Prerequisiti:
- Nozioni basilari di trigonometria piana.
- Conoscere e applicare il teorema di Pitagora.

**Questa unità riguarda il 2° biennio del seguente indirizzo dell'Istituto Tecnico, settore Tecnologico: Trasporti e Logistica.**

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:

- *enunciare e dimostrare i teoremi di Eulero e dei seni*
- *avere consapevolezza delle regole di Viète e di Nepero*
- *risolvere un triangolo sferico, eventualmente anche con l'ausilio di una calcolatrice scientifica*


**62.1 Il triangolo sferico.**
**62.2 Relazioni tra gli elementi di un triangolo sferico.**
**62.3 Risoluzione di un triangolo sferico rettangolo.**
**62.4 Risoluzione di un triangolo sferico rettilatero.**
**62.5 Risoluzione di un triangolo sferico obliquangolo.**

***Verifiche.***

**Una breve sintesi per domande e risposte.**


# Cenni di Trigonometria sferica

## Unità 62

## 62.1 IL TRIANGOLO SFERICO

**62.1.1** Fissati due punti A e B su una superficie piana, si sa che il percorso più breve per andare da A a B, ammesso che sia possibile muoversi in ogni direzione, è la retta AB.

E se i punti A e B sono due punti qualsiasi di una superficie sferica? Prova a verificare che succede se la sfera è una palla di gomma. Segna sulla sua superficie due qualsiasi punti e prova a congiungerli con un tratto che abbia la minima lunghezza possibile: noterai anzitutto che il percorso da A a B non può avvenire in linea retta e, in secondo luogo, che il cammino più breve si realizza lungo il più piccolo degli archi di circonferenza massima passante per i due punti [1]. Ogni altro tratto che unisce i due punti, effettuato sempre sulla superficie sferica, è più lungo di questo.

Il problema di "***tracciare la linea di minimo percorso, fra due punti, su una superficie***" fu posto da **Johann Bernoulli** (1667-1748) nel 1697. Queste linee furono poi chiamate *geodetiche* da **Pierre Simon de Laplace** (1749-1827) nel 1798 e studiate in maniera approfondita da **Bernhard Riemann** (1826-1866).

Possiamo, dunque, assumere la seguente DEFINIZIONE:

**Geodetica** è la linea che realizza, su una data superficie,
il minimo percorso fra due punti assegnati.

Pertanto:

a) Le geodetiche di un piano sono le rette passanti per i due punti.
b) Le geodetiche di una superficie sferica sono le circonferenze massime passanti per i due punti.

**62.1.2** Prendiamo, su una superficie sferica, tre punti A, B, C non situati sulla stessa circonferenza massima e li congiungiamo due a due col minore dei due archi di geodetica passante per essi. I tre archi suddividono la superficie sferica in due porzioni. La minore di esse si chiama **triangolo sferico** (Fig. 1).

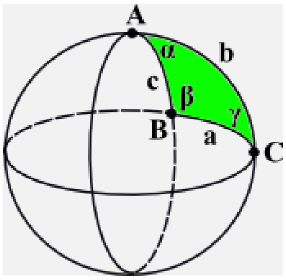

FIG. 1

Gli archi AB, BC, CA si dicono ***lati*** del triangolo. Le loro ampiezze – nell'ordine: c, a, b – sono date dalle ampiezze dei corrispondenti angoli al centro delle circonferenze massime.
Gli angoli formati da tali archi, presi a due a due – uguali agli angoli formati dalle rette tangenti ad essi nei vertici A, B, C – si chiamano ***angoli*** del triangolo. Indichiamo le loro ampiezze con le corrispondenti lettere minuscole dell'alfabeto greco: $\alpha, \beta, \gamma$.
S'intende che le ampiezze dei lati e degli angoli di un triangolo sferico possono essere espresse sia in gradi sessagesimali sia in radianti.

[1] Ricordiamo che una **circonferenza massima** è quella che si ottiene sezionando la superficie sferica con un piano passante per il suo centro.

- Se espresse in radianti, le ampiezze dei lati e degli angoli di un triangolo sferico sono tutte comprese fra 0 e π, estremi esclusi. Dunque:
$$0<a<\pi,\ \ 0<b<\pi,\ \ 0<c<\pi;\quad 0<\alpha<\pi,\ \ 0<\beta<\pi,\ \ 0<\gamma<\pi.$$
In generale si ha poi:
$$0<a+b+c<2\pi,\ \ \pi<\alpha+\beta+\gamma<3\pi.$$
Inoltre, ammesso che sia $a\geq b\geq c$, risulta:
$$a<b+c.$$
- Valgono le seguenti proprietà:
  - In ogni triangolo sferico a lato maggiore è opposto angolo maggiore e a lato minore è opposto angolo minore.
  - Se tutti e tre gli angoli di un triangolo sferico sono minori di $\pi/2$ allora ognuno dei lati è minore di $\pi/2$; e viceversa.
- Un triangolo sferico avente due lati uguali si dice ***isoscele***.
Se un triangolo sferico è isoscele i due angoli opposti ai lati uguali sono uguali; e viceversa.
- Un triangolo sferico si dice ***equilatero*** se ha tutti e tre i lati uguali, si dice ***equiangolo*** se ha tutti e tre gli angoli uguali.
Un triangolo sferico è equilatero se e solo se è equiangolo.
- Se gli elementi:
$$a, b, c\quad \text{ed}\quad \alpha, \beta, \gamma$$
sono rispettivamente i lati e gli angoli di un triangolo sferico ABC allora sono elementi di un triangolo sferico A’B’C’ gli elementi:
$$a', b', c'\quad \text{ed}\quad \alpha', \beta', \gamma',$$
dove:
$$a'=\pi-\alpha,\ b'=\pi-\beta,\ c'=\pi-\gamma\quad \text{e}\quad \alpha'=\pi-a,\ \beta'=\pi-b,\ \gamma'=\pi-c.$$
I due triangoli ABC e A’B’C’ si dicono ***supplementari*** o ***polari***.

## 62.2 RELAZIONI FRA GLI ELEMENTI DI UN TRIANGOLO SFERICO

**62.2.1** Sussistono delle relazioni fra le funzioni trigonometriche dei lati e degli angoli di un triangolo sferico.

Il gruppo fondamentale di tali relazioni è costituito dal cosiddetto **teorema di Eulero** [2] (o **teorema del coseno** per i triangoli sferici):

**[1]**
$$\begin{aligned}\cos a &= \cos b\cos c+\sin b\sin c\cos\alpha\\ \cos b &= \cos c\cos a+\sin c\sin a\cos\beta\\ \cos c &= \cos a\cos b+\sin a\sin b\cos\gamma\end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo un triangolo sferico ABC, contenuto su una superficie sferica di centro O (Fig. 2). Tracciate per un vertice, ad esempio A, le rette tangenti t’ e t” agli archi AB e AC uscenti da esso, indichiamo con L il punto in cui t’ interseca la retta OB e con M il punto in cui t” interseca la retta OC.

Per il teorema del coseno (per i triangoli piani), applicato una volta al triangolo OLM ed una seconda volta al triangolo ALM, ma sempre con riferimento al lato LM, si ha:

[2] **Euler** (italianizzato **Eulero**), Leonhard, matematico svizzero, 1707-1783.

$$\overline{LM}^2=\overline{OL}^2+\overline{OM}^2-2\,\overline{OL}\,\overline{OM}\cos L\hat{O}M\,,\quad \overline{LM}^2=\overline{AL}^2+\overline{AM}^2-2\,\overline{AL}\,\overline{AM}\cos L\hat{A}M\,;$$

per cui, tenendo presente che $L\hat{O}M=\alpha$ ed $L\hat{A}M=\alpha$, risulta:

$$\overline{OL}^2+\overline{OM}^2-2\,\overline{OL}\,\overline{OM}\cos a=\overline{AL}^2+\overline{AM}^2-2\,\overline{AL}\,\overline{AM}\cos\alpha\,.$$

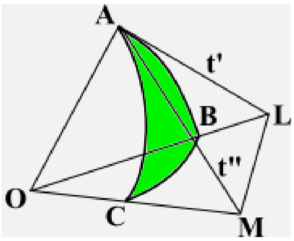


FIG. 2

D'altro canto, per il teorema di Pitagora, applicato una volta al triangolo $OAL$ e una seconda volta al triangolo $OAM$, entrambi rettangoli in A, si ha:

$$\overline{OL}^2=\overline{OA}^2+\overline{AL}^2 \quad \text{e} \quad \overline{OM}^2=\overline{OA}^2+\overline{AM}^2.$$

Pertanto la precedente relazione diventa:

$$\left(\overline{OA}^2+\overline{AL}^2\right)+\left(\overline{OA}^2+\overline{AM}^2\right)-2\,\overline{OL}\cdot\overline{OM}\cos a=\overline{AL}^2+\overline{AM}^2-2\,\overline{AL}\cdot\overline{AM}\cos\alpha$$

da cui, dopo qualche semplificazione, si ottiene:

$$\overline{OL}\cdot\overline{OM}\cos\alpha=\overline{OA}^2+\overline{AL}\cdot\overline{AM}\cos\alpha.$$

Ma, sempre nel triangolo rettangolo $OAL$:

$$\overline{OA}=\overline{OL}\cos c\,,\quad \overline{AL}=\overline{OL}\sin c;$$

mentre nel triangolo rettangolo $OAM$:

$$\overline{OA}=\overline{OM}\cos b\,,\quad \overline{AM}=\overline{OM}\sin b;$$

pertanto, ritornando alla relazione precedente e sostituendo:

$$\overline{OL}\cdot\overline{OM}\cos a=\left(\overline{OL}\cos c\right)\left(\overline{OM}\cos b\right)+\left(\overline{OL}\sin c\right)\left(\overline{OM}\sin b\right)\cos\alpha\,,$$

da cui infine, dividendo entrambi i membri per $\overline{OL}\,\overline{OM}$, segue:

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos\alpha.$$

Invece che sul vertice A si può ragionare sul vertice B e sul vertice C: si trovano altre due formule analoghe alla precedente.

In realtà, queste altre due formule si ottengono rapidamente da quella trovata con una permutazione ciclica sulle lettere $\alpha, \beta, \gamma$ ed $a, b, c$. Vale a dire, per quanto riguarda la seconda formula delle [1], sostituendo nella prima contemporaneamente $\alpha, \beta, \gamma$ rispettivamente con $\beta, \gamma, \alpha$, ed $a, b, c$ rispettivamente con $b, c, a$. Analogamente per la terza formula.

Si ottiene così il gruppo di formule [1].

**62.2.2** Se del triangolo ABC consideriamo il ***polare***, le precedenti formule [1] subiscono una trasformazione ed assumono la forma seguente:

$$\cos(\pi-\alpha)=\cos(\pi-\beta)\cos(\pi-\gamma)+\sin(\pi-\beta)\sin(\pi-\gamma)\cos(\pi-a)$$
$$\cos(\pi-\beta)=\cos(\pi-\gamma)\cos(\pi-\alpha)+\sin(\pi-\gamma)\sin(\pi-\alpha)\cos(\pi-b)$$
$$\cos(\pi-\gamma)=\cos(\pi-\alpha)\cos(\pi-\beta)+\sin(\pi-\alpha)\sin(\pi-\beta)\cos(\pi-c)$$

da cui, dopo aver semplificato, segue un nuovo gruppo di formule che legano gli elementi del triangolo sferico ABC:

**[2]**
$$\begin{aligned}\cos\alpha &= -\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cos a\\ \cos\beta &= -\cos\gamma\cos\alpha+\sin\gamma\sin\alpha\cos b\\ \cos\gamma &= -\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos c\end{aligned}$$

**62.2.3** Il teorema di Eulero evidenzia un fatto importante: per risolvere un triangolo sferico, vale a dire per determinare le sei ampiezze che lo caratterizzano, di regola è sufficiente conoscerne tre (eventualmente anche tutti e tre angoli, diversamente da quanto accade per un triangolo piano, in cui almeno un elemento deve essere un lato); le altre tre si possono calcolare mediante le formule [1], che danno luogo per l'appunto ad un sistema di tre equazioni in tre incognite. Fatte salve, naturalmente, le difficoltà di calcolo per la risoluzione del sistema che si ottiene.

- Ad esempio, se si conoscono i tre lati del triangolo – a, b, c – dalle [1] seguono immediatamente i valori di $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ e, di conseguenza, quelli di α, β, γ.
- Altro esempio. Noti i tre angoli – α, β, γ – dalle [2] seguono immediatamente i valori di $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$ e, di conseguenza, quelli di a, b, c.
- In particolare, se $\alpha=\beta=\gamma=\pi/2$, si ha il sistema delle seguenti equazioni:
  $$\cos a=\cos b\cos c\,,\quad \cos b=\cos c\cos a\,,\quad \cos c=\cos a\cos b\,.$$
  Sostituendo nella prima equazione, al posto di $\cos c$, l'espressione fornita dalla terza equazione, la prima equazione diventa:
  $$\cos a=\cos^2 b\cos a,\ \text{ossia: } \cos a\left(1-\cos^2 b\right)=0,\ \text{o anche: } \cos a\sin^2 b=0.$$
  Siccome $0<b<\pi$ e quindi $\sin b\neq0$, deve essere $\cos a=0$ e perciò $a=\pi/2$.
  In modo analogo si trova: $b=\pi/2$, $c=\pi/2$.

**62.2.3** I calcoli per risolvere un triangolo sferico, che sono piuttosto semplici nei casi che abbiamo preso in considerazione, si complicano notevolmente in casi più generali. A volte, proprio per avere a che fare con calcoli più semplici, sono utilizzate formule alternative alle [1]. Formule che da quelle comunque derivano. Ne abbiamo visto un esempio con le formule [2]. Di altri esempi ci occuperemo fra breve.
Intanto diciamo che distingueremo per comodità tre situazioni:
- nella prima supporremo che almeno uno degli angoli del triangolo sferico sia retto: il triangolo sarà denominato ***triangolo sferico rettangolo***;
- nella seconda supporremo che almeno uno dei lati del triangolo sferico sia retto: il triangolo sarà denominato ***triangolo sferico rettilatero***;
- nella terza ci occuperemo dei triangoli sferici non rettangoli e non rettilateri: saranno denominati ***obliquangoli***.

**62.2.4** Un gruppo di formule che sono diretta conseguenza delle formule di Eulero è costituito dal cosiddetto *teorema dei seni*, esso pure scoperto da Eulero.
Il **teorema dei seni** per i triangoli sferici è sintetizzato dalle seguenti relazioni:

[3]
$$\frac{\sin\alpha}{\sin a}=\frac{\sin\beta}{\sin b}=\frac{\sin\gamma}{\sin c}\,.$$

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione non è difficile sul piano concettuale, ma comporta noiose lungaggini nei calcoli. Incominciamo a scrivere le ultime due equazioni delle [1] in questo modo:

$$\sin c \sin a \cos\beta = \cos b - \cos c \cos a\,, \qquad \sin a \sin b \cos\gamma = \cos c - \cos a \cos b\,;$$

in tali equazioni, eleviamo al quadrato entrambi i membri e sottraiamo membro a membro; otteniamo:

$$\sin^2 c \sin^2 a \cos^2\beta - \sin^2 a \sin^2 b \cos^2\gamma =$$
$$=\left(\cos^2 b + \cos^2 c \cos^2 a - 2\cos b \cos c \cos a\right) - \left(\cos^2 c + \cos^2 a \cos^2 b - 2\cos c \cos a \cos b\right)$$

da cui segue:

$$\sin^2 a\left(\sin^2 c \cos^2\beta - \sin^2 b \cos^2\gamma\right) = \left(\cos^2 b - \cos^2 c\right) - \cos^2 a\left(\cos^2 b - \cos^2 c\right).$$

ossia:

$$\sin^2 a\left(\sin^2 c \cos^2\beta - \sin^2 b \cos^2\gamma\right) = \left(1-\cos^2 a\right)\left(\cos^2 b - \cos^2 c\right),$$

e ancora, tenendo presente che: $1-\cos^2 a = \sin^2 a$ e che: $\cos^2 b = 1-\sin^2 b$ e $\cos^2 c = 1-\sin^2 c$, dividendo entrambi i membri per $\sin^2 a$:

$\sin^2 c \cos^2\beta - \sin^2 b \cos^2\gamma = \left(1-\sin^2 b\right)\left(1-\sin^2 c\right)$ ovvero: $\sin^2 b\left(1-\cos^2\gamma\right) = \sin^2 c\left(1-\cos^2\beta\right)$

e perciò:

$$\sin^2 b \sin^2\gamma = \sin^2 c \sin^2\beta\ .$$

Poiché $\sin\beta$, $\sin\gamma$, $\sin b$, $\sin c$ sono quantità positive (si ricorda che le ampiezze sono comprese fra 0 e π), dalla precedente relazione segue quest'altra:

$$\sin b \sin\gamma = \sin c \sin\beta\,,$$

che può essere messa nella forma seguente:

$$\frac{\sin\beta}{\sin b} = \frac{\sin\gamma}{\sin c}.$$

Per sostituzione ciclica si ottiene poi quest'altra relazione:

$$\frac{\sin\gamma}{\sin c} = \frac{\sin\alpha}{\sin a}$$

e, di conseguenza, sono dimostrate le relazioni [3].

**62.2.5** Avvertiamo che, da qui in poi, supporremo che angoli e lati dei triangoli siano espressi in gradi sessagesimali ed inoltre troveremo i risultati degli esercizi facendo largo uso di strumenti di calcolo automatico ed, in particolare, di idonei software matematici.

Per questo sono necessari alcuni richiami di cose che, per la verità, dovresti conoscere.

Anzitutto ricordiamo la formula che permette di trasformare gli uni negli altri i gradi sessagesimali g ed i radianti ρ:

$$\frac{g}{\rho} = \frac{180}{\pi}.$$

Ricordiamo poi che se un angolo è espresso, nella forma "complessa", in gradi primi e secondi, come ad esempio 19°27'42", per poterlo far leggere da uno strumento di calcolo automatico è necessario metterlo in forma decimale, in questo modo:

$$19°27'42" = \left(19 + \frac{27}{60} + \frac{42}{3600}\right)^{o} \approx 19°,461666.$$

D'altro canto, se l'uscita è un angolo espresso in forma decimale, c'è necessità di trasformarlo in forma "complessa". L'operazione, eseguita comunque mediante calcolo automatico, si sviluppa in questo modo, con riferimento allo stesso angolo considerato sopra:

- i gradi dell'angolo sono 19;
- ne consegue che i primi sono 19,461666–19=0,461666; ossia riportati nel sistema sessagesimale: 0,461666×60=27,699999; quindi i primi dell'angolo sono 27;

- i secondi, a loro volta, sono 27,699999–27=0,699999; ossia, riportati nel sistema sessagesimale: 0,699999×60=41,999975; quindi i primi, approssimando per eccesso, sono 42.

In definitiva: 19°,461666=19°27’42”.

### 62.3 RISOLUZIONE DI UN TRIANGOLO SFERICO RETTANGOLO

**62.3.1** Considerato il triangolo sferico ABC, supponiamo che esso sia rettangolo in A, ragion per cui risulta: α=90°(Fig. 3). Benché con abuso di linguaggio, continuiamo a denominare “ipotenusa” il lato opposto all’angolo retto e “cateti” gli altri due lati.

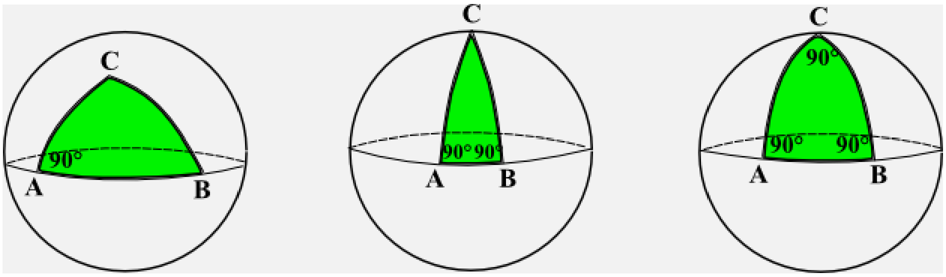


FIG. 3 FIG. 4 FIG. 5

In realtà in un triangolo rettangolo uno degli altri due angoli può essere ancora un angolo retto (in tal caso il triangolo si chiama a volte *birettangolo* – Fig. 4) o addirittura possono essere retti entrambi gli altri angoli (in tal caso il triangolo è detto *trirettangolo* – Fig. 5).

- Valgono le seguenti **proprietà generali dei triangoli sferici rettangoli**:
  - Ogni cateto e l’angolo opposto sono della stessa specie (entrambi acuti o entrambi ottusi).
  - I lati possono essere o tutti e tre minori di 90° oppure due maggiori di 90° ed uno minore.
  - Ciascuno degli altri due angoli, se è minore di 90° allora non può essere minore del cateto opposto, e se è maggiore di 90° allora non può essere maggiore del cateto opposto.
  - Un cateto minore di 90° è minore dell’ipotenusa e un cateto maggiore di 90° è maggiore dell’ipotenusa.

**62.3.2** La risoluzione di un triangolo sferico rettangolo è basata su alcuni teoremi riguardanti un tale triangolo. Teoremi che però non dimostreremo, limitandoci a fornire una regola che li sintetizza tutti, nota come *regola di Nepero* [3].

Questa regola prevede che si costruisca un idoneo pentagono (Fig. 6), denominato per l’appunto *pentagono di Nepero*, e si inserisca in ognuno dei 5 settori in cui esso è suddiviso uno dei 5 argomenti:

$$90°-a,\ \ b,\ \ c,\ \ 90°-\beta,\ \ 90°-\gamma,$$

rispettando il seguente criterio:

- 90°–a è collocato in un qualsiasi settore;
- nei due settori adiacenti si inseriscono gli argomenti 90°–β e 90°–γ;
- negli altri due settori vanno gli argomenti b e c in modo che il primo sia adiacente a 90°–γ ed il secondo sia adiacente a 90°–β.

[3] **Napier** (italianizzato **Nepero**), John, proprietario terriero scozzese, matematico per diletto, 1550-1617.

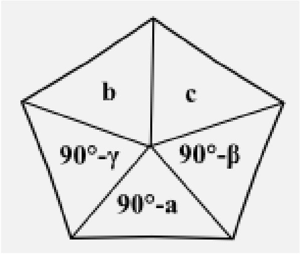


FIG. 6

Ebbene la **regola di Nepero** è la seguente:

Il seno dell'elemento inserito in un qualsiasi settore del pentagono è uguale:
- al prodotto delle tangenti dei due elementi inseriti nei settori adiacenti;
- al prodotto dei coseni dei due elementi inseriti nei settori non adiacenti.

Così, giusto per fare qualche esempio, si ottengono le seguenti formule:
- $\sin(90°-a) = \cos b \cos c$, che è come dire:
$$\cos a = \cos b \cos c\,.$$
Formula che peraltro si ottiene immediatamente dalla prima delle [1], ponendo $\alpha=90°$.
- $\sin(90°-\gamma) = \tan(90°-a)\tan b$, che è come dire (4):
$$\cos\gamma = \operatorname{cotan} a \tan b.$$

Utilizzando la regola di Nepero è possibile fornire una spiegazione delle seguenti proprietà su cui si basa la risoluzione dei triangoli sferici rettangoli:
- **Il coseno dell'ipotenusa è uguale al prodotto dei coseni dei cateti.**
- **Il coseno dell'ipotenusa è uguale al prodotto delle cotangenti degli angoli opposti ai cateti.**
- **Il seno di un cateto è uguale al prodotto dei seni dell'angolo opposto ad esso e dell'ipotenusa.**
- **Il coseno di un angolo opposto ad un cateto è uguale al prodotto del coseno di quel cateto per il seno dell'angolo opposto all'altro cateto.**
- **Il seno di un cateto è uguale al prodotto della tangente dell'altro cateto per la cotangente dell'angolo opposto a quest'ultimo cateto.**
- **Il coseno di angolo opposto ad un cateto è uguale al prodotto della tangente del cateto adiacente per la cotangente dell'ipotenusa.**

**62.3.3** Occupiamoci adesso della risoluzione di qualche esercizio, nel quale supporremo che sia $\alpha=90°$. Ovviamente ci serviremo della regola di Nepero, ma è opportuno tener presenti, se occorre, le proprietà generali enunciate sia in chiusura del paragrafo 62.1.2 sia in chiusura del paragrafo 62.3.1.
- ESERCIZIO 1. Risolvere il triangolo sferico ABC sapendo che:
$$\beta=90°,\quad \gamma=70°.$$

RISOLUZIONE. In base alla regola di Nepero:
$$\cos a = \operatorname{cotan}\beta \operatorname{cotan}\gamma,$$

---

[4] Ricordiamo che la cotangente di un angolo è il reciproco della tangente dell'angolo, vale a dire:
$$\operatorname{cotan} x = \frac{1}{\tan x}.$$

da cui, tendo presente che $\operatorname{cotan}\beta=\operatorname{cotan}90°=0$ (anche $\operatorname{cotan}\gamma=\operatorname{cotan}90°=0$, ma questo è superfluo) risulta $\cos a=0$ e perciò $a=90°$.
Sempre per la regola di Nepero si ha:
$$\sin b=\sin a\sin\beta=1$$
e perciò $b=90°$.
Ancora per la regola di Nepero:
$$\sin(90°-\gamma)=\cos c\cos(90°-\beta) \text{ ossia } \cos\gamma=\cos c\sin\beta.$$
e perciò $\cos c=\cos\gamma$. Di conseguenza: $c=\gamma=70°$.
In conclusione i valori che risolvono il triangolo sono i seguenti:
$$a=b=90°,\quad c=70°.$$
Il ricorso al teorema dei seni consente di verificare che la soluzione trovata è esatta.

- ESERCIZIO 2. Risolvere il triangolo sferico ABC sapendo che:

$$\beta=60°,\ a=45°.$$
RISOLUZIONE. In virtù della regola di Nepero si ha:
$$\sin(90°-\beta)=\tan(90°-a)\tan c$$
da cui, in base ai dati, segue: $\sin 30°=\tan 45°\tan c$, e perciò: $\tan c=\frac{1}{2}$. Pertanto il lato di ampiezza c è minore di un quadrante (<90°) e la sua misura è $c\approx 26°33'54''$.
Sempre per la regola di Nepero:
$$\sin(90°-a)=\cos b\cos c.$$
Siccome $\cos c=\frac{2}{\sqrt{5}}$, dalla precedente relazione segue: $\cos b=\frac{\sin 45°}{\cos c}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{\sqrt{10}}{4}$.
Pertanto il lato b è esso pure minore di un quadrante e si ha: $b\approx 37°45'40''$.
Di nuovo mediante la regola di Nepero:
$$\sin(90°-\gamma)=\cos c\cos(90°-\beta).$$
Da qui segue: $\cos\gamma=\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$. Si ottiene: $\gamma\approx 39°13'53''$.
In conclusione i valori che risolvono il triangolo sono i seguenti:
$$b\approx 37°45'40'',\ c\approx 26°33'54'',\ \gamma\approx 39°13'53''.$$
Anche adesso si può ricorrere al teorema dei seni per verificare l'esattezza della soluzione.

- ESERCIZIO 3. Risolvere il triangolo sferico ABC sapendo che:

$$b=120°,\ c=60°.$$
RISOLUZIONE (traccia). Applicando in tre riprese la regola di Nepero, si trova:
$$\cos a=-\frac{1}{4}\text{, da cui segue: } a\approx 104°28'3'';\quad \cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{5}}\text{, da cui segue: } \beta\approx 116°33'54'';$$
$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{5}}\text{, da cui segue: } \gamma\approx 63°26'5''.$$
Sempre con il teorema dei seni si può verificare l'esattezza della soluzione.

## 62.4 RISOLUZIONE DI UN TRIANGOLO SFERICO RETTILATERO

**62.4.1** Supponiamo che il triangolo sferico ABC sia rettilatero e supponiamo che a sia il lato retto (a=90°).

Se consideriamo il triangolo A’B’C’, polare di ABC, possiamo constatare che il suo angolo $\alpha'$, uguale a $180°-a$, è retto, per cui A’B’C’ è un triangolo rettangolo. Questo è un vantaggio notevole. Infatti, per risolvere il triangolo ABC basta risolvere il suo polare e ritornare poi al triangolo ABC.

**62.4.2** Basta un esempio per capire come si fa.

- ESERCIZIO. Risolvere il triangolo sferico ABC sapendo che è rettilatero con $a=90°$ ed inoltre:

$$b=60°,\quad c=45°.$$

RISOLUZIONE. Ci riferiamo al triangolo A’B’C’, polare di ABC. Si ha, come noto:

$$a'=180°-\alpha,\ b'=180°-\beta,\ c'=180°-\gamma,\ \alpha'=180-a=90°,\ \beta'=180°-b=120°,\ \gamma'=180°-c=135°.$$

Quindi del triangolo A’B’C’, rettangolo in A’, conosciamo i due angoli β’ e γ’. Si tratta di trovare i suoi lati. Ricorriamo alla regola di Nepero:

$$\cos a' = \operatorname{cotan}\beta' \operatorname{cotan}\gamma' = \frac{1}{\tan 120°}\cdot\frac{1}{\tan 135°} = \frac{1}{-\sqrt{3}}(-1) = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

si trova: $a'\approx 54°44'8''$ e, di conseguenza, ritornando al triangolo ABC: $\alpha=180°-a'=125°15'52''$.

Si procede con lo stesso metodo per il calcolo di β e γ. A conti fatti, si trova:

$$\beta=45°,\ \gamma\approx 35°15'51''.$$

**62.4.3** In un triangolo sferico rettilatero uno degli altri due lati può essere a sua volta retto (in tal caso il triangolo si dice *birettilatero*) o addirittura possono essere retti entrambi gli altri lati (in tal caso il triangolo si dice *trirettilatero*).

Ti proponiamo di dimostrare che:
- ogni triangolo sferico birettilatero è birettangolo;
- ogni triangolo sferico trirettilatero è trirettangolo.

## 62.5 RISOLUZIONE DI UN TRIANGOLO SFERICO OBLIQUANGOLO

**62.5.1** Consideriamo adesso un triangolo sferico obliquangolo ABC. Ai fini della sua risoluzione ci serviremo, oltre che delle solite proprietà generali, del fondamentale teorema del coseno e del teorema dei seni. Accenneremo anche ad una regola mnemonica, nota come *regola di Viète*, che riassume altre proprietà dei triangoli sferici, ottenuti comunque ragionando sul teorema di Eulero, anche se in realtà non avremo occasione di servirci di questa regola.

**62.5.3** La **regola di Viète** [5] si riassume in un gruppo di formule aventi la struttura seguente:

$$\mathbf{cotan}(\quad)\,\mathbf{sin}(\quad) = \mathbf{cos}(\quad)\,\mathbf{cos}(\quad) + \mathbf{sin}(\quad)\,\mathbf{cotan}(\quad)\,.$$

Gli argomenti da inserire nei “segnaposto” sono le ampiezze dei lati e degli angoli di un triangolo sferico (Fig. 7) ottenuti mediante la seguente procedura:

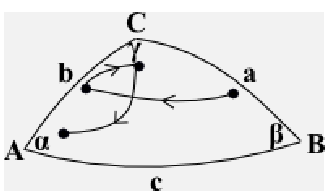


FIG. 7

[5] **Viète**, François, uomo politico francese, matematico per diletto, 1540-1603.

1) partiamo dal lato a e mediante un arco ci portiamo sul lato b: si registrano gli argomenti partenza e arrivo, vale a dire a, b;
2) ripartiamo dal lato b e mediante un altro arco ci portiamo sull'angolo γ: si registrano gli argomenti b, γ;
3) ripartiamo da quest'ultimo angolo γ ed ancora mediante un arco ci portiamo sull'angolo α: si registrano gli argomenti γ, α;
4) gli argomenti, presi nell'ordine in cui sono stati registrati, vale a dire:
$$a, b, b, \gamma, \gamma, \alpha,$$
sono inseriti nello stesso ordine nei segnaposti della struttura precedente, ottenendo così la formula seguente:
$$\mathbf{cotan\,a\,sin\,b = cos\,b\,cos\,\gamma + sin\,\gamma\,cotan\,\alpha}\,;$$
5) altre due formule si ottengono con permutazioni cicliche:
$$\mathbf{cotan\,b\,sin\,c = cos\,c\,cos\,\alpha + sin\,\alpha\,cotan\,\beta,}$$
$$\mathbf{cotan\,c\,sin\,a = cos\,a\,cos\,\beta + sin\,\beta\,cotan\,\gamma.}$$

**62.5.4** Può essere utile, ai fini della risoluzione di un triangolo, per una valutazione preventiva, tener presenti alcune condizioni, oltre a quelle specificate all'inizio di questa unità. Prenderemo in esame tutti i casi che si possono presentare. Ovviamente, a conti fatti, l'esattezza di ogni soluzione può esser verificata mediante il teorema dei seni.

Incominciamo con i seguenti casi:
1) sono assegnati i tre lati: a, b, c;
2) sono assegnati i tre angoli: α, β, γ;
3) sono dati due lati e l'angolo compreso: (b, c, α) oppure (c, a, β) oppure (a, b, γ);
4) sono dati due angoli ed il lato adiacente ad entrambi: (β, γ, a) oppure (γ, α, b) oppure (α, β, c).

Ebbene, in questi casi, si possono presentare due situazioni soltanto:

nessuna soluzione o una soluzione.

Il procedimento risolutivo permette di stabilire quale di queste due circostanze si presenta di volta in volta.

Risultano più complessi gli altri due casi che completano le diverse possibilità:
5) sono dati due lati e l'angolo opposto ad uno di essi: ad esempio a, b, α (o casi analoghi);
6) sono noti due angoli ed il lato opposto ad uno di essi: ad esempio α, β, a (o casi analoghi).

In questi casi si possono presentare le situazioni seguenti:

nessuna soluzione, una soluzione, due soluzioni.

Le diverse possibilità, relative a questi due ultimi casi, sono elencate qui di seguito:

♦ Sono assegnati gli elementi **a, b, α** (tutti diversi da 90°).
Per prima cosa, ricorrendo al teorema dei seni, si calcola:
$$\sin\beta = \frac{\sin b \sin\alpha}{\sin a}.$$
Si possono presentare tre casi:
1) $\frac{\sin b \sin\alpha}{\sin a} > 1$ : non esiste alcun triangolo;

2) $\dfrac{\sin b \sin \alpha}{\sin a}=1$ : risulta $\sin \beta=1$ e perciò $\beta=90°$.
Si ricade nel caso di un triangolo rettangolo, solo che adesso l'angolo retto è β e l'ipotenusa è b, mentre a è un cateto ed α è l'angolo opposto ad esso. Comunque non ci sono difficoltà nella risoluzione.

3) $\dfrac{\sin b \sin \alpha}{\sin a}<1$ : si presentano diverse possibilità e sono riassunte qui sotto:

- Se α<90°, bisogna distinguere due casi, a seconda che sia b<90° oppure b>90°:

 - $b<90° \begin{cases} a=b & \text{: una soluzione} \\ a<b & \text{: due soluzioni} \\ a>b & \begin{cases} a+b<180° & \text{: una soluzione} \\ a+b\geq 180° & \text{: nessuna soluzione} \end{cases} \end{cases}$

 - $b>90° \begin{cases} a\geq b & \text{: nessuna soluzione} \\ a<b & \begin{cases} a+b<180° & \text{: due soluzioni} \\ a+b\geq 180° & \text{: una soluzione} \end{cases} \end{cases}$

- Se α>90°, bisogna anche adesso distinguere due casi, a seconda che sia b<90° oppure b>90°:

 - $b<90° \begin{cases} a\leq b & \text{: nessuna soluzione} \\ a>b & \begin{cases} a+b\leq 180° & \text{: una soluzione} \\ a+b>180° & \text{: due soluzioni} \end{cases} \end{cases}$

 - $b>90° \begin{cases} a=b & \text{: una soluzione} \\ a<b & \begin{cases} a+b\leq 180° & \text{: nessuna soluzione} \\ a+b>180° & \text{: una soluzione} \end{cases} \\ a>b & \text{: due soluzioni} \end{cases}$

Bisogna aggiungere che, nei casi in cui c'è almeno una soluzione, per determinare c si potrebbe ricorrere alla prima delle formule [1] e, ciò fatto, alla terza di tali formule per calcolare γ. Sennonché, applicando la prima delle [1], verrebbe fuori un'equazione lineare in seno e coseno di c. E ciò, nonostante l'uso di uno strumento di calcolo automatico che risolverebbe rapidamente l'equazione, comporterebbe ugualmente qualche difficoltà, pur superabile, e comunque qualche lungaggine. Per evitare questo, si preferisce ricorrere a due formule opportune, note come **formule di Nepero**, le seguenti, deducibili in ogni caso dal teorema di Eulero:

$$[4] \qquad \tan\frac{c}{2}=\frac{\tan\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}, \quad \cot\!an\,\frac{\gamma}{2}=\frac{\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{a+b}{2}}{\cos\dfrac{a-b}{2}}.$$

È necessario precisare tuttavia che queste formule cadono in difetto quando contemporaneamente $a+b=180°$ e $\alpha+\beta=180°$. In tal caso, per il calcolo di c e γ, si ricorre al teorema di Eulero.

♦ Sono assegnati gli elementi **α, β, a** (tutti diversi da 90°).
Si potrebbe costruire un quadro come il precedente, ma è preferibile ricorrere al triangolo polare di quello assegnato. In questo modo ci si riconduce al caso precedente e, dopo averlo risolto, si ritorna al triangolo di partenza. Come si è fatto con i triangoli rettilateri. Ad ogni modo, chi preferisce avere a disposizione un quadro delle possibili situazioni, può costruirlo da solo, ricorrendo per l'appunto al triangolo polare.

**62.5.5** Possiamo andare adesso alla risoluzione di qualche esercizio, nel quale, lo ribadiamo, faremo ampio ricorso al calcolo automatico ed in particolare ad un idoneo software matematico.

- ESERCIZIO 1. Risolvere il triangolo sferico ABC sapendo che:

$$a=45°,\ \ b=60°,\ \ c=75°.$$

RISOLUZIONE. Possiamo calcolare $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ direttamente dal teorema di Eulero. Si trova:

$$\cos\alpha=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}=\frac{\cos 45°-\cos 60°\cos 75°}{\sin 60°\sin 75°}\approx 0{,}690598;$$
$$\cos\beta=\frac{\cos b-\cos c\cos a}{\sin c\sin a}=\frac{\cos 60°-\cos\ 75°\cos 45°}{\sin 75°\sin 45°}\approx 0{,}464101;$$
$$\cos\gamma=\frac{\cos c-\cos a\cos c}{\sin a\sin c}=\frac{\cos 75°-\cos\ 45°\cos 60°}{\sin 45°\sin 60°}\approx -0{,}154700.$$

Segue: $\alpha\approx 46°19'21$, $\beta\approx 62°20'51$, $\gamma\approx 98°53'57''$.

Mediante il teorema dei seni si può verificare che il rapporto tra il seno di un lato ed il seno dell'angolo opposto è invariante. Questa verifica, come abbiamo già precisato all'inizio del paragrafo n. 62.5.4, può essere fatta in ogni circostanza. Non lo ripeteremo più.

- ESERCIZIO 2. Risolvere il triangolo sferico ABC sapendo che:

$$\alpha=30°,\ \ b=60°,\ \ c=120°.$$

RISOLUZIONE. In virtù della prima delle formule [1], esprimenti il teorema di Eulero, si ha:

$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos\alpha=\cos 60°\cos 120°+\sin 60°\sin 120°\cos 30°\approx 0{,}399519$.

Pertanto: $a\approx 66°27'6''$.

A questo punto è preferibile ricorrere al teorema dei seni, in base al quale si ha:

$$\frac{\sin\beta}{\sin b}=\frac{\sin\alpha}{\sin a}\ \ \text{e}\ \ \frac{\sin\gamma}{\sin c}=\frac{\sin\alpha}{\sin a}\ ;$$

una volta constatato che $\sin a=\sqrt{1-\cos^2 a}=\sqrt{1-0{,}399519^2}\approx 0{,}910724$, ne consegue che:

$$\sin\beta=\frac{\sin b\sin\alpha}{\sin a}\approx 0{,}472347\ \ \text{e}\ \ \sin\gamma=\frac{\sin c\sin\alpha}{\sin a}\approx 0{,}472347.$$

Pertanto:

$$\beta\approx 28°11'12''\ \text{oppure}\ \beta\approx 151°48'48'';\quad \gamma\approx 28°11'12''\ \text{oppure}\ \gamma\approx 151°48'48''.$$

Cosicché vi sarebbero 4 combinazioni:

$$\beta\approx 28°11'12'',\ \gamma\approx 28°11'12''\ ;\qquad \beta\approx 28°11'12'',\ \gamma\approx 151°48'48'';$$
$$\beta\approx 151°48'48'',\ \gamma\approx 28°11'12''\ ;\qquad \beta\approx 139°6'24'',\ \gamma\approx 151°48'48''.$$

Siccome deve risultare $180°<\alpha+\beta+\gamma<540°$, la prima combinazione deve essere esclusa. D'altro canto, in virtù di una proprietà generale dei triangoli sferici (in base alla quale a lato maggiore è opposto angolo maggiore e a lato minore è opposto lato minore), siccome $b<c$ deve essere $\beta<\gamma$; ragion per cui anche la terza e la quarta combinazione devono essere scartate. Una sola combinazione resta in piedi: la seconda.

In conclusione un solo triangolo risolve il problema, quello che ha i seguenti elementi:

$$a\approx 66°27'6'',\ \ b=60°,\ \ c=1200°,\ \ \alpha=30°,\ \beta\approx 28°11'12'',\ \ \gamma\approx 151°48'48''.$$

- ESERCIZIO 3. Risolvere il triangolo sferico ABC sapendo che:

$$\alpha=45°,\ \ a=30°,\ \ b=45°.$$

RISOLUZIONE. Conviene far ricorso al teorema dei seni per determinare $\beta$. Si ha:

$$\frac{\sin\beta}{\sin b}=\frac{\sin\alpha}{\sin a},$$

da cui segue:

$$\sin\beta=\frac{\sin b\sin\alpha}{\sin a}=\frac{\sin 45°\sin 45°}{\sin 30°}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}}=1.$$

Pertanto: $\beta=90°$. Ricadiamo così nel caso del triangolo rettangolo. Solo che in questo caso l'angolo retto è $\beta$ e l'ipotenusa è b, mentre a è un cateto ed $\alpha$ l'angolo opposto ad esso.
Ricordando nondimeno che, in un triangolo rettangolo, il coseno di angolo opposto ad un cateto è uguale al prodotto della tangente del cateto adiacente per la cotangente dell'ipotenusa, si ha:

$$\cos\gamma = \tan a \cot an\, b = \frac{\tan a}{\tan b} = \frac{\tan 30°}{\tan 45°} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

da cui segue: $\gamma\approx 54°44'8"$.
D'altro canto, in un triangolo rettangolo, il seno di un cateto è uguale al prodotto dei seni dell'angolo opposto ad esso e dell'ipotenusa, per cui si ha:

$$\sin c = \sin\gamma \sin b.$$

Allora, dopo aver constatato che $\sin\gamma = \sqrt{1-\cos^2\gamma} = \sqrt{1-\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$, si ha:

$$\sin c = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{3}.$$

E perciò: $c\approx 19°28'16"$ oppure $c\approx 160°31'44"$. Siccome $\gamma>\alpha$ deve essere c>a e pertanto la sola soluzione accettabile è $c\approx 160°31'44"$.

- ESERCIZIO 4. Risolvere il triangolo sferico ABC sapendo che:

$$\alpha=30°,\quad a=75°,\quad b=80°.$$

RISOLUZIONE. Conviene far ricorso al teorema dei seni per determinare $\beta$. Si ha:

$$\frac{\sin\beta}{\sin b} = \frac{\sin\alpha}{\sin a},$$

da cui segue:

$$\sin\beta = \frac{\sin b \sin\alpha}{\sin a} = \frac{\sin 80° \sin 30°}{\sin 75°} \approx 0{,}509774.$$

È dunque $\dfrac{\sin b \sin\alpha}{\sin a}<1$ e siccome $\alpha<90°$, $b<90°$ ed $a<b$, ci aspettiamo due soluzioni.
Intanto si trova che deve essere: $\beta\approx 30°38'55"$ oppure $\beta\approx 149°21'5"$.
Ricorrendo adesso alle formule [4], nel primo caso ($\beta\approx 30°38'55"$) si ha:

$$\tan\frac{c}{2} = \frac{\tan\frac{a+b}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{\tan\frac{75°+80°}{2}\cos\frac{30°+30°38'55"}{2}}{\cos\frac{30°-30°38'55"}{2}} \approx 3{,}893626,$$

$$\cot an\frac{\gamma}{2} = \frac{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{a-b}{2}} = \frac{\tan\frac{30°+30°38'55"}{2}\cos\frac{75°+80°}{2}}{\cos\frac{75°-80°}{2}} \approx 0{,}126721;$$

da qui segue: $c\approx 151°11'31"$, $\gamma\approx 165°33'21"$.
Nel secondo caso ($\beta\approx 149°21'5"$) si ha:

$$\tan\frac{c}{2} = \frac{\tan\frac{a+b}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{\tan\frac{75°+80°}{2}\cos\frac{30°+149°21'5"}{2}}{\cos\frac{30°-149°21'5"}{2}} \approx 0{,}256830,$$

$$\cot an\frac{\gamma}{2} = \frac{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{a-b}{2}} = \frac{\tan\frac{30°+149°21'5"}{2}\cos\frac{75°+80°}{2}}{\cos\frac{75°-80°}{2}} \approx 7{,}891357;$$

da qui segue: $c\approx 5°47'22"$, $\gamma\approx 2°59'35"$.

## VERIFICHE

**Il triangolo sferico (nn. 1-2)**

**1.** Si considerino le ampiezze x, y, z tali che:

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ \cos y = -\frac{1}{2}\ ,\ \sin z = \frac{1}{2}\,.$$

Possono essere i lati di un triangolo sferico? Possono essere gli angoli di un triangolo sferico? Risolvere senza ricorrere a strumenti di calcolo automatico.

[**R.** Le possibilità da prendere in considerazione sono due: a) $x+y+z=180°$, b) $x+y+z=300°$. Nel caso a) le ampiezze assegnate possono essere i lati di un triangolo sferico ma non gli angoli; nel caso b) possono essere sia i lati sia gli angoli]

**2.** Dimostrare, senza ricorrere a strumenti di calcolo automatico, che gli angoli α, β, γ, tali che:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ \cos\beta = \frac{1}{2}\ ,\ \sin\gamma = \frac{1}{2}\,.$$

sono angoli di un triangolo sferico.

[**R.** Le possibilità da prendere in considerazione sono due: $\alpha+\beta+\gamma=135°$ non accettabile; $\alpha+\beta+\gamma=255°$ accettabile]

**Risoluzione di un triangolo sferico rettangolo (si suppone α=90° – nn. 3-8)**

**3.** Risolvere il triangolo ABC, noti i due angoli:

a) $\beta=60°,\ \gamma=60°$. [**R.** $a\approx70°31'43'',\ b=c\approx54°44'8''$]

b) $\beta=60°,\ \gamma=45°$.

c) $\beta=150°,\ \gamma=120°$. [**R.** $\alpha+\beta+\gamma=360°$: impossibile]

d) $\cos\beta=\frac{3}{5},\ \cos\gamma=-\frac{1}{2}$. [**R.** $\beta\approx\ldots,\ \gamma=\ldots;\ a\approx115°39'32,\ \ b\approx77°20'40'',\ \ c\approx128°40'55''$]

**4.** Risolvere il triangolo ABC, noti i due cateti:

a) $b=150°,\ c=210°$. [**R.** $b+c=360°$: impossibile]

b) $b=120°,\ c=150°$.

c) $b=45°,\ c=135°$. [**R.** $a=120°,\ \beta\approx\ldots,\ \gamma\approx125°15'52''$]

d) $\cos b=\frac{2}{3},\ \tan c=-\sqrt{3}$. [**R.** $b\approx\ldots,\ c=\ldots;\ a\approx109°28'16'',\ \beta\approx52°14'19'',\ \gamma\approx\ldots$]

**5.** Risolvere il triangolo ABC, noti l'ipotenusa e un angolo:

a) $a=150°,\ \beta=60°$. [**R.** $\gamma\approx146°18'35,\ \ b\approx25°39'32,\ \ c\approx163°53'53''$]

b) $a=90°,\ \beta=30°$.

c) $a=90°,\ \gamma=45°$. [**R.** $\beta=90°,\ b=90°,\ c=45°$]

d) $\sin a=\frac{3}{5}\ (a>90°),\ \cos\gamma=\frac{4}{5}$. [**R.** $a\approx\ldots,\ \gamma\approx\ldots;\ \beta\approx120°57'49'',\ b\approx149°2'10'',\ c\approx\ldots$]

**6.** Risolvere il triangolo ABC, noti l'ipotenusa e un cateto:

a) $a=120°,\ b=30°$. [**R.** $c\approx125°15'51'',\ \beta\approx35°15'51'',\ \gamma\approx109°28'16''$]

b) $a=120°,\ b=60°$.

c) $a=55°9'34'',\ c=51°53'0''$. [**R.** $b\approx22°15'15'',\ \beta\approx27°28'40'',\ \gamma\approx73°27'10''$]

d) $\tan a=\frac{4}{3},\ \tan c=-\frac{4}{3}$. [**R.** impossibile]

**7.** Risolvere il triangolo ABC, noti un cateto e l'angolo opposto:

a) $b=30°$, $\beta=30°$. [**R.** $c=90°$, $a=90°$, $\gamma=90°$]
b) $b=45°27'36''$, $\beta=76°45'23''$.
c) $c=68°$, $\gamma=105°$. [**R.** impossibile]
d) $\cos c=-\frac{2}{3}$, $\sin\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$ $(\gamma<90°)$. [**R.** impossibile]

**8.** Risolvere il triangolo ABC, noti un cateto e l'angolo adiacente:
a) $c=30°$, $\beta=45°$. [**R.** $\gamma\approx52°14'19''$, $a\approx$..., $b\approx$...]
b) $c=30°$, $\beta=60°$.
c) $b=25°$, $\gamma=64°$. [**R.** $\beta\approx34°46'31''$, $a\approx$..., $c\approx$...]
d) $\cos b=\frac{1}{3}$, $\cos\gamma=\frac{3}{5}$. [**R.** $\beta\approx74°32'2''$, $a\approx$..., $c\approx$...]

**Risoluzione di un triangolo sferico rettilatero (si suppone a=90° – nn. 9-14)**

**9.** Risolvere il triangolo ABC, noti gli altri due lati:
a) $b=60°$, $c=60°$. [**R.** $\alpha\approx109°28'17''$, $\beta=\gamma\approx54°44'9''$]
b) $b=60°$, $c=45°$. [**R.** $\alpha\approx125°15'51''$, $\beta=45°$, $\gamma\approx35°15'52''$]
c) $b=150°$, $c=120°$.

**10.** Risolvere il triangolo ABC, noti gli angoli adiacenti al lato retto:
a) $\beta=60°$, $\gamma=60°$. [**R.** $\alpha\approx104°28'40''$, $b=c\approx65°26'6''$]
b) $\beta=30°$, $\gamma=90°$. [**R.** $\alpha=90°$, $b=60°$, $c=90°$]
c) $\beta=150°$, $\gamma=120°$. [**R.** $\alpha\approx115°39'33''$, $b\approx146°18'40''$, $c\approx106°6'6''$]

**11.** Risolvere il triangolo ABC, noti l'angolo opposto al lato retto e un altro lato:
a) $\alpha=60°$, $b=60°$. [**R.** $\beta\approx48°35'25''$, $\gamma\approx139°6'24''$, $c\approx130°53'37''$]
b) $\alpha=60°$, $c=45°$.
c) $\alpha=150°$, $b=120°$. [**R.** $\gamma\approx16°6'8''$, $\beta\approx154°20'26$, $c\approx33°41'25''''$]

**12.** Risolvere il triangolo ABC, noti l'angolo opposto al lato retto e un altro angolo:
a) $\alpha=60°$, $\beta=60°$. [**R.** impossibile]
b) $\alpha=60°$, $\gamma=150°$. [**R.** $\beta\approx54°44'9''$, $b\approx70°31'44''$, $c\approx144°44'9''$]
c) $\alpha=150°$, $\beta=120°$.

**13.** Risolvere il triangolo ABC, noti uno dei lati e l'angolo opposto:
a) $b=120°$, $\beta=120°$. [**R.** $\gamma=90°$, $\alpha=90°$, $c=90°$]
b) $b=60°$, $\beta=45°$. [**R.** impossibile]
c) $c=150°$, $\gamma=120°$.

**14.** Risolvere il triangolo ABC, noti uno dei lati e l'angolo adiacente diverso da α:
a) $b=60°$, $\gamma=30°$. [**R.** $\alpha\approx130°53'37''$, $\beta\approx40°53'36''$, $c\approx41°24'34''$]
b) $c=150°$, $\beta=120°$.
c) $b=90°$, $\gamma=60°$.
d) $b=30°$, $\gamma=60°$. [**R.** $c\approx75°31'20''$, $\alpha\approx63°26'5''$, $\beta\approx26°33'54''$]

**Risoluzione di un triangolo sferico obliquangolo (nn. 15-20)**

**15.** Risolvere il triangolo ABC, noti i tre lati:
a) $a=60°$, $b=60°$, $c=120°$. [**R.** impossibile]
b) $a=60°$, $b=45°$, $c=120°$. [**R.** impossibile]
c) $a=150°$, $b=60°$, $c=120°$. [**R.** $\alpha\approx145°13'18$, $\beta\approx81°6'2$, $\gamma\approx98°53'58''$]
d) $a=45°$, $b=45°$, $c=45°$.

**16.** Risolvere il triangolo ABC, noti i tre angoli:

a) $\alpha=30^\circ, \beta=45^\circ, \gamma=120^\circ$. [R. $a\approx 33^\circ 11'22'', b\approx 50^\circ 43'43'', c\approx 71^\circ 28'4''$]

b) $\alpha=75^\circ, \beta=45^\circ, \gamma=60^\circ$.

c) $\alpha=117^\circ 23'50'', \beta=77^\circ 3', \gamma=50^\circ 37'10''$. [R. $a\approx 114^\circ 58'4'', b\approx 95^\circ 40'28'', c\approx 52^\circ 6'50''$]

d) $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\gamma=\frac{4}{5}$. [R. impossibile]

**17.** Risolvere il triangolo ABC, noti due lati e l'angolo compreso fra essi:

a) $a=97^\circ, b=53^\circ, \gamma=102^\circ$. [R. $c\approx 103^\circ 46'38'', \alpha\approx 88^\circ 24'54'', \beta\approx 53^\circ 32'42''$]

b) $b=60^\circ, c=60^\circ, \alpha=60^\circ$. $\left[\text{R. } \cos a=\frac{5}{8},\ \cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{13}}\right]$

c) $a=120^\circ, c=30^\circ, \beta=78^\circ$.

**18.** Risolvere il triangolo ABC, noti due angoli ed il lato adiacente ad essi:

a) $a=102^\circ 25', \beta=97^\circ 34'', \gamma=76^\circ 5'$. [R. $\alpha\approx 100^\circ 14'29'', b\approx 99^\circ 56'5'', c\approx 74^\circ 25'38''$]

b) $b=30^\circ, \alpha=30^\circ, \gamma=30^\circ$.

c) $c=93^\circ, \alpha=50^\circ, \beta=105^\circ$. [R. $\gamma\approx 82^\circ 40', a\approx 50^\circ 28'15'', b\approx 103^\circ 27'14''$]

**19.** Risolvere il triangolo ABC, noti due lati e l'angolo opposto ad uno di essi:

a) $a=30^\circ, b=45^\circ, \alpha=60^\circ$. [R. impossibile]

b) $a=150^\circ, b=135^\circ, \alpha=135^\circ$. [R. $b=90^\circ$, ...]

c) $a=60^\circ, b=60^\circ, \alpha=80^\circ$. [R. una sol.: $\beta=80^\circ, \gamma\approx 38^\circ 51'2'', c\approx 33^\circ 28'44''$]

d) $a=45^\circ, b=60^\circ, \alpha=30^\circ$. [R. due sol.: $\beta'\approx 37^\circ 45'40'', \gamma'\approx 135^\circ 11'14'', c'\approx 94^\circ 38'19''$; $\beta''\approx 142^\circ 14'20'', \gamma''\approx 12^\circ 36'30'', c''\approx 17^\circ 58'52''$]

e) $a=120^\circ, b=45^\circ, \alpha=60^\circ$. [R. una sol.: $\beta=45^\circ, \gamma\approx 155^\circ 47'47'', c=\gamma$]

f) $a=120^\circ, b=60^\circ, \alpha=45^\circ$. [R. impossibile: $a>b$ e $\alpha\leq\beta$]

g) $a=120^\circ, b=80^\circ, \alpha=60^\circ$. [R. impossibile: $a>b$ e $\alpha<\beta$]

h) $a=85^\circ, b=110^\circ, \alpha=50^\circ$. [R. una sol.: $\beta\approx 133^\circ 43'50'', \gamma\approx 27^\circ 22'53'', c\approx 36^\circ 43'59''$]

i) $a=60^\circ, b=120^\circ, \alpha=60^\circ$.
[R. una sol., che si trova utilizzando il teorema di Eulero: $\beta=120^\circ, c\approx 98^\circ 12'47'', \gamma\approx 81^\circ 47'12''$]

j) $a=30^\circ, b=120^\circ, \alpha=30^\circ$. [R. due sol.: $\beta'=60^\circ, \gamma'\approx 139^\circ 47'31'', c'=\gamma'$; $\beta''=120^\circ, \gamma''\approx 72^\circ 24'43'', c''\approx 107^\circ 35'17''$]

k) $a=70^\circ, b=70^\circ, \alpha=120^\circ$. [R. impossibile: $a<c$ e $\alpha>\gamma$]

l) $a=50^\circ, b=80^\circ, \alpha=130^\circ$. [R. impossibile: $a<b$ e $\alpha>\beta$]

m) $a=60^\circ, b=120^\circ, \alpha=135^\circ$. [R. impossibile: $a<b$ e $\alpha\geq\beta$]

n) $a=70^\circ, b=50^\circ, \alpha=150^\circ$. [R. una sol.: $\beta\approx 24^\circ 3'15'', \gamma\approx 11^\circ 40'49'', c\approx 22^\circ 21'50''$]

o) $a=120^\circ, b=75^\circ, \alpha=150^\circ$. [R. due sol.: $\beta'\approx 33^\circ 53'44'', \gamma'\approx 27^\circ 4'2'', c'\approx 52^\circ 46'$; $\beta''\approx 146^\circ 6'16'', \gamma''\approx 162^\circ 22'17'', c''\approx 169^\circ 55'48''$]

p) $a=130^\circ, b=130^\circ, \alpha=105^\circ$. [R. una sol.: $\beta=105^\circ, \gamma\approx 45^\circ 15'23'', c\approx 34^\circ 17'4''$]

q) $a=45^\circ, b=120^\circ, \alpha=150^\circ$. [R. impossibile: $a<b$ e $\alpha>\beta$]

r) $a=75^\circ, b=120^\circ, \alpha=120^\circ$. [R. una sol.: $\beta\approx 129^\circ 3'45'', \gamma\approx 156^\circ 47'38'', c\approx 153^\circ 55'43''$]

s) $a=150^\circ, b=105^\circ, \alpha=150^\circ$. [R. due sol.: $\beta'=75^\circ, \gamma'\approx 64^\circ 18'32'', c'=\gamma'$; $\beta=105^\circ, \gamma''\approx 98^\circ 41'36'', c''\approx 81^\circ 18'24''$]

**20.** Risolvere il triangolo ABC, noti due angoli ed il lato opposto ad uno di essi:

a) $\alpha=15^\circ, \beta=30^\circ, a=45^\circ$. [R. impossibile]

b) $\alpha=30^\circ, \beta=45^\circ, a=45^\circ$. [R. $\beta=90^\circ$, ...]

c) $\alpha=120^\circ, \beta=120^\circ, a=100^\circ$. [R. una sol.: $b=100^\circ, c\approx 141^\circ 8'58'', \gamma\approx 146^\circ 31'16''$]

d) $\alpha=60^\circ, \beta=120^\circ, a=135^\circ$. [R. impossibile: $\alpha<\beta$ e $a\geq b$]

e) $\alpha=135°, \beta=120°, a=150°$. [**R.** due sol.: $b'\approx 37°45'40''$, $c'\approx 167°23'30''$, $\gamma'\approx 162°1'8''$; $b''\approx 142°14'20''$, $c''\approx 44°48'46''$, $\gamma''\approx 85°21'41''$]

f) $\alpha=150°, \beta=60°, a=150°$. [**R.** due sol.: $b'=60°$, $c'\approx 107°35'17''$, $\gamma'\approx 72°24'43''$; $b''=120°$, $c''\approx 40°12'29''$, $\gamma''=c''$]

g) $\alpha=130°, \beta=100°, a=50°$. [**R.** impossibile: $\alpha>\beta$ e $a<b$]

h) $\alpha=50°, \beta=50°, a=75°$. [**R.** una sol.: $b=75°$, $c\approx 134°44'37''$, $\gamma\approx 145°42'56''$]

i) $\alpha=60°, \beta=135°, a=120°$. [**R.** una sol.: $b=135°$, $c\approx 24°12'13''$, $\gamma=c$]

j) $\alpha=110°, \beta=130°, a=30°$. [**R.** una sol.: $b=155°56'45''$, $c\approx 168°19'11''$, $\gamma\approx 157°38'10''$]

k) $\alpha=30°, \beta=75°, a=30°$. [**R.** due sol.: $b'=75°$, $c'\approx 81°18'24''$, $\gamma'\approx 98°41'36''$; $b''=105°$, $c''\approx 115°41'28''$, $\gamma''=c''$]

l) $\alpha=120°, \beta=60°, a=45°$. [**R.** impossibile: $\alpha>\beta$ e $a\leq b$]

m) $\alpha=135°, \beta=60°, a=30°$. [**R.** impossibile: $\alpha>\beta$ e $a<b$]

n) $\alpha=110°, \beta=70°, a=120°$.
[**R.** una sol., che si trova utilizzando il teorema di Eulero: $b=60°$, $c\approx 118°42'55''$, $\gamma\approx 107°53'42''$]

o) $\alpha=60°, \beta=105°, a=30°$. [**R.** due sol.: $b'\approx 33°53'44''$, $c'\approx 10°37'43''$, $\gamma'\approx 17°4'12''$; $b''\approx 146°6'16''$, $c''\approx 152°55'58''$, $\gamma''\approx 127°59'14''$]

p) $\alpha=95, \beta=70, a=130$. [**R.** una sol.: $b=46°16'9''$, $c\approx 143°16'$, $\gamma\approx 152°37'16''$]

q) $\alpha=50°, \beta=80°, a=145°$. [**R.** impossibile: $\alpha<\beta$ e $a>b$]

r) $\alpha=105°, \beta=60°, a=60°$. [**R.** una sol.: $b=50°56'15''$, $c\approx 23°12'22''$, $\gamma\approx 26°4'17''$]

s) $\alpha=95°, \beta=95°, a=70°$. [**R.** impossibile: $c>a+b$]

## UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

**DOMANDE.**

1. Come si definisce un triangolo sferico?
2. È vero che le ampiezze 90°, 60°, 30° individuano un triangolo sferico rettangolo, avente quelle ampiezze come misure dei suoi angoli?
3. È vero che le ampiezze 60°, 90°, 150° individuano un triangolo sferico rettangolo, avente quelle ampiezze come ampiezze dei suoi lati?
4. Quali sono le ampiezze degli angoli di un triangolo sferico, i cui lati hanno ampiezze tutti e tre di 90°?
5. Si considerino le ampiezze x, y, z tali che: $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}, \sin y=\frac{1}{2}, \cos z=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Possono essere le misure dei lati di un triangolo sferico? Possono essere le misure degli angoli di un triangolo sferico?

**RISPOSTE.**

1. Un triangolo sferico è la porzione di superficie sferica limitata da tre archi di cerchio massimo, ciascuno minore di una semicirconferenza, aventi gli estremi in comune a due a due.
2. No. Le ampiezze considerate non individuano alcun triangolo sferico dal momento che la loro somma non supera 180°.
3. No. Le ampiezze considerate non possono essere quelle dei lati di un triangolo sferico dal momento che non è soddisfatta la condizione 150°<90°+60°.
4. Si trova facilmente che anche i tre angoli hanno tutti e tre ampiezza 90°, vale a dire che si tratta di un

triangolo trirettangolo.

**5.** Incominciamo a tener presente che la condizione affinché un'ampiezza $\varphi$ sia la misura di un lato o di un angolo di un triangolo sferico è $0°<\varphi<180°$. Ragion per cui le situazioni che ha senso prendere in considerazione sono solamente le seguenti:

$$x'=60°,\, x''=120°;\ \ y'=30°,\, y''=150°;\ \ z=135°.$$

Di conseguenza si hanno le seguenti combinazioni possibili per le ampiezze x, y, z:

a) $x=60°, y=30°, z=135°$. b) $x=60°, y=150°, z=135°$.

c) $x=120°, y=30°, z=135°$. d) $x=120°, y=150°, z=135°$.

In tutti e quattro i casi, essendo $x+y+z<360°$ le ampiezze possono essere assunte come le misure dei lati di un triangolo sferico; ed essendo $180°<x+y+z<540°$ esse possono essere assunte come le misure degli angoli di un triangolo sferico.