapendo che la banca gli corrisponde un tasso d'interesse composto del 2,1% annuo, calcolare quale somma Mario Rossi avrà accumulato a tale scadenza.
- 2) Cedere il diritto di riscossione delle somme ad una banca ricevendone in cambio l'equivalente finanziario attuale.

Calcolare quale somma dovrebbe versargli oggi la banca per acquisire il suddetto diritto nel presupposto che gli riconosca lo stesso interesse composto del 2,1% annuo.

Proviamo a risolvere il problema, incominciando ad occuparci della domanda 1). Per questo rappresentiamo graficamente la situazione in figura 5.



FIG. 5

Possiamo fare alcune considerazioni:

- La somma depositata alla fine dell'anno 1 frutterà per i successivi 9 anni tanto da produrre, alla fine del 10° anno, il montante  $M_1=25.000 (1+0,021)^9$  euro.
- La somma depositata alla fine dell'anno 2 frutterà per i successivi 8 anni tanto da produrre, alla fine del 10° anno, il montante  $M_2=25.000 (1+0,021)^8$  euro.
- Così via, la somma depositata alla fine dell'anno 9 frutterà per l'anno successivo tanto da produrre, alla fine del 10° anno, il montante  $M_9=25.000 (1+0,021)^1$  euro.
- Infine bisogna considerare l'ultima rata di € 25.000, che verrà riscossa proprio alla fine dell'anno 10.

Pertanto, alla scadenza dei 10 anni, Mario Rossi avrà accumulato la seguente somma:

$$M=25.000+25.000 (1+0,021)^1+25.000 (1+0,021)^2+\dots+25.000 (1+0,021)^9 (\text{€}).$$

Si tratta della somma di 10 termini in progressione geometrica di ragione  $1+0,021=1,021$  e di primo termine 25.000. Per cui, in base ad una nota formula, risulta:

$$M = 25.000 \frac{1,021^{10} - 1}{1,021 - 1} \approx 274.997 (\text{€}).$$

Dunque Mario Rossi avrà accumulato, alla scadenza del 10° anno, la somma di € 274.997.

Passando al punto 2), se egli decidesse di cedere alla banca il diritto di riscuotere le varie rate alle scadenze prescritte, oggi – sempre nell'ipotesi che la banca gli riconosca un tasso d'interesse composto del 2,1% annuo – potrebbe disporre di una somma pari al valore attuale  $C$  del suddetto montante  $M$ , calcolato per l'appunto al tasso d'interesse composto del 2,1% annuo per 10 anni. Vale a dire:

$$C = \frac{M}{(1+i)^t} = \frac{274.997}{(1+0,021)^{10}} \approx 223.393 (\text{€}).$$

Naturalmente questa somma  $C$  poteva anche essere calcolata, con un procedimento più complicato, effettuando la somma dei valori attuali del montante di 25.000 alle varie scadenze. Ossia:

$$C = \frac{25.000}{(1+0,021)^1} + \frac{25.000}{(1+0,021)^2} + \dots + \frac{25.000}{(1+0,021)^{10}} = \frac{25.000}{1,021} \cdot \frac{\left(\frac{1}{1,021}\right)^{10} - 1}{\frac{1}{1,021} - 1} \approx 223.393 (\text{€}).$$

In conclusione, rispetto al tasso d'interesse del 2,1% annuo, in regime di capitalizzazione composta, sono operazioni equivalenti dal punto di vista finanziario quelle di riscuotere:

- € 25.000 all'anno per 10 anni a partire dalla fine dell'anno che inizia oggi;
- € 274.997 alla scadenza dell'anno 10;
- € 223.393 oggi.

Prima di procedere ti proponiamo di risolvere le due seguenti questioni:

- 1) I genitori di Mario decidono di versare su un libretto di risparmio intestato al proprio figliolo la somma di € 3000 in occasione di ogni suo compleanno a partire dal 10° anno di età e fino al 17°. La banca riconosce un tasso di interesse composto del 2,0% annuo. Calcolare la somma accumulata per Mario il giorno del suo 18° compleanno.
- 2) Luigi ha acceso oggi un mutuo con la sua banca. Lo estinguerà versando alla banca ogni anno, per 15 anni a partire dalla fine dell'anno che inizia oggi, la somma di € 1300. Sapendo che la banca gli pratica un tasso d'interesse composto del 3,5% annuo, calcolare quale somma ha ricevuto oggi Luigi.

#### 61.4.2 I problemi descritti nel paragrafo precedente possono essere estesi ad una situazione generica:

Tizio deposita alla fine di determinate scadenze periodiche, per  $n$  periodi, una somma costante  $R$ . Gli viene riconosciuto un tasso d'interesse composto  $i$  per periodo.

- 1) Quale somma  $M$  avrà accumulato Tizio alla fine dell' $n$ -esimo periodo?
- 2) Qual è il valore attuale  $C$  di tale somma?

Il problema si risolve ragionando come nei casi precedenti e generalizzandoli. Per cui (Fig. 6):

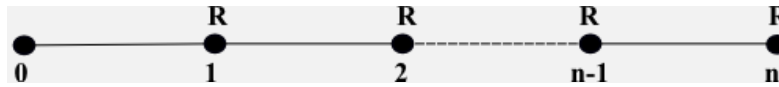


FIG. 6

- la somma depositata alla fine del 1° periodo frutterà per  $i$  successivi  $n-1$  periodi tanto da produrre, alla fine dell' $n$ -esimo periodo, il montante  $M_1 = R(1+i)^{n-1}$ ;
- la somma depositata alla fine del 2° periodo produrrà nei successivi  $n-2$  periodi il montante  $M_2 = R(1+i)^{n-2}$ ;
- così continuando, la somma depositata alla fine del periodo  $n-1$  produrrà nel successivo periodo  $n$  il montante  $M_{n-1} = R(1+i)^1$ ;
- infine bisogna considerare la somma  $R$  depositata alla scadenza dell' $n$ -esimo periodo.

Cosicché, alla scadenza dell' $n$ -esimo periodo, Tizio avrà accumulato la somma:

$$M = R + R(1+i)^1 + R(1+i)^2 + \dots + R(1+i)^{n-2} + R(1+i)^{n-1}.$$

Si tratta della somma di  $n$  termini in progressione geometrica di ragione  $1+i$  e primo termine  $R$ . Per cui si ha:

$$M = R \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}$$

ossia:

$$[7] \quad M = R \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Il valore attuale di questo montante  $M$  è, in virtù della [6]:

$$C = \frac{M}{(1+i)^n} = \frac{R}{(1+i)^n} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i},$$

cioè, a conti fatti:

$$[8] \quad C = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}.$$

La successione degli importi  $R$  che vengono versati alle scadenze prestabilite si chiama **rendita**.

Ogni importo  $R$  si dice **rata** (o **termine**) della rendita.

La somma  $M$  accumulata si dice **montante** (o **valore finale**) della rendita.

L'importo  $C$ , pari al valore attuale del montante della rendita, si dice appunto **valore attuale** della rendita.

Esso è uguale alla somma dei valori attuali delle rate della rendita, calcolati all'inizio del primo periodo.

Questo può essere dimostrato: basta generalizzare il ragionamento esposto verso la fine del paragrafo 61.4.1 e riferito lì ad una situazione particolare.

Detto per completezza, i trattati di matematica finanziaria indicano con **S** ed **A** rispettivamente il montante ed il valore attuale di una rendita. Utilizzano inoltre due particolari simboli per le espressioni:

$$\frac{(1+i)^n - 1}{i} \text{ e } \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}.$$

Si tratta dei simboli, rispettivamente:  $s_{\overline{n}|i}$  e  $a_{\overline{n}|i}$ , i quali si leggono nell'ordine: “s figurato n al tasso i” ed “a figurato n al tasso i”. Essi rappresentano rispettivamente il montante ed il valore attuale di una rendita  $R=1$ . Di modo che le due formule [7] e [8] sono scritte nel modo seguente:

$$S = R s_{\overline{n}|i} \quad \text{e} \quad A = R a_{\overline{n}|i} .$$

**61.4.3** In considerazione del fatto che le rate della rendita sono esigibili (cioè riscotibili) alla fine di ogni periodo, contate a partire dall'istante attuale, quella presa in considerazione si chiama più propriamente **rendita posticipata**.

In effetti tali rate potrebbero essere esigibili all'inizio dei vari periodi. In tal caso la rendita è detta **rendita anticipata**.

Ora, la rata  $R$ , versata all'inizio di un periodo, frutta in tale periodo l'interesse  $Ri$ , per cui alla fine del periodo stesso essa diventa  $R+Ri$ , cioè  $R(1+i)$ .

Cosicché versare la somma  $R$  all'inizio di un periodo equivale a versare la somma  $R(1+i)$  alla fine dello stesso periodo.

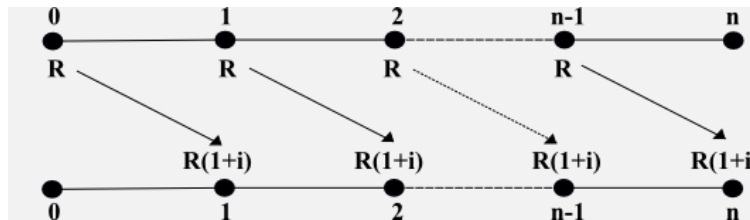


FIG. 7

Si desume che (Fig. 7):

- il valore finale  $M'$  di una rendita anticipata di durata  $n$ , rata  $R$  e tasso  $i$ , è uguale al valore finale di una rendita posticipata della stessa durata  $n$ , dello stesso tasso  $i$ , ma di rata  $R(1+i)$ ;
- il valore attuale  $C'$  di tale rendita è uguale al valore attuale di  $M'$ .

Pertanto, tenendo presenti nell'ordine le formule [7] e [8], dove adesso sostituiamo  $R(1+i)$  al posto di  $R$ , per una *rendita anticipata* si ha rispettivamente:

$$[9] \quad M' = R(1+i) \frac{(1+i)^n - 1}{i} .$$

$$[10] \quad C' = R(1+i) \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} .$$

Occupiamoci adesso di alcuni esercizi in cui sono applicate le nozioni espone sopra.

- **ESERCIZIO 1.** È stato contratto un debito di € 80.000. Calcolare quale somma bisogna versare alla fine di ogni semestre per estinguerlo in 10 anni al tasso d'interesse annuo nominale del 3,4%.

**RISOLUZIONE.** Si tratta di calcolare la rata  $R$  di una rendita posticipata di  $n=20$  rate, al tasso  $i$  tale che  $i = \frac{0,034}{2} = 0,017$ . Si sa che il valore attuale della rendita è  $C=80.000$  (€).

Basta allora servirsi della formula [8], considerata come un'equazione nell'incognita  $R$ . Si ottiene:

$$R = \frac{Ci}{1 - (1+i)^{-n}} = \frac{80.000 \times 0,017}{1 - (1 + 0,017)^{-20}} \approx 4.752 \text{ (€)} .$$

- **ESERCIZIO 2.** Voglio accumulare in 10 anni a partire da oggi un capitale di € 50.000. Calcolare quale somma devo depositare alla fine di ogni mese sapendo che la banca cui mi sono affidato mi riconosce un tasso d'interesse annuo nominale dell'1,8%.

RISOLUZIONE. Si tratta di calcolare la rata  $R$  di una rendita posticipata di  $n=120$  rate, al tasso  $i = \frac{0,018}{12} = 0,0015$ . Si conosce il montante  $M$  della rendita, uguale a 50.000 (€). Basta ricorrere alla formula [7], considerata come un'equazione nell'incognita  $R$ . Si ottiene:

$$R = \frac{Mi}{(1+i)^n - 1} = \frac{50.000 \times 0,0015}{(1 + 0,0015)^{120} - 1} \approx 380,60 \text{ (€)}.$$

- ESERCIZIO 3. Calcolare quanto bisogna versare all'inizio di ogni anno affinché, alla fine del 10° anno, si venga ad accumulare un capitale di € 25.000, sapendo che viene riconosciuto un tasso d'interesse composto dell'1,5% annuo.

RISOLUZIONE. L'esercizio è risolto dalla seguente formula:

$$R = \frac{25000 \times 0,015}{(1 + 0,015)((1 + 0,015)^{10} - 1)} \text{ (€)}.$$

Ne lasciamo a te la spiegazione ed il calcolo.

**61.4.4** La formula [8] ha, oltre a quella già spiegata, un'altra interpretazione: quella evidenziata nella seconda delle due questioni proposte in 61.4.1 per esercizio.

Precisamente  $C$  può essere concepita come la somma che Tizio riceve, per esempio da un istituto bancario, nel momento in cui accende un mutuo, e  $R$  come la rata che egli verserà alla banca alla fine di ogni periodo prestabilito, per  $n$  periodi al tasso d'interesse composto  $i$  (riferito naturalmente al periodo), a partire dalla fine del periodo che inizia nel momento in cui il mutuo è acceso.

L'operazione in questo modo attivata si chiama **ammortamento progressivo a rata costante posticipata**.  $R$  è la **rata** dell'ammortamento. Il suo valore, una volta noti  $C$ ,  $i$ ,  $n$ , si ricava dalla formula [8] risolvendo rispetto ad  $R$ . Si trova:

$$[11] \quad R = C \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}}.$$

Il termine “progressivo” attribuito a questo metodo di ammortamento (detto anche *metodo francese*) deriva dal fatto che la rata  $R$  – che risulta formata da una “quota capitale” e una “quota interesse” – è tale che le quote capitale aumentano.

**61.4.5** Soffermiamoci dunque sulla faccenda delle quote che compongono la rata di ammortamento per far vedere che le quote capitale aumentano in un modo particolare.

Intanto rileviamo che ogni rata di ammortamento è composta da due parti: una serve a restituire al creditore una parte del capitale che egli ha anticipato, l'altra a coprire gli interessi sul valore residuo del debito. La prima delle due parti si dice **quota capitale**, la seconda **quota interesse**.

Indichiamo con  $V_j$  il valore residuo del debito alla fine del periodo  $j$  (cioè la differenza fra il capitale  $C$  e la somma delle quote capitale versate) e con  $K_j$  la quota capitale della rata  $j$ -esima.

- All'inizio del periodo 1 ( $j=1$ ) il debito è chiaramente  $C$ . L'interesse su  $C$  per 1 periodo al tasso  $i$  è  $Ci$ , per cui la rata  $R$  versata dal mutuatario <sup>(1)</sup> alla fine del periodo 1 è costituita dalla quota interesse  $Ci$  e dalla quota capitale  $K_1=R-Ci$ .
- All'inizio del periodo 2 ( $j=2$ ) il debito residuo è esattamente quello determinatosi alla fine del periodo 1, cioè:  $V_1=C-K_1$ . L'interesse su  $V_1$  per 1 periodo al tasso  $i$  è  $V_1 i$ , per cui la rata  $R$  versata dal mutuatario alla fine del periodo 2 copre la quota interesse  $V_1 i$  e la quota capitale  $K_2=R-V_1 i$ .

<sup>1</sup> Mutuatario è colui che ha contratto il mutuo.

- All’inizio del periodo 3 ( $j=3$ ) il debito residuo è esattamente quello determinatosi alla fine del periodo 2, cioè:  $V_2=C-(K_1+K_2)$ . La rata  $R$  versata dal mutuatario alla fine del periodo 3 copre la quota interesse  $V_2 i$  e la quota capitale  $K_3=R-V_2 i$ .
- Continuando nel ragionamento, alla fine del periodo  $n$  ( $j=n$ ) si ha che la rata  $R$  copre la quota interesse  $V_{n-1} i$ , dove  $V_{n-1}=C-(K_1+K_2+\dots+K_{n-1})$ , e la quota capitale  $K_n=R-V_{n-1} i$ .

Dunque le quote capitale delle  $n$  rate di ammortamento sono:

- $K_1=R-Ci$ ;
- $K_2=R-V_1 i=R-(C-K_1)i=(R-Ci)+K_1 i=K_1+K_1 i=K_1(1+i)$ ;
- $K_3=R-V_2 i=R-(C-(K_1+K_2))i=(R-Ci)+K_1 i+K_2 i=$   
 $=K_1+K_1 i+K_1(1+i)i=K_1(1+i)+K_1(1+i)i=K_1(1+i)^2$ ;
- .....;
- $K_n=K_1(1+i)^{n-1}$ .

Evidentemente tali quote crescono in progressione geometrica di ragione  $1+i$ .

**61.4.6** Quando si contrae un mutuo con una banca, di norma questa elabora un apposito tabulato, come quello sottostante (Tab. 1), chiamato **piano di ammortamento**, in cui, una volta calcolata la rata costante  $R$ , ad ogni scadenza  $j$  sono indicati la quota capitale  $K(j)$ , la quota interesse  $I(j)$ , il debito estinto  $E(j)$  e infine il debito residuo  $V(j)$ .

PIANO DI AMMORTAMENTO – Mutuo N° ...				
Rata: ... – Rate N° .... – Tasso relativo ad un periodo: ...				
Rata N° $j$	Quota capitale $K(j)$	Quota interesse $I(j)$	Debito estinto $E(j)$	Debito residuo $V(j)$
0	-	-	-	
1				
2				
...				
$n$				

TAB. 1

Vediamo un paio di esercizi sull’argomento.

- **ESERCIZIO 1.** Redigere il piano di ammortamento (ottenuto col metodo progressivo) per un mutuo di € 120.000, estinguibile in 15 anni al tasso nominale annuo del 3,5%, con rate semestrali versate alla fine di ogni semestre, contate a partire dal giorno in cui è stato stipulato il contratto di mutuo.

**RISOLUZIONE.** L’entità del mutuo è chiaramente il valore  $V(0)$  del debito residuo alla scadenza 0, cioè all’inizio dell’operazione. Dunque:

$$V(0) = € 120.000.$$

Sottintendiamo da qui in avanti che le somme siano espresse in euro.

Calcoliamo la rata dell’ammortamento. Per questo occorre rifarsi alla formula [8], dove:

$$C = V(0) = 120.000, \quad i = \frac{0,035}{2} = 0,0175, \quad n = 30.$$

Dunque:

$$R = 120.000 \cdot \frac{0,0175}{1 - (1 + 0,0175)^{-30}} \approx 5176.$$

Riprendiamo adesso quanto esposto in 61.4.5 e adattiamolo alla situazione in esame integrando opportunamente e facendo attenzione agli arrotondamenti, in particolare nell'ultima rata:

- Alla fine del 1° semestre risulta:
  - $K(1) = R - V(0)i = 5176 - 120.000 \times 0,0175 = 3.076$ ,
  - $I(1) = R - K(1) = 5.176 - 3.076 = 2.100$ ,
  - $E(1) = K(1) = 3.076$ ,
  - $V(1) = V(0) - E(1) = 120.000 - 3.076 = 116.924$ .
- Alla fine del 2° semestre risulta:
  - $K(2) = K(1) (1 + i) = 3.076 \times (1 + 0,0175) = 3.130$ ,
  - $I(2) = R - K(2) = 5.176 - 3.130 = 2.046$ ,
  - $E(2) = E(1) + K(2) = 3.076 + 3.130 = 6.206$ ,
  - $V(2) = V(1) - E(2) = 116.924 - 6.206 = 110.718$ .
- Alla fine del 3° semestre risulta:
  - $K(3) = K(2) (1 + i) = 3.130 \times (1 + 0,0175) = 3.185$ ,
  - $I(3) = R - K(3) = 5.176 - 3.185 = 1.991$ ,
  - $E(3) = E(2) + K(3) = 6.206 + 3.185 = 9.391$ ,
  - $V(3) = V(2) - E(3) = 110.718 - 9.391 = 101.327$ .
- Allo stesso modo si procede fino al 30° semestre, allorché si ha la seguente situazione:
  - $K(30) = K(29) (1 + i) = 5.000 \times (1 + 0,0175) = 5.087$ ,
  - $I(30) = R - K(30) = 5.176 - 5.087 = 89$ ,
  - $E(30) = E(29) + K(30) = 114.929 - 5.087 = 109.842$ ,
  - $V(30) = V(29) - E(30) = 120.000 - 109.842 = 10.158$ .

Il debito residuo di -17 euro, invece di 0 euro, dipende dagli arrotondamenti. Per cui, in realtà, l'ultima rata non è di € 5.176 ma di € 5.159.

Il piano di ammortamento completo può essere ottenuto facilmente servendosi in maniera adeguata di un foglio elettronico. Noi l'abbiamo fatto ed abbiamo ottenuto il piano sintetizzato nella sottostante tabella 2.

<i>PIANO DI AMMORTAMENTO – Mutuo N° ...</i>				
<i>RATA: 5176 € – Rate semestrali N°30 – Tasso relativo ad un periodo: 1,75%</i>				
Rata N° j	Quota capitale K(j)	Quota interesse I(j)	Debito estinto E(j)	Debito residuo V(j)
0	-	-	-	120000
1	3076	2100	3076	116924
2	3130	2046	6206	113794
3	3185	1991	9390	110610
4	3240	1936	12631	107369
5	3297	1879	15928	104072
6	3355	1821	19283	100717
7	3413	1763	22696	97304
8	3473	1703	26169	93831
9	3534	1642	29703	90297
10	3596	1580	33299	86701
11	3659	1517	36958	83042
12	3723	1453	40680	79320

13	3788	1388	44468	75532
14	3854	1322	48323	71677
15	3922	1254	52244	67756
16	3990	1186	56234	63766
17	4060	1116	60295	59705
18	4131	1045	64426	55574
19	4203	973	68629	51371
20	4277	899	72906	47094
21	4352	824	77258	42742
22	4428	748	81686	38314
23	4506	670	86192	33808
24	4584	592	90776	29224
25	4665	511	95440	24560
26	4746	430	100187	19813
27	4829	347	105016	14984
28	4914	262	109930	10070
29	5000	176	114929	5071
30	5087	89	120017	-17

TAB. 2

- **ESERCIZIO 2.** Redigere il piano di ammortamento (ottenuto col metodo progressivo) per un mutuo di € 120.000, estinguibile in 15 anni al tasso effettivo annuo del 3,5%, con rate semestrali versate alla fine di ogni semestre, contate a partire dal giorno in cui è stato stipulato il contratto di mutuo.

**RISOLUZIONE (traccia).** Si tratta di un esercizio uguale in tutto al precedente tranne che nel valore del tasso. Adesso è assegnato, infatti, il tasso annuo effettivo e non quello nominale, per cui quello effettivo semestrale è inferiore al 3,5%. Precisamente, chiamato  $i$  tale tasso semestrale, bisogna determinarlo sapendo che 1 euro, impiegato per 2 periodi al tasso  $i$ , produce un interesse composto del 3,5% di 1 euro, vale a dire di € 0,035 e perciò un montante di € 1,035. Pertanto, in base alla formula [6], deve risultare:  $1,035 = (1 + i)^2$ , da cui segue:

$$i = 1,035^{1/2} - 1 \approx 0,001735.$$

Per la stesura del piano di ammortamento, a questo punto, basta procedere come nel caso precedente. Cosa che puoi fare da te. In particolare troverai che la rata semestrale è di € 5.165 e che l'ultima riga del piano di ammortamento è la seguente, con i valori espressi ovviamente in euro:

$$K(30) = 5.077, \quad I(30) = 88, \quad E(30) = 120.010, \quad V(30) = -10.$$

**61.4.7** Esistono altri metodi di ammortamento, ma non ce ne occuperemo, anche perché il metodo progressivo è di fatto il più usato. Ad ogni buon conto, qualcosa proporremo per esercizio nella sezione “verifiche” (cfr.: esercizi n. 64 e n. 65).

Bisogna dire poi che, in particolare nel caso di mutui su immobili (case, terreni, ecc.), che di solito comportano un numero di rate piuttosto elevato e quindi una lunga durata, si fa ricorso a piani di ammortamento a rata variabile. Precisamente la rata varia in base al debito residuo e soprattutto in base alla variazione del tasso d'interesse, che nel lungo periodo può subire per l'appunto oscillazioni importanti. Ma non tratteremo neppure di questa tipologia di ammortamenti. Chi proseguirà gli studi in ambito universitario nel settore economico-finanziario avrà modo di approfondire questo argomento. Quello che noi abbiamo qui proposto basta per dare un'idea di massima.

**61.4.8** Oggigiorno, come precisato più volte, il fatto di disporre di strumenti di calcolo automatico comporta che l'uso delle formule [7], [8], [9], [10], [11] non implichi serie difficoltà di calcolo. La cosa non era, invece, semplicissima quando tali strumenti non esistevano, ovvero fino agli anni Ottanta del XX secolo. Allora i matematici, per semplificare i calcoli che le operazioni connesse ai problemi di matematica finanziaria implicavano, avevano elaborato apposite tabelle, dette “tavole finanziarie”, che permettevano di trovare rapidamente i valori delle seguenti espressioni:

$$(1+i)^n, (1+i)^{-n}, \frac{(1+i)^n - 1}{i}, \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}, \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}}$$

in corrispondenza di un gran numero di valori assegnati alle variabili  $i$  ed  $n$ .

Tanto per fornire un esempio, la seguente tabella (Tab. 3) mostra un “pezzo” delle suddette tavole riguardo ai valori dell'espressione lì indicata, approssimati a meno di  $10^{-5}$ . Ribadiamo che al giorno d'oggi possiamo trovare questi valori direttamente con un idoneo strumento di calcolo automatico. Cosa che rende praticamente inutili quelle “tavole finanziarie” che fino a qualche decennio fa costituivano uno strumento indispensabile per i commercialisti.

Tab. 3 – Valori di  $\frac{(1+i)^n - 1}{i}$

$i$	2,0%	2,5%	3,0%	3,5%	4,0%	4,5%	5,0%
$n$							
6	6,30812	6,38774	6,468410	6,55015	6,63298	6,71689	6,80191
7	7,43428	7,54743	7,662462	7,77941	7,89829	8,01915	8,14201
8	8,58297	8,73612	8,892340	9,05169	9,21423	9,38001	9,54910
9	9,75463	9,95452	10,15911	10,36850	10,582795	10,80211	11,02656
10	10,94972	11,20338	11,46388	11,73139	12,00611	12,28821	12,57789

Naturalmente con un idoneo software matematico – ma in qualche circostanza anche con una semplice calcolatrice che, però, abbia i tasti delle funzioni “esponenziale” e “logaritmo” – è possibile calcolare immediatamente anche il valore di  $n$  quando si conoscono quelli della variabile  $i$  e dell'espressione presa in considerazione.

È pure possibile calcolare il valore di  $i$  quando si conoscono quelli dell'espressione e della variabile  $n$ , ma non senza difficoltà, questa volta. Qualche esempio in proposito può rivelarsi utile.

- **ESERCIZIO 1.** Calcolare  $n$  sapendo che risulta  $\frac{(1+i)^n - 1}{i} = 13,8184$  per  $i=0,034$ .

**RISOLUZIONE.** Si tratta di risolvere la seguente equazione esponenziale nella variabile  $n$ :

$$\frac{(1 + 0,034)^n - 1}{0,034} = 13,8184.$$

Esistono software matematici che la risolvono direttamente. Per mezzo di uno di questi abbiamo ottenuto rapidamente il valore  $n \approx 11,5$ .

Ma a questo valore si poteva giungere anche senza disporre di un tale software, a condizione di disporre, però, di una calcolatrice con i tasti della funzione “logaritmo”. A partire dalla precedente equazione, infatti, otteniamo di seguito:

$$1,034^n = 1 + 13,8184 \times 0,034, \text{ cioè: } 1,034^n = 1,469825$$

e da qui, passando ai logaritmi naturali di entrambi i membri dell'equazione, si ottiene:

$$n \ln 1,034 = \ln 1,469825 \quad \text{e perciò: } n = \frac{\ln 1,469825}{\ln 1,034} \approx 11,5.$$

- ESERCIZIO 2. Calcolare  $i$  sapendo che risulta  $\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 18,1025$  per  $n=30$ .

RISOLUZIONE. Si tratta di risolvere la seguente equazione nella variabile  $i$ :

$$\frac{1 - (1 + i)^{-30}}{i} = 18,1025.$$

In questo caso anche il software matematico può incontrare qualche difficoltà nel fornire direttamente la soluzione dell'equazione; meno che mai è in grado di fornirla una semplice calcolatrice. Ma sia l'uno sia l'altra aiutano ad arrivarci. Ma seguendo un'altra strada, che utilizza l'interpolazione lineare.

Per questo, attraverso tentativi mirati, si considera dapprima l'espressione:

$$f(i) = \frac{1 - (1 + i)^{-30}}{i};$$

bisogna trovare due valori di  $i$ ,  $i'$  ed  $i''$ , tali che risulti:  $f(i') < 18,1025 < f(i'')$ . Fatti i debiti tentativi, troviamo:

$$f(0,037) = 17,9397, \quad f(0,036) = 18,1637;$$

per cui:

$$f(0,037) < f(i) = 18,1025 < f(0,036).$$

Da qui, con un processo d'interpolazione lineare, si ottiene:

$$\frac{f(i) - f(i')}{i - i'} = \frac{f(i') - f(i'')}{i' - i''}, \quad \text{ossia: } \frac{18,1025 - 17,9397}{i - 0,037} = \frac{18,1637 - 17,9397}{0,036 - 0,037}$$

e infine, una volta risolta la precedente equazione in  $i$ , si trova:  $i = 0,03627 = 3,627\%$ .

In realtà, una apposita verifica, fa vedere che risulta:

$$\frac{1 - (1 + 0,03627)^{-30}}{0,03627} = 18,1028.$$

Non è esattamente il valore assegnato, ma l'approssimazione è eccellente.

- ESERCIZIO 3. Per estinguere un debito di € 110.000 si versano € 4.600 per 15 anni alla fine di ogni semestre, a partire dal semestre in cui il debito è stato contratto.

Calcolare il tasso d'interesse nominale annuo applicato nella circostanza.

RISOLUZIONE. Si tratta di una rendita posticipata della durata di  $n=30$  rate, ognuna del valore  $R$  di € 4.600, al tasso semestrale  $i$ .

Di essa si conosce il valore attuale  $C$ , uguale a € 110.000. Il tasso nominale annuo è  $i' = 2i$ .

Dunque bisogna calcolare  $i$ .

Per questo è necessario risolvere la seguente equazione, ottenuta sostituendo nella formula [8] i valori qui assegnati alle variabili  $C$ ,  $R$ ,  $n$ :

$$110.000 = 4.600 \cdot \frac{1 - (1 + i)^{-30}}{i}, \quad \text{ossia: } \frac{1 - (1 + i)^{-30}}{i} = 23,9130.$$

Si tratta di un'equazione dello stesso tipo di quello descritto nel precedente esercizio.

Si procede come in quel caso. Dunque, posto:

$$f(i) = \frac{1 - (1 + i)^{-30}}{i}$$

per tentativi si cercano due valori di  $f(i)$  entro i quali è compreso 23,9130; si ottiene:

$$f(0,015) = 24,0158, \quad f(0,016) = 23,6788.$$

Proseguendo adesso con l'interpolazione lineare, si ha:

$$\frac{23,9130 - 24,0158}{i - 0,015} = \frac{23,6788 - 24,0158}{0,016 - 0,015}$$

da cui segue:  $i=0,0153$ . Pertanto  $i'=0,0306=3,06\%$ .

Alcuni esercizi per te:

- Sapendo che il valore dell'espressione  $\frac{(1+i)^n - 1}{i}$  è :  
 a) 7,3707 e che  $i=3,50\%$ , calcolare  $n$ ; b) 5,9290 e che  $n=10$ , calcolare  $i$ .
- Sapendo che il valore dell'espressione  $\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$  è :  
 a) 7,3707 e che  $i=3,50\%$ , calcolare  $n$ ; b) 5,9290 e che  $n=10$ , calcolare  $i$ .

## VERIFICHE <sup>(2)</sup>

### Situazioni economiche e principio di equivalenza finanziaria (nn. 1-6):

- Si considerino le due situazioni economiche  $(C,0)$  e  $(M,t)$ . Stabilire se sono equivalenti o no in base alla seguente legge:  $M - C = \frac{1}{10}Ct$ , sapendo che si ha:  
 a)  $C=100.000$ ,  $t=3$ ,  $M=130.000$ ;  
 b)  $C=780.000$ ,  $t=5$ ,  $M=1.200.000$ ;  
 c)  $C=1.000.000$ ,  $t=4$ ,  $M=1.400.000$ .
- Si considerino le due situazioni economiche  $(C,0)$  e  $(M,t)$ . Stabilire se sono equivalenti o no in base alla seguente legge:  $M = C \cdot 1,06^t$ , sapendo che si ha:  
 a)  $C=100.000$ ,  $t=3$ ,  $M=119.100$ ;  
 b)  $C=800.000$ ,  $t=5$ ,  $M=1.200.000$ ;  
 c)  $C=1.000.000$ ,  $t=4$ ,  $M=1.300.000$ .
- Le due situazioni economiche  $(C,0)$  e  $(M,t)$  risultano equivalenti in base alla seguente legge:  $M=C(1+0,02 t)$ . Completare la seguente tabella:

M	C	t
	25.000	3
50.000		6
560.000	450.000	
2 S	S	

- Le due situazioni economiche  $(C,0)$  e  $(M,t)$  risultano equivalenti in base alla seguente legge:  $M = C \cdot 1,025^t$ . Completare la seguente tabella:

M	C	t
	25.000	30
50.000		6
560.000	40.000	
2 S	S	

<sup>2</sup> Nota Bene. Quando abbiamo scritto questa unità la situazione dei tassi d'interesse era ben diversa. Al giorno d'oggi (anno 2017) questi tassi non raggiungono neppure l'1%, perlomeno in caso di depositi, giacché in caso di prestiti le cose sono differenti. Per questo gli esercizi proposti possono apparire anacronistici. Poco importa in realtà, poiché ciò che conta è il procedimento risolutivo che non dipende certamente dal valore dei tassi d'interesse.

5. Tizio deposita in banca la somma  $C$  al tempo 0 per riscuotere la somma  $M$  al tempo  $t$ .  
Il calcolo di  $M$  può essere ottenuto mediante una delle seguenti leggi di capitalizzazione:  
a)  $M=C(1+0,03t)$ ,    b)  $M=C \cdot 1,02^t$ .  
Stabilire quale delle due leggi è più favorevole a Tizio se il deposito è fatto per un tempo  $t$  tale che:  
1)  $t=1$ ;    2)  $t=5$ ;    3)  $t=10$ ;    4)  $t=12$ .
6. Un commerciante ha accettato in pagamento, a saldo della vendita di certi prodotti, una cambiale di € 10.000 che scade fra  $t$  anni.  
Egli però vuole incassare subito denaro liquido e per questo si rivolge alla sua banca, la quale è disposta ad accollarsi la cambiale riconoscendo al commerciante la somma  $C$  in base ad una delle seguenti leggi di sconto:  
a)  $C=10.000(1-0,035t)$ ,    b)  $C=10.000 \cdot 0,765^t$ .  
Stabilire quale delle due leggi è più favorevole alla banca se la cambiale scade fra un tempo  $t$  tale che:  
1)  $t = 6$  mesi;    2)  $t = 1$  anno;    3)  $t = 18$  mesi.

**Capitalizzazione semplice (nn. 7-21):**

7. Considerata la legge dell'interesse semplice:  $I=Cit$ , rappresentarla in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali in cui si riportino in ordinate i valori di  $I$  e in ascisse i valori:  
a) del capitale  $C$  (con  $i, t$  costanti);  
b) del tasso  $i$  (con  $C, t$  costanti);  
c) del tempo  $t$  (con  $C, i$  costanti).  
Qual è il significato economico del prodotto  $Ci$  ?
8. Considerata la legge di capitalizzazione semplice:  $M=C(1+it)$ , rappresentarla in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali in cui si riportino in ordinate i valori di  $M$  e in ascisse i valori:  
a) del capitale  $C$  (con  $i, t$  costanti);  
b) del tasso  $i$  (con  $C, t$  costanti);  
c) del tempo  $t$  (con  $C, i$  costanti).  
Qual è il significato economico del prodotto  $C(1+i)$  ?
9. Calcolare l'interesse prodotto dal capitale di € 8000 impiegato, in regime di capitalizzazione semplice, al tasso del 2,5% annuo per un tempo  $t$  tale che:  
a)  $t = 3$  anni;    b)  $t = 8$  mesi;    c)  $t = 2$  anni e 5 mesi.  
[R. a) € 600; b)  $\approx$  € 133; ... ]
10. Calcolare quale capitale, impiegato in regime di capitalizzazione semplice al tasso  $i$  per un tempo  $t$ , produce l'interesse  $I$ , sapendo che:  
a)  $I = € 750$ ,     $i = 1.2\%$  annuo,     $t = 2$  anni;  
b)  $I = € 1200$ ,     $i = 1.175\%$  annuo,     $t = 18$  mesi;  
c)  $I = € 9300$ ,     $i = 2.05\%$  annuo,     $t = 3$  anni e 3 mesi.  
[R. a) € 31250; ... ]
11. Calcolare il tasso annuo al quale bisogna impiegare, in regime di capitalizzazione semplice, il capitale di € 4000 affinché produca l'interesse  $I$  in un tempo  $t$ , sapendo che:  
a)  $I = € 900$ ,     $t = 2$  anni;  
b)  $I = € 1110$ ,     $t = 30$  mesi;  
c)  $I = € 930$ ,     $t = 8$  mesi.  
[R. a) 11,25%; ... ]

12. Calcolare in quanto tempo il capitale  $C$ , impiegato in regime di capitalizzazione semplice al tasso  $i$ , produce l'interesse  $I$ , sapendo che:
- a)  $C = € 5000$ ,  $I = € 100$ ,  $i = 1,2\%$  annuo;  
 b)  $C = € 9000$ ,  $I = € 120$ ,  $i = 1,175\%$  annuo;  
 c)  $C = € 2800$ ,  $I = € 200$ ,  $i = 2,05\%$  annuo.
- [R. a)  $\approx 1$  anno e 8 mesi; ... ]
13. Calcolare il montante di un capitale  $C$  impiegato, in regime di capitalizzazione semplice, al tasso  $i$  per un tempo  $t$ , sapendo che:
- a)  $C = € 5000$ ,  $i = 1,2\%$  annuo,  $t = 5$  anni e 8 mesi;  
 b)  $C = € 2300$ ,  $i = 3,0\%$  annuo,  $t = 3$  anni e 6 mesi;  
 c)  $C = € 7200$ ,  $i = 3,5\%$  annuo,  $t = 2$  anni e 4 mesi.
- [R. a)  $€ 5340$ ; ... ]
14. Calcolare quale capitale, impiegato in regime di capitalizzazione semplice al tasso  $i$  per un tempo  $t$ , produce il montante  $M$ , sapendo che:
- a)  $M = € 5000$ ,  $i = 1,2\%$  annuo,  $t = 5$  anni e 8 mesi;  
 b)  $M = € 2300$ ,  $i = 3,0\%$  annuo,  $t = 3$  anni e 6 mesi;  
 c)  $M = € 7200$ ,  $i = 3,5\%$  annuo,  $t = 2$  anni e 4 mesi.
- [R. a)  $\approx € 4681$ ; ... ]
15. Calcolare il tasso annuo al quale bisogna impiegare, in regime di capitalizzazione semplice, il capitale  $C$  perché produca il montante  $M$  in un tempo  $t$ , sapendo che:
- a)  $C = € 5000$ ,  $M = € 6000$ ,  $t = 5$  anni e 8 mesi;  
 b)  $C = € 2300$ ,  $M = € 2500$ ,  $t = 3$  anni e 6 mesi;  
 c)  $C = € 7200$ ,  $M = € 8000$ ,  $t = 2$  anni e 4 mesi.
- [R. a)  $\approx 3,53\%$ ; ... ]
16. Calcolare in quanto tempo il capitale  $C$  impiegato, in regime di capitalizzazione semplice al tasso  $i$ , produce il montante  $M$ , sapendo che:
- a)  $C = € 5000$ ,  $i = 1,2\%$  annuo,  $M = € 6000$ ;  
 b)  $C = € 2300$ ,  $i = 3,0\%$  annuo,  $M = € 2500$ ;  
 c)  $C = € 7200$ ,  $i = 3,5\%$  annuo,  $M = € 8000$ .
- [R. a)  $\approx 16$  anni e 8 mesi; ... ]
17. Un capitale, impiegato in regime di capitalizzazione semplice al tasso  $i$ , raddoppia il suo valore in un tempo  $t$ .
- a) Calcolare  $i$  sapendo che  $t = 15$  anni.  
 b) Calcolare  $t$  sapendo che  $i = 3\%$  annuo.
- [R. a)  $\approx 6,67\%$ ; b)  $\approx 33$  anni e 4 mesi]
18. Per estinguere un debito che ho contratto al tasso d'interesse semplice del  $5\%$  annuo, pagherò  $€ 5000$  fra 6 mesi ed  $€ 7000$  fra 9 mesi. Calcolare l'ammontare del debito. [R.  $€ 11625$ ]
19. Tizio deve pagare ad un istituto di credito, che gli pratica un interesse semplice del  $5\%$  annuo, le seguenti somme:  
 $€ 800$  fra 6 mesi;  $€ 600$  fra 9 mesi;  $€ 500$  fra 12 mesi;  $€ 800$  fra 15 mesi.  
 Egli si accorda con l'istituto per pagare tutto il debito in un'unica soluzione fra 10 mesi. Calcolare l'ammontare della somma che Tizio dovrà pagare a tale scadenza. [R.  $\approx € 2695$ ]
20. Fra 6 mesi mi scade una cambiale del valore nominale di  $€ 2500$ . Calcolare lo sconto commerciale se la cambiale venisse saldata oggi al tasso d'interesse semplice del  $5\%$  annuo.

[R.  $\approx$  € 59,52]

21. Ho due debiti con la stessa banca: uno di € 9000 mi scade fra 4 mesi, un altro di € 7000 fra 6 mesi. Se saldo oggi il debito complessivo, posso pagare la somma scontata di € 15700. Quale tasso di sconto commerciale mi viene praticato? [R.  $\approx$  4,6%]

**Capitalizzazione composta (nn. 22-41):**

22. Calcolare il montante di un capitale di € 12000 impiegato in regime di capitalizzazione composta al tasso  $i$  per 5 anni sapendo che:

a)  $i = 2,75\%$  annuo; b)  $i = 2,75\%$  semestrale; c)  $i = 2,75\%$  trimestrale.

[R. a) ...; b)  $\approx$  € 15740; c) ...]

23. Calcolare l'interesse prodotto dal capitale di € 25000 impiegato, in regime di capitalizzazione composta, al tasso  $i$  per 4 anni, sapendo che:

a)  $i = 2,5\%$  annuo; b)  $i = 1,75\%$  semestrale; c)  $i = 1,5\%$  trimestrale.

[R. a) ...; b)  $\approx$  € 3722; c) ...]

24. Calcolare quale capitale, impiegato in regime di capitalizzazione composta al tasso  $i$  per un tempo  $t$ , produce il montante  $M$ , sapendo che:

a)  $M = € 50.000$ ,  $i = 1,75\%$  annuo,  $t = 5$  anni;

b)  $M = € 23.000$ ,  $i = 3,0\%$  annuo,  $t = 3$  anni;

c)  $M = € 72.000$ ,  $i = 3,5\%$  annuo,  $t = 2$  anni.

[R. a)  $\approx$  € 45845; ...]

25. Calcolare in quanto tempo il capitale  $C$  impiegato, in regime di capitalizzazione composta al tasso  $i$ , produce il montante  $M$ , sapendo che:

a)  $C = € 50.000$ ,  $i = 1,8\%$  annuo,  $M = € 70.000$ ;

b)  $C = € 23.000$ ,  $i = 3,0\%$  annuo,  $M = € 35.000$ ;

c)  $C = € 72.000$ ,  $i = 3,5\%$  annuo,  $M = € 90.000$ .

[R. a)  $\approx$  18 anni e 10 mesi; ...]

26. Calcolare in quanto tempo il capitale  $C$  impiegato, in regime di capitalizzazione composta al tasso  $i$ , frutta l'interesse  $I$ , sapendo che:

a)  $C = € 50.000$ ,  $i = 1,2\%$  annuo,  $I = € 6.000$ ;

b)  $C = € 23.000$ ,  $i = 3,0\%$  annuo,  $I = € 2.500$ ;

c)  $C = € 72.000$ ,  $i = 3,5\%$  annuo,  $I = € 8.000$ .

d)  $i = 2,5\%$  trimestrale,  $I = \frac{1}{2}C$ .

[R. ...; d)  $\approx$  34 anni; ...]

27. Calcolare il tasso annuo al quale bisogna impiegare, in regime di capitalizzazione composta, il capitale  $C$  perché produca il montante  $M$  in un tempo  $t$ , sapendo che:

a)  $C = € 50.000$ ,  $M = € 70.000$ ,  $t = 5$  anni;

b)  $C = € 23.000$ ,  $M = € 28.000$ ,  $t = 3$  anni e 6 mesi;

c)  $C = € 72.000$ ,  $M = € 87.000$ ,  $t = 2$  anni e 4 mesi.

[R. a)  $\approx$  6,96%; ...]

28. Calcolare il tasso annuo al quale bisogna impiegare, in regime di capitalizzazione composta, il capitale di € 40000 affinché frutti l'interesse  $I$  in un tempo  $t$ , sapendo che:

a)  $I = € 10.000$ ,  $t = 5$  anni;

b)  $I = € 4.000$ ,  $t = 3$  anni e 6 mesi;

c)  $I = € 3.000$ ,  $t = 2$  anni e 4 mesi.

[R. a)  $\approx 4,56\%$ ; ...]

29. Un capitale, impiegato in regime di capitalizzazione composta al tasso  $i$ , raddoppia il suo valore in un tempo  $t$ .

a) Calcolare  $i$  sapendo che  $t = 12$  anni. b) Calcolare  $t$  sapendo che  $i = 3,75\%$  annuo.

[R. a)  $\approx 5,94\%$ ; b)  $\approx 18$  anni e 10 mesi]

30. Calcolare quale tasso effettivo annuo corrisponde ai seguenti tassi:

- a) 3,0% nominale annuo convertibili 3 volte all'anno;
- b) 2,5% nominale annuo convertibile 4 volte all'anno;
- c) 1,75% nominale annuo convertibile 3 volte all'anno;
- d) 0,75% trimestrale;
- e) 0,23% bimestrale;
- f) 1,35% semestrale.

[R. a)  $\approx 3,03\%$ ; ...; d)  $\approx 3,79\%$ ; ...]

31. Calcolare i seguenti tassi, corrispondenti al tasso effettivo annuo del 2,75%:

- a) tasso nominale annuo convertibile 3 volte all'anno;
- b) tasso nominale annuo convertibile 4 volte all'anno;
- c) tasso nominale annuo convertibile 6 volte all'anno;
- d) tasso trimestrale;
- e) tasso bimestrale;
- f) tasso semestrale.

[R. a)  $\approx 2,72\%$ ; ...; d)  $\approx 0,68\%$ ; ...]

32. Per estinguere un debito di € 15.000 pago subito € 2.000, fra un anno € 8.000 e il saldo fra 3 anni. Sapendo che mi viene praticato l'interesse composto dell'1,80% semestrale, quale somma dovrò versare a saldo del debito alla scadenza fra 3 anni? [R. € 5966,12]

33. Per estinguere un debito di 10.000 € pago subito € 2.000, fra 6 mesi € 4.000 e fra 12 mesi il saldo di € 4.450. Sapendo che l'operazione si svolge in regime di capitalizzazione composta semestrale, calcolare il tasso d'interesse semestrale praticato. [R.  $\approx 1,80\%$ ]

34. Tizio contrae un debito che s'impegna a rimborsare in tre rate del medesimo importo di € 5.000: la prima fra un anno, la seconda fra 2 anni e la terza fra 3 anni. Sapendo che gli viene praticato il tasso d'interesse composto del 4,5% annuo, calcolare l'ammontare del debito. [R.  $\approx € 13.745$ ]

35. Un operatore finanziario contrae un debito di € 25.000, che s'impegna a rimborsare in due rate di uguale importo: la prima fra 6 mesi, la seconda fra 12 mesi. Sapendo che l'operazione è effettuata in regime di capitalizzazione composta al tasso d'interesse del 2,70% semestrale, calcolare l'importo della rata. [R.  $\approx € 13.008$ ]

36. Un commerciante deve pagare ad un istituto bancario le seguenti somme:

€ 3.000 fra un anno; € 2.500 fra 18 mesi; € 5.000 fra 2 anni.

Egli vorrebbe saldare subito il debito. Se l'istituto gli pratica uno sconto del 2% annuo, quale somma dovrebbe pagare? [R.  $\approx € 10.167$ ]

37. Un capitale di € 120.000 è impiegato per 3 anni al tasso d'interesse composto del 2,75% annuo. Alla scadenza il montante, impiegato per altri 2 anni in regime di capitalizzazione composta, frutta un ulteriore interesse di € 7.600. Calcolare il nuovo tasso d'interesse. [R.  $\approx 2,87\%$ ]

38. Tizio vuole estinguere un debito di € 130.000 che scade fra 3 anni. L'istituto bancario con cui ha contratto il debito gli pratica un tasso di sconto del 2,75% annuo. Calcolare quanto Tizio deve pagare oggi e quant'è lo sconto effettuato dall'istituto. [R.  $\approx$  € 119.567; ... ]
39. Un commerciante salda con un pagamento di € 13.725 un debito di € 16.000 che scade fra 4 anni. Calcolare il tasso di sconto annuo che gli è stato praticato. [R.  $\approx$  3,76%]
40. Tizio salda un debito che scade fra 3 anni e 6 mesi e per questo ottiene uno sconto di € 748 al tasso di sconto del 2,75% annuo. Calcolare l'ammontare del debito. [R.  $\approx$  € 8044]
41. Un commerciante salda con un pagamento di € 9.735 un debito di € 11.000. Sapendo che gli è stato praticato un tasso di sconto del 3,0% annuo, calcolare fra quanto tempo sarebbe scaduto il debito. [R.  $\approx$  4 anni]

#### Questioni che richiedono un po' di ... immaginazione (nn. 42-46):

42. Un commerciante salda con un pagamento di € 12.950 un debito di € 15.000 che scade fra 4 anni. Lo giudicheresti particolarmente avveduto?
43. Un soggetto ha condotto operazioni finanziarie che l'hanno portato a incrementare il suo capitale di un quinto del suo valore in 5 anni. Lo giudicheresti particolarmente abile negli affari?
44. Mi sono offerte due possibilità: a) ricevere subito € 10.000; b) ricevere € 11.000 fra 3 anni. Cosa mi conviene fare?
45. Una cambiale del valore nominale di € 25.000, con scadenza fra 8 mesi, viene scontata oggi pagando € 24.600. Giudicheresti questa operazione particolarmente brillante?
46. Un capitale, impiegato per un tempo  $t'$  al tasso  $i$ , produce il montante  $M'$ . Questo montante, reinvestito per un tempo  $t''$  sempre al tasso  $i$ , produce il montante  $M''$ .  
Lo stesso capitale, impiegato senza interruzione per il tempo  $t'+t''$  al medesimo tasso  $i$ , produce il montante  $M$ .  
Si può affermare che  $M=M''$ ? Se  $M \neq M''$ , è  $M > M''$  oppure  $M < M''$ ?

#### Rendite e ammortamenti (nn. 47-81):

47. Una rendita *posticipata* annua è costituita da  $n$  rate di entità  $R$ . Calcolare, al tasso annuo  $i$ , il montante e il valore attuale della rendita, sapendo che:
- a)  $R = € 3500, \quad n = 15, \quad i = 3,75\%$ ;  
 b)  $R = € 5000, \quad n = 10, \quad i = 3,50\%$ ;  
 c)  $R = € 7000, \quad n = 12, \quad i = 4,25\%$ .
- [R. a)  $M \approx € 68.795, C \approx € 39.603; \dots$  ]
48. Una rendita *anticipata* annua è costituita da  $n$  rate di entità  $R$ . Calcolare, al tasso annuo  $i$ , il montante e il valore attuale della rendita, sapendo che:
- a)  $R = € 3500, \quad n = 15, \quad i = 3,75\%$ ;  
 b)  $R = € 5000, \quad n = 10, \quad i = 3,50\%$ ;  
 c)  $R = € 7000, \quad n = 12, \quad i = 4,25\%$ .
- [R. a)  $M \approx € 71374, C \approx € 41088; \dots$  ]
49. Calcolare la rata annua *posticipata* idonea ad estinguere in  $n$  rate il debito  $D$  contratto al tasso annuo  $i$ , sapendo che:
- a)  $D = € 110.000, \quad n = 15, \quad i = 3,50\%$ ;  
 b)  $D = € 50.000, \quad n = 10, \quad i = 4,85\%$ ;

c)  $D = € 280.000,$        $n = 12,$        $i = 4,5\%.$

[R. a)  $R \approx € 9550;$  ... ]

50. Calcolare la rata annua *anticipata* idonea ad estinguere in  $n$  rate il debito  $D$  contratto al tasso annuo  $i$ , sapendo che:

a)  $D = € 110.000,$        $n = 15,$        $i = 3,50\%;$

b)  $D = € 50.000,$        $n = 10,$        $i = 4,85\%;$

c)  $D = € 280.000,$        $n = 12,$        $i = 4,5\%.$

[R. a)  $R \approx € 9227;$  ... ]

51. Tizio, in seguito ad un'eredità ricevuta, ha acquisito il diritto di riscuotere € 15000 all'anno per 15 anni, a partire dalla fine dell'anno che inizia oggi.

a) Ammesso che egli depositi in banca le somme via via riscosse per ritirarle alla scadenza del 15° anno, calcolare quale somma avrà accumulato a tale scadenza nell'ipotesi che la banca gli riconosca un interesse composto del 2,75% annuo.

b) Ammesso che Tizio ceda ad un istituto di credito il diritto di riscossione delle somme, calcolare quale somma deve pretendere oggi dall'istituto stesso nell'ipotesi che questo sia disposto a riconoscergli il medesimo interesse composto del 2,75% annuo.

[R. a)  $\approx € 273.926;$   $\approx € 182.350$ ]

52. Un operaio, pensando di costituirsi un gruzzoletto per la vecchiaia, decide di depositare in banca una parte del suo stipendio, esattamente € 120 al mese a partire dalla fine di questo mese. La banca gli riconosce il tasso d'interesse composto dello 0,20% mensile. Quale somma il lavoratore riuscirà ad accumulare alla scadenza di 10 anni?

[R.  $\approx € 16.256$ ]

53. Oggi ho acceso un mutuo con la mia banca e lo estinguerò versando ogni 6 mesi per 10 anni, a partire dalla fine di questo semestre, la somma di € 7852. Sapendo che la banca mi pratica un tasso d'interesse composto del 4,25% nominale annuo rinnovabile 2 volte all'anno, calcolare l'ammontare del mutuo.

[R.  $\approx € 126.856$ ]

54. Tizio, in seguito ad un'eredità, ha acquistato il diritto di riscuotere € 18000 all'anno per 15 anni, a partire da oggi.

a) Ammesso che egli depositi in banca le somme via via riscosse per ritirarle alla fine del 15° anno, calcolare quale somma riuscirà ad accumulare a tale scadenza nell'ipotesi che la banca gli riconosca un interesse composto del 2,75% annuo.

b) Ammesso che Tizio ceda ad un istituto di credito il diritto alla riscossione delle somme, calcolare quale somma deve pretendere oggi dall'istituto stesso nell'ipotesi che questo sia disposto a riconoscergli il medesimo interesse del 2,75% annuo.

55. Un debito può essere estinto versando per 5 anni, ogni 6 mesi a partire da oggi, la somma di € 6.530. La banca con cui è stato contratto il debito pratica un tasso d'interesse nominale annuo del 4,5%, ma capitalizza gli interessi ogni 6 mesi. Calcolare l'ammontare del debito.

56. Una persona, in seguito ad un'eredità, ha acquistato il diritto di riscuotere € 10.000 all'anno per 10 anni, ma riscuoterà la prima rata esattamente fra 5 anni. Ammesso che egli ceda ad una banca il diritto alla riscossione delle somme, calcolare quale somma deve pretendere oggi dalla banca nell'ipotesi che questa gli riconosca un interesse del 3,50% annuo.

57. All'inizio di ogni semestre, per 10 anni, una persona deposita in banca la somma di € 1.000. La banca gli corrisponde un tasso d'interesse del 2,75% nominale annuo ma capitalizza gli interessi due volte all'anno. Calcolare quale somma accumulerà quella persona alla fine del 12° anno.

58. Tizio contrae con una banca un debito che s'impegna ad estinguere con 15 versamenti semestrali del valore costante di € 12.500, a partire dall'inizio del terzo anno dopo la stipula del contratto. Sapendo che la banca esige un tasso d'interesse nominale annuo del 4,95% e capitalizza gli interessi due volte all'anno, calcolare l'ammontare del debito.
59. Tizio contrae con una banca un debito di € 25.000 che s'impegna ad estinguere con 15 versamenti semestrali di valore costante, a partire dalla fine del semestre in cui ha stipulato il contratto. Sapendo che la banca esige un tasso d'interesse nominale annuo del 4,95% convertibile due volte all'anno, calcolare l'ammontare della rata.
60. Redigere, per mezzo di un foglio elettronico, il piano di ammortamento per l'estinzione di un debito  $D$ , con  $n$  rate annuali costanti posticipate, al tasso annuo  $i$ , sapendo che:
- $D = € 480.000$ ,  $n = 15$ ,  $i = 4,95\%$ ;
  - $D = € 250.000$ ,  $n = 20$ ,  $i = 4,75\%$ ;
  - $D = € 124.750$ ,  $n = 25$ ,  $i = 4,50\%$ .
61. Viene acceso un mutuo di € 190.000, da estinguere in 10 anni, con rate trimestrali costanti posticipate, al tasso del 4,70% nominale annuo. Servendosi di un foglio elettronico, redigere il piano di ammortamento.
62. Viene acceso un mutuo di € 235.000, da estinguere in 15 anni, con rate trimestrali costanti posticipate, al tasso effettivo del 4,60% annuo. Servendosi di un foglio elettronico, redigere il piano di ammortamento.
63. Viene acceso un mutuo di € 150.000, da estinguere in 10 anni, con rate semestrali costanti posticipate, al tasso effettivo del 4,50% annuo. Servendosi di un foglio elettronico, redigere il piano di ammortamento.
64. Un metodo di ammortamento diverso da quello progressivo è il **metodo americano**. Con questo metodo il mutuatario s'impegna a restituire al mutuante, in unica soluzione, alla fine dell' $n$ -esimo periodo dalla stipula del contratto, il capitale  $C$  avuto in prestito ed a pagare, alla fine di ogni periodo, per  $n$  periodi, l'interesse costante  $Ci$ , dove  $i$  è il tasso praticato relativamente al periodo. Lo schema di figura 8 visualizza l'operazione.
- Verificare che il valore attuale della rendita considerata è proprio  $C$ .
  - Redigere con il metodo americano i piani di ammortamento delle operazioni già proposte nell'esercizio n. 60 col metodo francese.

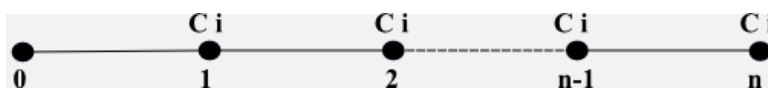


FIG. 8

65. Un altro metodo di ammortamento è il **metodo italiano**, detto anche metodo a quota capitale costante. Con questo metodo il mutuatario s'impegna a restituire al mutuante in  $n$  periodi il capitale  $C$  avuto in prestito, versando alla fine di ogni periodo la quota capitale costante  $C/n$  più gli interessi sul debito residuo.
- Descrivere come si costruisce il relativo piano di ammortamento.
  - Costruire con il metodo italiano i piani di ammortamento delle operazioni già proposte nell'esercizio n. 60 col metodo francese.

## UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

## DOMANDE.

1. In cosa consiste il principio di equivalenza finanziaria?
2. Che cosa si deve intendere per situazione economica?
3. Qual è l'equazione che esprime la legge di capitalizzazione semplice? Da cosa è rappresentata in un piano in cui in ascisse si prendono i tempi e in ordinate i montanti?
4. Qual è l'equazione che esprime la legge di capitalizzazione composta? Da cosa è rappresentata in un piano in cui in ascisse si prendono i tempi e in ordinate i montanti?
5. Che relazione sussiste fra il tasso nominale annuo  $i$  convertibile  $k$  volte all'anno e il corrispondente tasso effettivo annuo  $j$ ?
6. Se un cliente deposita la somma  $C$  in banca e gli viene praticato il tasso annuo  $i$ , con capitalizzazione che avviene  $k$  volte all'anno, quale somma la banca gli riconosce alla scadenza di  $t$  anni?
7. Il sig. Rossi deposita alla fine di determinate scadenze periodiche, per  $n$  periodi, una somma costante  $R$ . Gli viene riconosciuto un tasso d'interesse composto  $i$  per periodo. Di quale somma  $M$  potrà disporre Tizio alla fine dell' $n$ -esimo periodo? Qual è il valore attuale  $C$  di tale somma?
8. Il sig. Rossi contrae un mutuo di € 250.000 al tasso annuo del 5,5%, con rate semestrali costanti. Ti pare possibile che la quota interesse della prima rata risulti la medesima sia se il mutuo è contratto per 10 anni sia se è contratto per 15 o per 20?

## RISPOSTE.

1. È il principio in base al quale possedere una somma  $C$  al tempo 0 equivale, secondo un'opportuna convenzione, a possedere la somma  $M$  al tempo  $t$ .
2. Una situazione economica non è altro che una coppia ordinata in cui la prima componente è un importo e la seconda un tempo.
3. La legge di capitalizzazione semplice è espressa dalla seguente legge:  $M=C(1+it)$ , dove  $C$  è il capitale investito al tempo 0 ed  $M$  è il valore del montante al tempo  $t$ , mentre  $i$  è il tasso relativo ad un periodo. In un piano cartesiano, in cui in ascisse si prendono i tempi (con  $t \geq 0$ ) e in ordinate i montanti, questa legge è rappresentata da una semiretta che ha origine nel punto  $(0,C)$  e pendenza  $Ci$ .
4. La legge di capitalizzazione composta è espressa dalla seguente legge:  $M=C(1+i)^t$ , dove  $C$  è il capitale investito al tempo 0 ed  $M$  è il valore del montante al tempo  $t$ , mentre  $i$  è il tasso relativo ad un periodo. In un piano cartesiano, in cui in ascisse si prendono i tempi (con  $t \geq 0$ ) e in ordinate i montanti, questa legge è rappresentata da un arco di curva esponenziale crescente che ha origine nel punto  $(0,C)$ .
5. Risulta:  $j = \left(1 + \frac{i}{k}\right)^k - 1$  ed è  $i < j$ .
6. La banca riconosce al cliente la somma  $M = C \left(1 + \frac{i}{k}\right)^{kt}$ .
7. Si ha:  $M = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$  e, di conseguenza:  $C = R \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$ .
8. Non solo è possibile, ma è certo. La quota interesse sulla 1ª rata, infatti, è  $I_1 = Ci$ , dove  $C$  è l'ammontare del mutuo ed  $i$  è l'interesse semestrale: quantità che non dipendono dal numero degli anni di durata del mutuo.

**Complementi: TAN e TAEG.**

1. Vogliamo qui riprendere i concetti di tasso annuo nominale e di tasso effettivo per un approfondimento da un punto di vista, come dire, moderno.

Il **tasso annuo nominale** è indicato da qualche tempo con la sigla **TAN**, mentre con la sigla **TAEG** si indica il **tasso annuo effettivo globale**.

Per far comprendere meglio di cosa si tratti (non tanto per il TAN, che dovrebbe essere chiaro, quanto per il TAEG) facciamo ricorso ad una esemplificazione.

Ipotizziamo dunque che Luca abbia preso in prestito dalla Banca la somma di € 10.000 ad un TAN del 5%. Questo significa che Luca, alla scadenza dell'anno, dovrà restituire alla Banca la somma di euro:

$$10.000 + \frac{5}{100} \cdot 10.000 = 10.500 .$$

Il rimborso può avvenire, invece che in un'unica soluzione, a scadenze fisse con pagamenti rateizzati, per esempio in 4 rate. In tal caso Luca verserà alla Banca, ogni 3 mesi, per 4 volte in un anno, la somma di euro:

$$\frac{1}{4} \cdot 10.500 \approx 2.625 .$$

Si capisce che con questa modalità Luca, pagando anticipatamente, rimborsa la somma presa in prestito con un interesse più alto. Questo interesse, ovvero il **tasso annuo effettivo** (sigla **TAE**) è:

$$\text{TAE} = \left(1 + \frac{\text{TAN}}{4}\right)^4 - 1 \approx 0,0509 = 5,09\% .$$

Ovviamente, tanto più numerose sono le rate e tanto maggiore è il TAN, tanto più elevato sarà il TAE.

2. Con il procedimento descritto l'unico costo sostenuto da Luca è il tasso d'interesse. Ora però, nella realtà, questo non è affatto vero. Ci sono infatti alcune spese aggiuntive che la Banca fa pagare. Ne prendiamo in considerazione solo due, per comodità di ragionamento, ma in realtà sono di più. Ad ogni modo le due che prendiamo in considerazione sono: spese di apertura della pratica e spese di incasso della rata. Cosicché, ritornando all'esempio precedente, se ci sono, per esempio, € 200 di spese di apertura della pratica, la somma erogata a Luca dalla Banca sarà di € 9.800 e non di 10.000. A questa somma bisognerà poi aggiungere le spese d'incasso di ogni rata (supponiamo che siano di € 2 per rata). Di modo che la rata che ogni trimestre Luca pagherà alla Banca sarà di euro  $R=R'+2$ , dove  $R'$  è la rata di una rendita posticipata di  $n=4$  rate, al tasso  $i=0,05/4$ , su un capitale  $C = € 9.800$ , vale a dire:

$$R' = \frac{C i}{1 - (1 + i)^{-n}} = \frac{9.800 \times 0,05/4}{1 - (1 + 0,05/4)^{-4}} \approx 2527 .$$

Luca, dunque, pagherà una rata trimestrale di € 2529.

Quale sarà il TAEG?

Per stabilirlo calcoliamo dapprima il tasso nominale annuo  $r$  utilizzando la stessa formula precedente:

$$2.529 = \frac{9.800 \times \frac{r}{4}}{1 - \left(1 + \frac{r}{4}\right)^{-4}} .$$

Da qui, ponendo per comodità  $r/4=\rho$ , segue:

$$\frac{1 - (1 + \rho)^{-4}}{\rho} = \frac{9.800}{2.529} \approx 3,87504 .$$

Per calcolare  $\rho$  si può far ricorso ad un processo d'interpolazione oppure, almeno in questa circostanza, ad un idoneo software matematico. Con la prima modalità il procedimento è del tutto uguale a quello esposto per la risoluzione degli esercizi 2 e 3 in 61.1.8. In ogni caso si trova:

$$\rho \approx 0,012816$$

e pertanto il tasso annuo nominale è:

$$r = 4 \rho \approx 0,0512 = 5,12\% .$$

Di conseguenza il tasso annuo effettivo è:

$$\text{TAE} = \left(1 + \frac{0,0512}{4}\right)^4 - 1 \approx 0,522 = 5,22\% .$$

Ed è questo anche il TAEG, cioè il tasso annuo effettivo globale. Ben superiore, quindi, al tasso annuo effettivo, calcolato senza tener conto degli ammenicoli vari, che è, come visto sopra, 5,09% ed ancora superiore al TAN, che è il 5% .

Quando si richiede un prestito, in conclusione, può servire conoscere il TAN, ma solo a titolo di curiosità. Ciò che interessa veramente è conoscere il TAEG.