Prerequisiti:
- Risoluzione di disequazioni
- Calcolo algebrico

Questa unità, fatto salvo il diverso livello di approfondimento, riguarda tutte le scuole superiori: gli Istituti Tecnici e gli Istituti Professionali ne affronteranno lo studio nel 2° biennio, i Licei nella 5ª classe.

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:

- *riflettere criticamente sull'idea intuitiva di limite di una funzione*
- *fornire la definizione rigorosa di limite di una successione e di una funzione*
- *definire il numero* **e** *di Nepero*
- *calcolare limiti di successioni e funzioni utilizzando le proprietà introdotte e verificare l'esattezza del risultato mediante uno strumento di calcolo automatico*
- *dimostrare qualcuno dei teoremi fondamentali sui limiti e sulle regole per calcolarli*

64.1 Premessa.
64.2 Limite di una successione.
64.3 Limite di una funzione.
64.4 Teoremi fondamentali sui limiti.
64.5 Regole per il calcolo dei limiti.
64.6 Alcuni limiti fondamentali e prime conseguenze.

Verifiche.

Una breve sintesi per domande e risposte.

Complementi: confronto di infiniti e infinitesimi.

Limiti

Unità 64

64.1 PREMESSA

64.1.1 In passato abbiamo fornito, quantunque a livello intuitivo, l'idea di limite di una funzione. L'abbiamo fatto accennando al concetto di derivata di una funzione, intesa appunto come limite del rapporto incrementale della funzione [1].

Ricordiamo al riguardo il procedimento seguito per calcolare la derivata della funzione $f(x)=x^3$. Dapprima abbiamo calcolato il rapporto incrementale di f(x):

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}=\frac{(3\,x^2+3\,x\,\Delta x+\Delta x^2)\Delta x}{\Delta x}=3\,x^2+3\,x\,\Delta x+\Delta x^2.$$

Quindi abbiamo supposto $\Delta x=0$ e abbiamo trovato: $f'(x)=3\,x^2$.

Ti invitiamo a ripetere il procedimento prendendo come esempio la funzione $f(x)=x^2+1$.

Ora, in questo procedimento c'è una palese contraddizione: l'incremento Δx si suppone dapprima diverso da 0 quando numeratore e denominatore si dividono per Δx (poiché non è ammessa la divisione per 0) e poi uguale a 0 quando si calcola il valore esatto del limite. Quest'anomalia, che mina il procedimento, nasce e sussiste perché in realtà non è ben definito il concetto di limite e non basta la sola idea intuitiva, che è per l'appunto la causa della contraddizione. Ciò nonostante, proprio su tale contraddizione fu basata l'Analisi fin dalla sua fondazione, avvenuta nell'ultima metà del Seicento. Siccome tuttavia i risultati che si ottenevano erano soddisfacenti la contraddizione, a dispetto delle critiche che piovevano sugli analisti dell'epoca, permase a lungo, per quasi un secolo e mezzo. Infatti, solo agli inizi dell'Ottocento, dapprima con l'opera del francese **Augustin Louis Cauchy** (1789-1857) e poi con quelle del ceco **Bernhard Bolzano** (1781-1848) e del tedesco **Karl Weierstrass** (1815-1897), la contraddizione fu finalmente eliminata con una definizione rigorosa del concetto di limite di una funzione e con una riorganizzazione dell'Analisi matematica basata su quella definizione e su un maggiore rigore logico.

Ebbene, in questa unità noi proporremo la definizione di Weierstrass (la cosiddetta definizione **ε|δ**), anche se con qualche correttivo introdotto successivamente, e su di essa baseremo la nostra trattazione. Nelle prossime unità ci occuperemo poi dello studio delle derivate.

64.1.2 Quando si dice che la funzione reale di variabile reale f(x) tende al limite $\boldsymbol{l}$ per x tendente ad $\mathbf{x_0}$ si possono presentare diverse situazioni a seconda che il valore $\mathbf{x_0}$ sia un numero reale oppure [2] $+\infty$ o $-\infty$ ed a seconda che il limite $\boldsymbol{l}$ sia esso pure un numero reale oppure $+\infty$ o $-\infty$. I casi possibili, considerando le $3^2=9$ disposizioni, sono evidenziati dalla seguente tabella (nr sta per "numero reale"):

$\mathbf{x_0}$	nr	nr	nr	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\boldsymbol{l}$	nr	$+\infty$	$-\infty$	nr	$+\infty$	$-\infty$	nr	$+\infty$	$-\infty$

Bisognerebbe quindi formulare 9 definizioni. In effetti, molti autori fanno proprio così. Noi preferiamo servirci di una definizione che le accomuni tutte. Per questo è però necessario introdurre, in via preliminare, il concetto di "intorno di α", dove α può essere un numero reale oppure $+\infty$ o $-\infty$.

Si dice **intorno di α** e si indica con **U(α)**, o anche con **I(α)**, ogni insieme di numeri reali x, per i quali si ha:

- $\alpha-\delta<x<\alpha+\delta$ (Fig. 1), se α è un numero reale (δ è un numero reale positivo);

[1] Cfr.: Unità 51: Generalità sulle funzioni, n. 51.5.

[2] Ricordiamo che i simboli $+\infty$ (*più infinito*) e $-\infty$ (*meno infinito*) non rappresentano numeri, ma hanno la proprietà di essere, il primo maggiore di ogni numero reale ed il secondo minore di ogni numero reale.

- $x>M$ (Fig. 2), se $\alpha=+\infty$ (M è un numero reale qualsiasi);
- $x<M$ (Fig. 3), se $\alpha=-\infty$ (M è un numero reale qualsiasi).

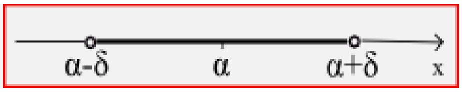

FIG. 1

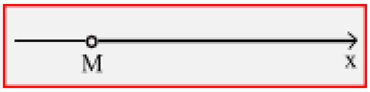

FIG. 2

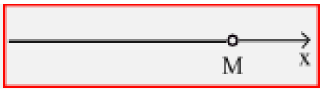

FIG. 3

64.1.3 Quando si calcola il limite di una funzione f(x) bisogna poter attribuire ad x valori sempre più prossimi ad x_0, nei quali la funzione sia definita. Per questo è necessario che in ogni intorno del punto x_0 ci siano punti x, diversi da x_0, appartenenti al dominio della funzione.

Un punto x_0 di un insieme numerico I, tale che in ogni suo intorno cada almeno un punto di I diverso da x_0, si dice ***punto di accumulazione*** (o ***punto limite***) dell'insieme I.

Per poter calcolare il limite di una funzione f(x) in un punto x_0 bisogna che x_0 sia un punto di accumulazione di dom f(x).

In tale punto poi la funzione può essere definita o non esserlo.

Consideriamo, per esempio, la funzione: $f(x)=1/x$.

Se supponiamo che x sia un numero reale, ha senso calcolare il limite della funzione per x tendente ad un qualunque valore $x_0\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ [3], dal momento che in ogni intorno di x_0 cadono punti x, diversi da x_0, appartenenti al dominio della funzione; dominio che è l'insieme $\mathbb{R}_0$.

Ma se ammettiamo che la variabile x sia un numero naturale, non ha senso calcolare il suo limite in x_0, dove $x_0\in\mathbb{R}^+$, giacché nessuno di questi punti x_0 è un punto di accumulazione dell'insieme $\mathbb{N}_0$, dominio della funzione. In particolare, se $x_0=\frac{1}{2}$ e $\delta=\frac{1}{2}$, nell'intorno di x_0 di ampiezza 2δ, ossia nell'intervallo $x_0-\delta<x<x_0+\delta$, vale a dire $]0,1[$, non cade alcun numero naturale. Così pure se $x_0=1$ e $\delta=\frac{1}{2}$, nell'intorno di x_0 di ampiezza 2δ, vale a dire $\left]\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right[$ non cadono numeri naturali diversi da 1.

Un punto x_0 di un insieme numerico, tale che esista almeno un intorno di x_0 cui non appartiene alcun punto dell'insieme diverso da x_0, si dice ***punto isolato***.

I punti dell'insieme $\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$ sono tutti punti isolati, fatta eccezione per il punto $+\infty$, che è l'unico punto di accumulazione dell'insieme: infatti, in ogni intorno di $+\infty$ esiste almeno un $x\in\mathbb{N}$. In particolare, nell'intorno $x>M$ cadono tutti i numeri naturali maggiori di M.

Per questo l'unico punto in cui ha senso calcolare il limite della funzione 1/x, con $x\in\mathbb{N}_0$, è $+\infty$.

Ora, le funzioni aventi per dominio l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, fatta eccezione al più per alcuni valori, sono le *successioni* [4]. Ed è proprio da queste che incominciamo il nostro studio.

64.2 LIMITE DI UNA SUCCESSIONE

64.2.1 Ribadiamo che in una successione la variabile indipendente (*indice* della successione) è un numero naturale, mentre la variabile dipendente (*termine* della successione) è un numero reale e ricordiamo

[3] Alcuni autori chiamano l'insieme $\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ "insieme dei numeri reali ampliato (o esteso o allargato)" e lo indicano con simboli vari come $\widehat{\mathbb{R}}$ o $\widetilde{\mathbb{R}}$ o $\mathbb{R}^*$ o altri simboli. Noi non ci serviremo di questa notazione.

[4] Agli studenti dei Licei non scientifici, che non ancora hanno studiato le successioni, suggeriamo di farlo prima di affrontare lo studio di questa unità (cfr.: Unità 59: Successioni e progressioni).

che l'unico valore in cui ha senso calcolare il limite di una successione è $+\infty$, mentre il limite può essere un numero reale, $+\infty$ o $-\infty$. Si ha la seguente definizione:

Considerata una successione (a_n) di numeri reali, si dice che a_n tende ad l o ha per limite l, se per ogni intorno $U(l)$ esiste subordinatamente un indice n_0 tale che per ogni $n>n_0$ risulti $a_n \in U(l)$.

Oppure in notazione simbolica:

$$\mathbf{a_n \to l \text{ se } \forall U(l), \exists n_0 \text{ tale che } \forall n\ [n>n_0 \to a_n \in U(l)]}$$

Per indicare che una successione (a_n) tende al limite l, scriviamo:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l.$$

A volte si scrive anche: $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$ o, sottintendendo che $n\to+\infty$, semplicemente $\lim a_n = l$ oppure $a_n \to l$.

Quando il limite è un numero reale l si dice pure che la successione ***converge ad l***; quand'è $+\infty$ o $-\infty$ si dice rispettivamente che la successione ***diverge positivamente*** o ***negativamente***.

- ESERCIZIO 1. Verificare che tende ad 1 la successione di termine generale:

$$a_n = \frac{n+1}{n}\ .$$

RISOLUZIONE. Bisogna far vedere che:

$$\forall U(1), \exists n_0 \text{ tale che } \forall n \left[n>n_0 \to \frac{n+1}{n} \in U(1)\right].$$

Per questo è sufficiente mostrare che tra gli n che soddisfano alla condizione $\frac{n+1}{n} \in U(1)$ ve ne sono di quelli maggiori di un opportuno numero naturale n_0. Ora, scelto $\varepsilon>0$:

$$\frac{n+1}{n} \in U(1)\ \to\ 1-\varepsilon<\frac{n+1}{n}<1+\varepsilon\ \to\ -\varepsilon<\frac{1}{n}<\varepsilon\ .$$

Siccome $n>0$, la condizione $-\varepsilon<\frac{1}{n}$ è soddisfatta sempre; invece $\frac{1}{n}<\varepsilon \to n>\frac{1}{\varepsilon}$. Pertanto, posto n_0 uguale al più piccolo numero naturale non minore di $1/\varepsilon$, gli n maggiori di n_0 sono quelli cercati.

Per esempio, se $\varepsilon=1/100$, basta scegliere $n_0=100$; se $\varepsilon=1/1000$, basta scegliere $n_0=1000$; e così via.

- ESERCIZIO 2. Verificare che tende a $+\infty$ la successione di termine generale:

$$a_n = \frac{n^2+1}{n}\ .$$

RISOLUZIONE. Bisogna far vedere che:

$$\forall U(+\infty), \exists n_0 \text{ tale che } \forall n \left[n>n_0 \to \frac{n^2+1}{n} \in U(+\infty)\right].$$

Per questo è sufficiente mostrare che tra gli n che soddisfano alla condizione $\frac{n^2+1}{n} \in U(+\infty)$ ve ne sono di quelli maggiori di un opportuno numero naturale n_0. Ora, scelto un qualunque numero reale M:

$$\frac{n^2+1}{n} \in U(+\infty)\ \to\ \frac{n^2+1}{n}>M\ \to\ n^2-M\,n+1>0\ .$$

La disequazione, per $n>0$, è soddisfatta sia per $n<\frac{M-\sqrt{M^2-4}}{2}$ sia per $n>\frac{M+\sqrt{M^2-4}}{2}$. Pertanto, posto n_0 uguale al più piccolo numero naturale non minore di $\frac{M+\sqrt{M^2-4}}{2}$, gli n maggiori di n_0 sono quelli cercati.

Ti proponiamo i seguenti esercizi (sono gli unici su questo argomento).
Utilizzare la definizione di limite di una successione per verificare i seguenti limiti:

1. $2n-1 \to +\infty.$
2. $2-n \to -\infty.$
3. $\frac{1}{n} \to 0.$
4. $\frac{n-2}{n} \to 1.$
5. $\frac{2n}{n-1} \to 2$
6. $\sqrt{2n^2-1} \to +\infty.$
7. $\frac{2n-n^2}{n+1} \to -\infty\,.$
8. $\frac{n-1}{n^2} \to 0.$
9. $\frac{n^2+2n}{2n^2+1} \to \frac{1}{2}\,.$

64.2.2 Ricordiamo infine una successione particolarmente importante, la successione di termine generale:

$$\mathbf{a_n} = \left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\right)^{\mathbf{n}}.$$

Come si sa, essa converge al numero ***e*** di Nepero, il cui valore approssimato fino alla nona cifra decimale è:

$$\boldsymbol{e} \approx \mathbf{2\,,718\,281\,828}.$$

Più in generale, si potrebbe dimostrare che se (a_n) è una successione con valori in $\mathbb{N}$, divergente positivamente, allora:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a_n}}\right)^{\mathbf{a_n}} = \boldsymbol{e}\,.$$

64.3 LIMITE DI UNA FUNZIONE

64.3.1 La definizione di limite può essere estesa a quella di limite di una qualunque funzione reale di variabile reale.

Considerata una funzione reale di variabile reale f(x) e posto per comodità:

$$\text{dom}\, f(x) - \{a\} = D\,,$$

si dice che f(x) tende ad *l* o ha per limite *l*, quando x tende ad a, se per ogni intorno U(*l*) esiste subordinatamente un intorno U(a) tale che, per ogni $x \in U(a) \cap D$, risulti $f(x) \in U(l)$.

Oppure in notazione simbolica:

$$f(x) \to l \text{ per } x \to a \text{ se } \forall U(l),\ \exists U(a) \text{ tale che } \forall x\ [x \in U(a) \cap D \to f(x) \in U(l)].$$

Si scrive:

$$\lim_{x\to a} f(x) = l$$

o anche indifferentemente in uno dei seguenti modi:

$$\lim\nolimits_{x\to a} f(x) = l \quad \text{oppure} \quad f(x) \to l \text{ per } x \to a.$$

A differenza del caso delle successioni, in cui era implicito che l'indice n tendesse a +∞, adesso è necessario specificare a quale valore tende x.

Se $l=0$ si dice che f(x) è ***infinitesima*** (o che è ***un infinitesimo***) per $x\to a$.

Se $l=\pm\infty$ (che è come dire che l tende a $+\infty$ o a $-\infty$) si dice che f(x) è ***infinita*** (o che è ***un infinito***) per $x\to a$.

Come per le successioni, quando il limite è un numero reale l si dice pure che la funzione ***converge ad***

l; quand'è $+\infty$ o $-\infty$ si dice rispettivamente che la funzione ***diverge positivamente*** o ***negativamente***.

64.3.2 Alcune precisazioni riguardo alla precedente definizione.

1) Negli x in questione $[x\in U(a)\cap D]$ **non solo f(x) deve essere definita** $[x\in \mathrm{dom} f(x)]$**, ma tali x devono essere "prossimi" ad a** $[x\in U(a)]$**.**

Detto in altri termini, a deve essere un punto di accumulazione di dom f(x).

2) La definizione di limite della funzione f(x) in a prescinde dal valore di f(x) in a. Valore che può anche non esistere.

Per esempio, considerate le seguenti funzioni:

$$f_1(x)=x+1 \qquad f_2(x)=\begin{cases}x+1 \text{ se } x\neq 1\\ 1 \text{ se } x=1\end{cases} \qquad f_3(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$$

avviene che tutte e tre tendono a 2 per x tendente ad 1. E tuttavia, a conferma del fatto che non interessa il valore della funzione in $x=1$, si ha: $f_1(1)=2,\ f_2(1)=1,\ f_3(1)$ non esiste.

3) Nella scelta arbitraria di U(*l*) è interessante che quest'intervallo sia il "più piccolo possibile" dal momento che la condizione f(x)∈U(*l*) risulta vera in ogni altro intervallo che contiene U(*l*).

Ai fini pratici questo vuol dire che:

- se $l\in\mathbb{R}$, per cui $f(x)\in U(l)$ significa $l-\varepsilon<f(x)<l+\varepsilon$, con ε numero reale positivo, allora è lecito scegliere ε "***arbitrariamente piccolo***";
- se $l=+\infty$, per cui $f(x)\in U(l)$ significa $f(x)>M$, con M numero reale qualsiasi, allora è lecito scegliere M "***arbitrariamente grande e positivo***";
- se $l=-\infty$, per cui $f(x)\in U(l)$ significa $f(x)<N$, con N numero reale qualsiasi, allora è lecito scegliere N "***arbitrariamente grande e negativo***".

64.3.3 Vediamo alcuni esempi in cui interviene la definizione di limite.

- ESERCIZIO 1. Considerata la funzione $f(x)=3x+2$, verificare che f(x) tende a 5 per x tendente ad 1.

RISOLUZIONE. Osservato che il dominio della funzione è l'insieme ℝ dei reali, bisogna far vedere che per ogni intorno U(5) esiste un intorno U(1) tale che per ogni $x\in U(1)-\{1\}$ risulta $3x+2\in U(5)$. Per questo è sufficiente mostrare che gli x che soddisfano alla condizione: $3x+2\in U(5)$ contengono un sottoinsieme che soddisfa alla condizione: $x\in U(1)-\{1\}$. Siccome per $\varepsilon>0$:

$$3x+2\in U(5) \to 5-\varepsilon<3x<5+\varepsilon \to 1-\frac{\varepsilon}{3}<x<1+\frac{\varepsilon}{3}$$

e siccome questi x costituiscono chiaramente un intorno di 1 per ogni $\varepsilon>0$, la verifica è compiuta.
La figura 4 mostra l'andamento della funzione ed evidenzia il limite suddetto.

- ESERCIZIO 2. Verificare che:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x}=2\,.$$

RISOLUZIONE. Osservato che il dominio della funzione è l'insieme $\mathbb{R}_0$ dei numeri reali non nulli, bisogna far vedere che per ogni U(2) esiste un intorno $U(+\infty)$ tale che per ogni $x\in U(+\infty)$ risulta: $\frac{2x-1}{x}\in U(2)$. Per questo è sufficiente mostrare che gli x che soddisfano a quest'ultima condizione contengono un sottoinsieme che soddisfa alla condizione $x\in U(+\infty)$. Poiché c'interessano gli x che costituiscono un intorno di $+\infty$, possiamo intanto supporre $x>0$. Per questi x e per $\varepsilon>0$:

$$\frac{2x-1}{x}\in U(2)\ \rightarrow 2-\varepsilon<\frac{2x-1}{x}<2+\varepsilon\ \rightarrow 2-\varepsilon<2-\frac{1}{x}<2+\varepsilon\ \rightarrow\ -\varepsilon<-\frac{1}{x}<\varepsilon\,.$$

Da qui si desume che deve essere $\varepsilon>1/x$ e perciò $x>1/\varepsilon$. Siccome questi x costituiscono un intorno di $+\infty$ per ogni $\varepsilon>0$, la verifica è compiuta. La figura 5 evidenzia il limite suddetto.

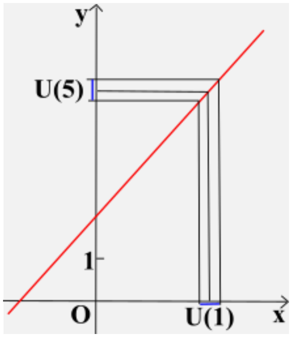

FIG. 4

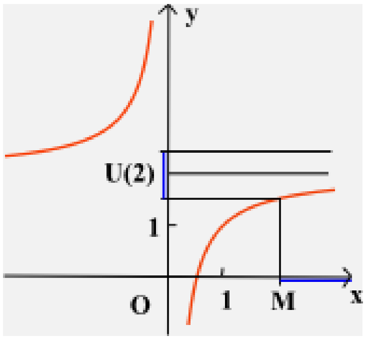

FIG. 5

- ESERCIZIO 3. Verificare che:

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1-x}=+\infty\,.$$

RISOLUZIONE. Constatiamo che il dominio della funzione è costituito dagli x reali tali che: $1-x\geq0$ ossia: $x\leq1$. Per la verifica richiesta bisogna far vedere che per ogni intorno $U(+\infty)$ esiste un intorno $U(-\infty)$ tale che per ogni $x\in U(-\infty)$ risulta $\sqrt{1-x}\in U(+\infty)$. Per questo basta mostrare che gli x che soddisfano a quest'ultima condizione contengono un sottoinsieme che soddisfa alla condizione $x\in U(-\infty)$.

Ora per ogni $x\leq1$ e per M reale positivo:

$$\sqrt{1-x}\in U(+\infty)\ \rightarrow\ \sqrt{1-x}>M\ \rightarrow$$
$$\rightarrow 1-x>M^2\ \rightarrow\ x<1-M^2\ ;$$

siccome questi x costituisco un intorno di $-\infty$, la verifica è compiuta (Fig. 6).

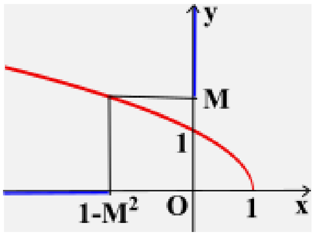

FIG. 6

64.3.4 Ricorrendo alla definizione di limite di una funzione, verifica i seguenti limiti:

1. Posto $f(x)=3x-2$, risulta:
   a) $f(x)\to-2$ per $x\to0$; b) $f(x)\to+\infty$ per $x\to+\infty$; c) $f(x)\to-\infty$ per $x\to-\infty$.
2. Posto $f(x)=1-x^2$, risulta:
   a) $f(x)\to0$ per $x\to1$; b) $f(x)\to1$ per $x\to0$; c) $f(x)\to-\infty$ per $x\to+\infty$.
3. Posto $f(x)=\dfrac{2x+3}{5x}$, risulta:
   a) $f(x)\to1$ per $x\to1$; b) $f(x)\to\dfrac{2}{5}$ per $x\to+\infty$; c) $f(x)\to\dfrac{2}{5}$ per $x\to-\infty$.
4. Posto $f(x)=\sqrt{3-x}$, risulta:
   a) $f(x)\to1$ per $x\to2$; b) $f(x)\to2$ per $x\to-1$; c) $f(x)\to+\infty$ per $x\to-\infty$.

64.3.5 Integriamo il concetto di limite con quelli di "limite destro" e "limite sinistro", che svolgono un ruolo importante nello studio delle funzioni. Per questo è necessario precisare in via preliminare i concetti di "intorno destro" e di "intorno sinistro" di un punto $\alpha\in\mathbb{R}$.

- Si dice **intorno destro di α** ogni insieme di numeri reali x tali che $\alpha<x<\alpha+\delta$, dove δ è un numero reale positivo (Fig. 7); si indica con $\mathbf{U^+(\alpha)}$.
- Si dice **intorno sinistro di α** ogni insieme di numeri reali x tali che $\alpha-\delta<x<\alpha$, dove δ è un numero reale positivo (Fig. 8); si indica con $\mathbf{U^-(\alpha)}$.

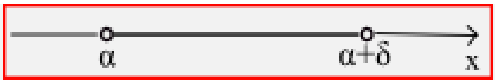

FIG. 7

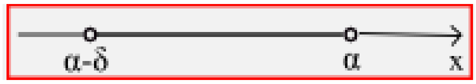

FIG. 8

Le definizioni di limite destro e di limite sinistro di f(x) per x tendente ad a sono esattamente quelle di limite di f(x) per $x\to a$, tranne che, al posto di U(a), va considerato $U^+(a)$ per il limite destro e $U^-(a)$ per quello sinistro.
Per indicare che f(x) tende ad *l* quando x tende ad a da destra si scrive:

$$f(x) \to l \text{ per } x \to a^+ \quad \text{oppure} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = l \quad \text{o anche} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = l;$$

per indicare che f(x) tende ad *l* per x tendente ad a da sinistra si scrive:

$$f(x) \to l \text{ per } x \to a^- \quad \text{oppure} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = l \quad \text{o anche} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = l.$$

- ESERCIZIO 1. Verificare che:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty\,.$$

RISOLUZIONE. Constatato che la funzione è definita in $\mathbb{R}_0$, bisogna far vedere che per ogni $U(+\infty)$ esiste $U^+(0)$ tale che per ogni $x\in U^+(0)$ risulta:

$$\frac{1}{x} \in U(+\infty).$$

Per questo è sufficiente mostrare che gli x che soddisfano all'ultima condizione contengono un sottoinsieme che soddisfa alla condizione $x\in U^+(0)$.
Poiché c'interessano gli x che costituiscono un intorno destro di 0, possiamo supporre x>0. Per questi x e per M numero reale positivo:

$$\frac{1}{x} \in U(+\infty) \to \frac{1}{x} > M \;\to\; x<\frac{1}{M}\;;$$

siccome questi x, per x>0, costituiscono un intorno destro di 0, la verifica è completata (Fig. 9).

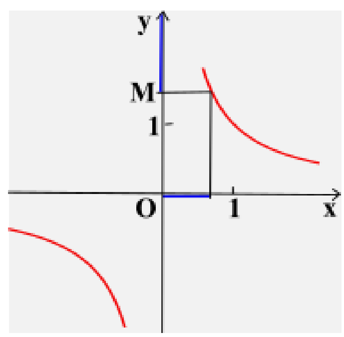

FIG. 9

- ESERCIZIO 2. Verificare che:

$$\lim_{x\to 0^-} \left(x + \frac{|x|}{x}\right) = -1.$$

RISOLUZIONE. Constatato che il dominio della funzione è $\mathbb{R}_0$, bisogna far vedere che per ogni $U(-1)$ esiste $U^-(0)$ tale che per ogni $x\in U^-(0)$ risulta:

$$x + \frac{|x|}{x} \in U(-1).$$

Per questo è sufficiente mostrare che gli x che soddisfano all'ultima condizione contengono un sottoinsieme che soddisfa alla condizione $x\in U^-(0)$. Siccome c'interessano gli x che costituiscono un intorno sinistro di 0, possiamo supporre x<0 e per questi x risulta $|x|=-x$; per cui:

$$x+\frac{|x|}{x}=x+\frac{-x}{x}=x-1.$$

Dunque, per $\varepsilon>0$ e per $x<0$:

$$x+\frac{|x|}{x}\in U(-1)\ \rightarrow\ x-1\in U(-1)\ \rightarrow$$
$$\rightarrow\ -1-\varepsilon<x-1<-1+\varepsilon\ \rightarrow -\varepsilon<x<\varepsilon.$$

L'ultima disuguaglianza, con la condizione $x<0$, individua l'intervallo $]-\varepsilon, 0[$ che è un intorno sinistro di 0. La verifica è così completata (Fig. 10).

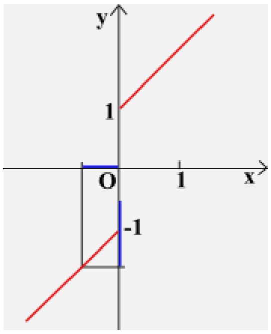

FIG. 10

Per questa medesima funzione si ha pure:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x+\frac{|x|}{x}\right)=1.$$

Cosa che sei invitato a verificare.

Quando affermiamo che in un punto $\alpha\in\mathbb{R}$ una determinata funzione f(x) ammette limite *l*, finito o infinito, intendiamo dire che essa ha in α limite destro e limite sinistro e che questi due limiti sono uguali ad *l*.

Per esempio, la funzione di cui al precedente esercizio 2 ha in 0 limite destro (uguale ad 1) e limite sinistro (uguale a -1): dobbiamo concludere che la funzione non ha limite in 0.

64.3.6 Ricorrendo alla definizione di limite di una funzione, verifica i seguenti limiti:

1. Posto $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$, risulta:
   a) $f(x)\to-\infty$ per $x\to1^-$; b) $f(x)\to+\infty$ per $x\to1^+$.
2. Posto $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}$, risulta:
   a) $f(x)\to-\infty$ per $x\to1^-$; b) $f(x)\to+\infty$ per $x\to1^+$.
3. Posto $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}$, risulta:
   a) $f(x)\to0$ per $x\to1^+$; b) $f(x)\to+\infty$ per $x\to0^-$.
4. Posto $f(x)=\dfrac{2x}{|x|}$, risulta:
   a) $f(x)\to2$ per $x\to0^+$; b) $f(x)\to-2$ per $x\to0^-$.

64.4 TEOREMI FONDAMENTALI SUI LIMITI

64.4.1 Nella pratica, più che la verifica di un certo limite, interessa il calcolo dei limiti delle funzioni. Intendiamoci: ciò non significa che la "verifica" – a parte la sua efficacia nell'acquisizione del concetto di limite – sia inutile. Tutt'altro. Infatti, proprio su tale operazione poggiano due fatti importanti:

- la dimostrazione di alcuni teoremi e regole fondamentali;
- la determinazione di alcuni limiti fondamentali.

Successivamente, sulla base di questi fatti, si calcolano limiti qualsiasi. Avremo modo di constatarlo.

Ma intanto incominciamo ad occuparci dei teoremi fondamentali. Non prima di aver fatto alcune precisazioni.

a) Oggigiorno esistono software matematici che permettono di calcolare rapidamente i limiti delle funzioni: il ricorso a tali strumenti può essere utile.
b) Mentre forniremo gli enunciati dei principali teoremi sui limiti e sulle loro operazioni, ci soffermeremo sulla dimostrazione di solo alcuni di essi.
c) I teoremi che enunceremo valgono anche quando si considerano il limite destro e il limite sinistro.

64.4.2 TEOREMA (**dell'unicità del limite**).

Se una funzione ammette limite in un punto, esso è unico.

L'importanza di questo teorema, di cui non forniamo la dimostrazione, dovrebbe essere palese. Se, infatti, si intuisce in qualche modo che $f(x)\to l$ per $x\to a$ e si verifica che è realmente così in base alla definizione di limite, allora si può essere certi che $f(x)$ non ha altri limiti diversi da l per $x\to a$.

- Per esempio, s'intuisce che deve essere:

$$\lim_{x\to a} x = a.$$

$\forall a\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$. Basta pensare al grafico della funzione $f(x)=x$.

Per verificare il limite, una volta constatato che il dominio della funzione x è $\mathbb{R}$, bisogna mostrare che per ogni U(a) esiste U'(a) tale che risulta $x\in U(a)$ per ogni $x\in U'(a)-\{a\}$. Il che è certamente vero se si sceglie U'(a) contenuto in U(a). Quindi possiamo esser certi che il limite di x, per x tendente al valore a, è a ed a soltanto, qualunque sia a, finito o infinito.

- Altro esempio. S'intuisce che deve essere:

$$\lim_{x\to a} k = k.$$

dove k è una costante rispetto ad x ed $a\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$. Anche adesso basta pensare al grafico della funzione $f(x)=k$.

Per verificare il limite, dopo aver constatato che il dominio della funzione costante k è $\mathbb{R}$, bisogna mostrare che per ogni U(k) esiste U(a) tale che per ogni $x\in U(a)-\{a\}$ risulta $k\in U(k)$. Il che è evidente, giacché $k\in U(k)$ indipendentemente da qualsiasi fatto.

64.4.3 TEOREMA (**del confronto** o **dei carabinieri**).

Se f(x), g(x) ed h(x) sono tre funzioni definite in uno stesso intorno H del punto a (escluso al più il punto a) in modo che per ogni $x\in H-\{a\}$ risulti $f(x)\le h(x)\le g(x)$ e se f(x) e g(x) tendono entrambe al limite *l* per x tendente ad a allora anche h(x) tende ad *l* per x che tende ad a.

DIMOSTRAZIONE. Siccome $f(x)\to l$ e $g(x)\to l$ per $x\to a$ allora, posto per comodità $D=H-\{a\}$,

$\forall U(l)$: $\exists U'(a)$ tale che $\forall x\ [x\in U'(a)\cap D \to f(x)\in U(l)]$ ed
$\exists U''(a)$ tale che $\forall x\ [x\in U''(a)\cap D \to g(x)\in U(l)]$.

Questo significa che tra gli x che soddisfano alla condizione $f(x)\in U(l)$ ve ne sono di quelli che costituiscono un intorno U'(a) di a e tra gli x che soddisfano alla condizione $g(x)\in U(l)$ ve ne sono di quelli che costituiscono un intorno U''(a) di a. Allora in $U(a)=U'(a)\cap U''(a)$, che è ancora un intorno di a, sono soddisfatte entrambe le condizioni $f(x)\in U(l)$ e $g(x)\in U(l)$.

Ora, ammesso che $l\in\mathbb{R}$ e posto che l'ampiezza dell'intorno U(l) sia 2ε, si ha:

$$f(x)\in U(l) \leftrightarrow l-\varepsilon<f(x)<l+\varepsilon \quad \text{e} \quad g(x)\in U(l) \leftrightarrow l-\varepsilon<g(x)<l+\varepsilon;$$

dunque, per le ipotesi fatte:

$l-\varepsilon < f(x) \le g(x) < l+\varepsilon$, e anche: $l-\varepsilon < f(x) \le h(x) \le g(x) < l+\varepsilon$, perciò: $h(x)\in U(l)$.

Insomma: $\forall U(l)$, $\exists U(a)$ tale che $\forall x\ [x\in U(a)\cap D \rightarrow h(x)\in U(l)]$. Cioè: $h(x)\rightarrow l$ per $x\rightarrow a$.

Analogamente si procede se l è uguale a $+\infty$ o $-\infty$.

64.4.4 TEOREMA **(della permanenza del segno).**

Se la funzione reale di variabile reale f(x) ha limite $l\in\mathbb{R}_0$ per $x\rightarrow a$, allora esiste un intorno di *a* nei cui punti, eccetto al più *a*, la funzione assume lo stesso segno di *l*.

Di questo teorema non forniamo la dimostrazione ma ti invitiamo a darne un'interpretazione geometrica.

64.4.5 Di ciascuna delle seguenti affermazioni dire se è vera o falsa, giustificando la risposta.

1. Esiste una funzione f(x) tale che, quando $x\rightarrow 0$, $f(x)\rightarrow 1$ ed $f(x)\rightarrow -1$.
2. Esiste una funzione f(x) tale che $f(x)\rightarrow -1$ quando $x\rightarrow 0^+$ ed $f(x)\rightarrow 1$ quando $x\rightarrow 0^-$.
3. Esiste una funzione f(x) tale che $f(x)\rightarrow 1$ sia per $x\rightarrow 0$ sia per $x\rightarrow 1$.
4. Si sa che per ogni $x\in[-1,1]-\{0\}$ risulta $A(x)\le f(x)\le B(x)$ e che $A(x)\rightarrow 0$ e $B(x)\rightarrow 0$ per $x\rightarrow 0$. Allora anche $f(x)\rightarrow 0$ per $x\rightarrow 0$.

64.5 REGOLE PER IL CALCOLO DEI LIMITI

64.5.1 REGOLA (**della somma di due limiti**).

Se, per $x\rightarrow a$, $f(x)\rightarrow l$ e $g(x)\rightarrow m$ allora f(x)+g(x) tende a:

- **$l+m$ se entrambi i limiti *l*, *m* sono numeri reali;**
- **$+\infty$ se almeno uno dei due limiti *l*, *m* è $+\infty$ e l'altro non è $-\infty$;**
- **$-\infty$ se almeno uno dei due limiti *l*, *m* è $-\infty$ e l'altro non è $+\infty$.**

DIMOSTRAZIONE.

Per definizione di limite, posto per comodità dom $f(x)-\{a\}=D'$ e dom $g(x)-\{a\}=D''$:

$$\forall U(l),\ \exists U'(a) \text{ tale che } \forall x\ [x\in U'(a)\cap D' \rightarrow f(x)\in U(l)],$$

$$\forall U(m),\ \exists U''(a) \text{ tale che } \forall x\ [x\in U''(a)\cap D'' \rightarrow g(x)\in U(m)].$$

Questo significa che tra gli x che soddisfano alla condizione $f(x)\in U(l)$ ve ne sono di quelli che costituiscono un intorno U'(a) di a e tra gli x che soddisfano alla condizione $g(x)\in U(m)$ ve ne sono di quelli che formano un intorno U"(a) di a. In entrambi i casi, con l'eventuale eccezione del punto a. Sicché, considerato l'intervallo $U(a)=U'(a)\cap U''(a)$, che è ancora un intorno di a, e posto $D=D'\cap D''$, in $U(a)\cap D$ sono soddisfatte entrambe le condizioni $f(x)\in U(l)$ e $g(x)\in U(m)$. Distinguiamo ora i vari casi:

- $l,m\in\mathbb{R}$:

  $$f(x)\in U(l) \leftrightarrow l-\varepsilon'<f(x)<l+\varepsilon',\quad g(x)\in U(m) \leftrightarrow m-\varepsilon''<g(x)<m+\varepsilon'',$$

  dove ε' ed ε" sono numeri reali positivi. Sommando membro a membro le precedenti disuguaglianze e posto $\varepsilon'+\varepsilon''=\varepsilon$, in $U(a)\cap D$ risulta:

  $$(l+m)-\varepsilon<f(x)+g(x)<(l+m)+\varepsilon,\ \text{ ossia: } f(x)+g(x)\in U(l+m).$$

  Come dire:

  $$f(x)+g(x) \rightarrow l+m \ \text{ per } \ x\rightarrow a.$$

- $l\in\mathbb{R}$ ed $m=+\infty$:

  $$f(x)\in U(l) \leftrightarrow l-\varepsilon<f(x)<l+\varepsilon,\quad g(x)\in I(+\infty) \leftrightarrow g(x)>M,$$

dove ε è un numero reale positivo ed M è un numero reale. Dalle due relazioni $f(x)>l-\varepsilon$ e $g(x)>M$, valide entrambe in $U(a)\cap D$, segue:

$$f(x)+g(x)>M', \quad \text{ossia: } f(x)+g(x)\in U(+\infty),$$

avendo posto $M'=l-\varepsilon+M$. Dunque:

$$f(x)+g(x) \to +\infty \quad \text{per} \quad x\to a.$$

- La dimostrazione è analoga negli altri casi.

Per esempio, posto $f(x)=\frac{1}{x^2}$ e $g(x)=2x$:

- dopo aver verificato che, per $x\to 1$, $f(x)\to 1$ e $g(x)\to 2$, allora: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x^2}+2x\right)=3$;
- dopo aver verificato che, per $x\to 0$, $f(x)\to +\infty$ e $g(x)\to 0$, allora: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}+2x\right)=+\infty$;
- dopo aver verificato che, per $x\to -\infty$, $f(x)\to 0$ e $g(x)\to -\infty$, allora: $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{1}{x^2}+2x\right)=-\infty$.

Esaminando i casi elencati nell'enunciato del teorema, si può constatare che nulla è stato detto quando $l=+\infty$ ed $m=-\infty$ (oppure $l=-\infty$ ed $m=+\infty$). In effetti, in questo caso, il limite di $f(x)+g(x)$ può esistere (ed essere finito, $+\infty$, $-\infty$) oppure non esistere: bisogna stabilirlo di volta in volta.

Quando, per $x\to a$, $f(x)\to +\infty$ e $g(x)\to -\infty$, si dice che, per $x\to a$, $f(x)+g(x)$ è una **forma indeterminata di tipo $\infty-\infty$**.

64.5.2 REGOLA (**del prodotto di due limiti**).

Se, per $x\to a$, $f(x)\to l$ e $g(x)\to m$ allora $f(x)\cdot g(x)$ tende a:
- ***l m* se entrambi i limiti *l*, *m* sono numeri reali;**
- **$+\infty$ se i due limiti sono concordi e almeno uno di essi è infinito;**
- **$-\infty$ se i due limiti sono discordi e almeno uno di essi è infinito.**

Per esempio, si può verificare che, per $x\to 1$, $\ln x \to 0$ ed $e^x\to e$, per cui si ha: $\lim\limits_{x\to 1}(e^x \ln x)=0$.

Esaminando i casi elencati nell'enunciato del teorema, si può constatare che nulla è stato detto quando $l=0$ ed $m=\pm\infty$ (oppure $l=\pm\infty$ ed $m=0$). In effetti, in questi casi, il limite di $f(x)g(x)$ può esistere (ed essere finito, $+\infty$, $-\infty$) oppure non esistere: bisogna stabilirlo di volta in volta.

Quando, per $x\to a$, $f(x)\to 0$ e $g(x)\to \pm\infty$, si dice che, per $x\to a$, $f(x)g(x)$ è una forma **indeterminata di tipo $0\cdot\infty$**.

Un caso particolare del teorema si ha quando una delle due funzioni, mettiamo $g(x)$, è una costante, per esempio k. Allora:

$$\mathbf{\lim_{x\to a} kf(x) = k\lim_{x\to a} f(x)}.$$

In particolare, se $k=-1$:

$$\mathbf{\lim_{x\to a}[-f(x)] =-\lim_{x\to a} f(x)}.$$

64.5.3 Tenendo presenti le regole fin qui apprese, siamo in grado di calcolare il limite di un qualunque polinomio in x, quando x tende ad un qualsiasi numero reale a. Lo vediamo attraverso un paio di esempi che, s'intuisce facilmente, sono generalizzabili ad un polinomio qualsiasi.

- ESEMPIO 1. Calcolare $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2+5x-2)$.

RISOLUZIONE. $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2+5x-2)=\lim\limits_{x\to 2}[3x^2+(5x-2)]=\lim\limits_{x\to 2}3x^2+\lim\limits_{x\to 2}(5x-2)=$

$$=3\lim_{x\to 2}x\cdot\lim_{x\to 2}x+5\lim_{x\to 2}x-2=3\cdot 2\cdot 2+5\cdot 2-2=20.$$

Nella pratica i passaggi intermedi si saltano.

D'altronde si può notare che, posto $P(x)=3x^2+5x-2$, risulta $P(2)=3\cdot 4+5\cdot 2-2$ e pertanto:

$$\lim_{x\to 2}P(x)=P(2).$$

Questo vale, in verità, quali che siano il polinomio P(x) ed il valore reale cui tende x.

Dunque, per ogni polinomio P(x) e per ogni $a\in\mathbb{R}$:

$$\mathbf{\lim_{x\to a}P(x)=P(a)}.$$

Sicché, per esempio, senza tanti fronzoli:

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+1\right)=\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^3-\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1=\ldots.$$

E questo mostra come sia veramente banale calcolare il limite di un qualunque polinomio. Mentre la verifica di un siffatto limite è praticamente impossibile se il grado del polinomio è maggiore di 2.

- ESEMPIO 2. Calcolare il limite di x^2 e, successivamente, di x^3 per x tendente a $-\infty$.

RISOLUZIONE. $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=\lim\limits_{x\to-\infty}(x\cdot x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2\cdot x)=-\infty$.

In generale, se n è un numero naturale non nullo:

- **per $x\to-\infty$, $x^n\to+\infty$ qualunque sia n,**
- **per $x\to-\infty$, $x^n\to+\infty$ se n è pari mentre $x^n\to-\infty$ se n è dispari.**

64.5.4 REGOLA (**del reciproco di un limite**).

Se $f(x)$ tende ad l per x tendente ad a allora $\dfrac{1}{f(x)}$ tende a:

- $\dfrac{1}{l}$ **se l è un numero reale non nullo;**
- $+\infty$ **se $l=0^+$ (cioè se $f(x)\to 0$ mantenendosi positiva);**
- $-\infty$ **se $l=0^-$ (cioè se $f(x)\to 0$ mantenendosi negativa);**
- 0 **se $l=\pm\infty$.**

Per esempio, si può verificare che, per $x\to 0^+$, $\ln x\to-\infty$, per cui si ha:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln x}=0.$$

64.5.5 REGOLA (**del rapporto di due limiti**).

Se, per $x\to a$, $f(x)\to l$ e $g(x)\to m$ allora $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tende a:

- $\dfrac{l}{m}$ **se $l\in\mathbb{R}$ ed $m\in\mathbb{R}_0$;**
- 0 **se $l\in\mathbb{R}$ ed $m=\pm\infty$.**
- $+\infty$ **se $l>0$ ed $m=0^+$ (cioè se $g(x)\to 0$ mantenendosi positiva) oppure se $l<0$ ed $m=0^-$ (cioè se $g(x)\to 0$ mantenendosi negativa)**
- $-\infty$ **se $l>0$ ed $m=0^-$ oppure se $l<0$ ed $m=0^+$.**

Per la dimostrazione è sufficiente osservare che:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)}$$

e tener presenti i teoremi 63.5.2 e 63.5.4. Lasciamo a te la disamina dei singoli casi.
Per esempio, posto $f(x)=2x+1$ e $g(x)=x^2$:

- siccome, per $x\to 2$, $f(x)\to 5$ e $g(x)\to 4$, allora: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x+1}{x^2}=\frac{5}{4}$;
- siccome, per $x\to 0$, $f(x)\to 1$ e $g(x)\to 0^+$, allora: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x+1}{x^2}=+\infty$.

Esaminando i casi elencati nell'enunciato del teorema, si può constatare che nulla è stato detto quando i limiti *l* ed *m* sono entrambi nulli o entrambi infiniti. In effetti, in questi casi, il limite di $f(x)/g(x)$ può esistere (ed essere finito, $+\infty$, $-\infty$) oppure non esistere: bisogna stabilirlo di volta in volta.

Quando, per $x\to a$:

- $f(x)\to 0$ e $g(x)\to 0$, si dice che, per $x\to a$ $\frac{f(x)}{g(x)}$ è una **forma indeterminata di tipo** $\frac{0}{0}$;
- $f(x)\to\pm\infty$ e $g(x)\to\pm\infty$, si dice che, per $x\to a$ $\frac{f(x)}{g(x)}$ è una **forma indeterminata di tipo** $\frac{\infty}{\infty}$.

64.5.6 REGOLA (**del valore assoluto del limite**).

Se $f(x)\to l$ per $x\to a$, con $l\in\mathbb{R}_0$, allora $|f(x)|\to|l|$ per $x\to a$.

DIMOSTRAZIONE. Posto $D=\text{dom } f(x)-\{a\}$, per definizione di limite:

$$\forall U(l),\ \exists U(a) \text{ tal che } \forall x\ [x\in U(a)\cap D \to f(x)\in U(l)].$$

Siccome, per $\varepsilon>0$: $f(x)\in I(l)\leftrightarrow|f(x)-l|<\varepsilon$, e siccome: $\big|\,|f(x)|-|l|\,\big|\le|f(x)-l|$, allora:

$$\big|\,|f(x)|-|l|\,\big|\le\varepsilon.$$

Pertanto:

$$|f(x)|\to|l| \text{ per } x\to a.$$

Ti invitiamo a fornire qualche semplice esempio.

64.5.7 Al fine di verificare quanto hai appreso sui teoremi studiati in questo paragrafo (indipendentemente dal fatto che ne conosca o meno la dimostrazione), di ciascuna delle seguenti affermazioni di' se è vera o falsa, motivando in maniera esauriente la risposta:

1. Si sa che $f(x)\to 2$ e $g(x)\to -2$ per $x\to 0$.
   Si deve concludere che $f(x)+g(x)\to 0$ per $x\to 0$.
2. Si sa che $f(x)\to+\infty$ e $g(x)\to-\infty$ per $x\to 0$.
   Si deve concludere che $f(x)+g(x)\to 0$ per $x\to 0$.
3. Si sa che $f(x)\to-\infty$ e $g(x)\to 10^{10}$ per $x\to 0$.
   Si deve concludere che $f(x)+g(x)\to-\infty$ per $x\to 0$.
4. Si sa che $f(x)\to 0$ e $g(x)\to -2$ per $x\to 0$.
   Si deve concludere che $f(x)g(x)\to 0$ per $x\to 0$.
5. Si sa che $f(x)\to+\infty$ e $g(x)\to -2$ per $x\to 1$.
   Si deve concludere che $f(x)+g(x)\to-\infty$ per $x\to 1$.
6. Si sa che $f(x)\to 0^+$ per $x\to 0^-$.
   Si deve concludere che $\frac{1}{f(x)}\to+\infty$ per $x\to 0^-$.

7. Si sa che $f(x)\to 0$ e $g(x)\to +\infty$ per $x\to 0$.
   Non si può dire nulla sul limite di $\frac{f(x)}{g(x)}$ per $x\to 0$.
8. Si sa che $f(x)\to -\infty$ e $g(x)\to +\infty$ per $x\to -\infty$.
   Non si può dire nulla sul limite di $\frac{f(x)}{g(x)}$ per $x\to -\infty$.
9. Si sa che $f(x)\to -2$ e $g(x)\to 2$ per $x\to -\infty$.
   Si può concludere che $|f(x)|-|g(x)|\to 0$ per $x\to -\infty$.

64.6 ALCUNI LIMITI FONDAMENTALI E PRIME CONSEGUENZE

64.6.1 POTENZA CON ESPONENTE IN $\mathbb{R}$. Abbiamo già visto che, se P(x) è un polinomio in x con coefficienti reali, allora per ogni numero reale a si ha: $\lim_{x\to a} P(x) = P(a)$. A questa conclusione si giunge dopo aver giustificato, tra le altre cose, che per ogni $a\in\mathbb{R}$ risulta: $\lim_{x\to a} x^n = a^n$, dove $n\in\mathbb{N}_0$.

Quest'ultimo risultato può essere generalizzato ad un qualsiasi esponente reale r, nel qual caso però la funzione $f(x)=x^r$ è definita in $\mathbb{R}_0^+$. Ebbene, se r è un qualsiasi numero reale ed a un numero reale positivo, si dimostra che:

$$\lim_{x\to a} x^r = a^r.$$

Si può dimostrare inoltre che la funzione x^r tende a:

- **0 per $x\to 0^+$;** • **$+\infty$ per $x\to +\infty$, se $r>0$;** • **0 per $x\to +\infty$, se $r<0$.**

64.6.2 FUNZIONE ESPONENZIALE. Si ha:

$$\lim_{x\to 0} e^x = 1$$

dove "e" è il numero di Nepero.

Il precedente limite permette di calcolarne altri. In particolare:

- Qualunque sia il numero reale a, risulta:

$$\lim_{x\to a} e^x = e^a.$$

  Infatti, posto $x=a+t$ ovvero $t=x-a$, e osservato che $t\to 0$ per $x\to a$, si ha:

$$\lim_{x\to a} e^x = \lim_{t\to 0} e^{a+t} = \lim_{t\to 0}(e^a\cdot e^t) = e^a \lim_{t\to 0} e^t = e^a\cdot 1 = e^a.$$

- Si dimostra pure che, qualunque siano i numeri reali a ed r (con $a>0$), risulta:

$$\lim_{x\to a} r^x = r^a.$$

  Infatti, constatato che $r^x=e^{x\ln r}$ e che, per $x\to a$, $x\ln r\to a\ln r$, si ha di seguito:

$$\lim_{x\to a} r^x = \lim_{x\to a} e^{x\ln r} = e^{a\ln r} = r^a.$$

- Si potrebbe inoltre dimostrare che:

$$\lim_{x\to +\infty} e^x = +\infty, \qquad \lim_{x\to -\infty} e^x = 0.$$

64.6.3 FUNZIONE LOGARITMICA. Si ha:

$$\lim_{x\to 1} \ln x = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Osservato che la funzione ln x è definita in $\mathbb{R}_0^+$, posto $D=\mathbb{R}_0^+-\{1\}$, bisogna far vedere che:

$$\forall U(1), \exists U(0) \text{ tale che } \forall x\ [x \in U(1) \cap D \to \ln x \in U(0)].$$

Ora, scelto ε' in modo che sia $0<\varepsilon'<1$, avviene che:

$$x \in U(1) \cap \mathbb{R}_0^+ \ \to\ 1-\varepsilon'<x<1+\varepsilon' \ \to\ \ln(1-\varepsilon')<\ln x<\ln(1+\varepsilon');$$

d'altronde, constatato che $1-\varepsilon'<1$ ed $1+\varepsilon'>1$ e, di conseguenza, $\ln(1-\varepsilon')<0$ e $\ln(1+\varepsilon')>0$, posto ε uguale al minore dei numeri positivi $|\ln(1-\varepsilon')|, \ln(1+\varepsilon')$ risulta che:

$$\ln(1-\varepsilon')<\ln x<\ln(1+\varepsilon') \ \to -\varepsilon<\ln x<\varepsilon\,;$$

per cui, siccome $D \subset \mathbb{R}_0^+$: $x \in U(1) \cap D \to \ln x \in U(0)$. [c.v.d.]

Il precedente limite permette di calcolarne altri. In particolare:

- Qualunque sia il numero reale positivo a, risulta:

$$\lim_{x\to a} \ln x = \ln a.$$

  Infatti, posto $x=\frac{a}{t}$ ovvero $t=\frac{a}{x}$, e constatato che $t\to1$ per $x\to a$:

$$\lim_{x\to a} \ln x = \lim_{t\to1} \ln\frac{a}{t} = \lim_{t\to1}(\ln a - \ln t) = \ln a - \lim_{t\to1}\ln t = \ln a\,.$$

- Qualunque siano i numeri reali positivi a, b (con $b\neq1$), risulta:

$$\lim_{x\to a} \log_b x = \log_b a\,.$$

  Infatti, ricordando che $\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$, si ha: $\lim_{x\to a}\log_b x = \lim_{x\to a}\frac{\ln x}{\ln b} = \frac{\ln a}{\ln b} = \log_b a\,.$

- Si può pure dimostrare che:

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty, \qquad \lim_{x\to0^+} \ln x = -\infty.$$

64.6.4 FUNZIONI CIRCOLARI. Risulta:

$$\lim_{x\to0} \sin x = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Osservato che la funzione $\sin x$ è definita in ℝ, posto $D=\mathbb{R}-\{0\}$, bisogna far vedere che:

$$\forall U(1), \exists U(0) \text{ tale che } \forall x\ [x \in U(0) \cap D \to \sin x \in U(0)].$$

Ora, scelto ε in modo che sia $0<\varepsilon<\frac{\pi}{2}$, consideriamo gli angoli di x radianti tali che $|x|<\varepsilon$ e constatiamo anzitutto che i corrispondenti archi di una circonferenza trigonometrica (Fig. 11), il cui raggio come si sa è 1, hanno la stessa misura x di tali angoli.

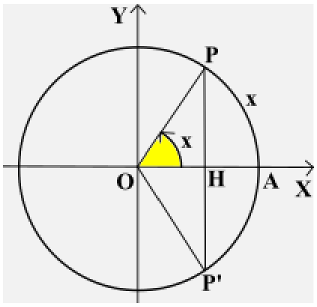

FIG. 11

D'altronde si ha: corda P'P < arco P'P e quindi |segmento HP| < |arco AP| ossia: $|\sin x|<|x|$.
Dunque, per tali x, per i quali $|x|<\varepsilon$, sia ha $|\sin x|<\varepsilon$.
Come dire: $x \in U(0) \cap D \to \sin x \in U(0)$. [c.v.d.]

Il precedente limite permette di calcolarne altri. Vediamone alcuni.

- Si ha:

$$\lim_{x\to 0} \cos x = 1.$$

Infatti, constatato che per $0<x<\frac{\pi}{2}$ è $\cos x = 1-2\sin^2\frac{x}{2}$ e inoltre quando $x\to 0$ anche $\frac{x}{2}\to 0$, risulta:

$$\lim_{x\to 0}\cos x = \lim_{\frac{x}{2}\to 0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right) = 1-2\lim_{\frac{x}{2}\to 0}\left(\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}\right) = 1.$$

- Qualunque sia il numero reale α, risulta:

$$\lim_{x\to\alpha}\sin x = \sin\alpha.$$

Infatti, posto $x=\alpha+t$ ovvero $t=x-\alpha$ e costatato che $t\to 0$ per $x\to\alpha$, si ha:

$$\lim_{x\to\alpha}\sin x = \lim_{t\to 0}\sin(\alpha+t) = \lim_{t\to 0}(\sin\alpha\cos t - \cos\alpha\sin t) = \sin\alpha\lim_{t\to 0}\cos t + \cos\alpha\lim_{t\to 0}\sin t = \sin\alpha.$$

- Qualunque sia il numero reale α, risulta:

$$\lim_{x\to\alpha}\cos x = \cos\alpha.$$

Si dimostra come il precedente limite.

- Qualunque sia il numero reale α, purché $\cos\alpha\neq 0$, risulta:

$$\lim_{x\to\alpha}\tan x = \tan\alpha.$$

Infatti: $\lim_{x\to\alpha}\tan x = \lim_{x\to\alpha}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha.$

64.6.5 ANCORA SUL NUMERO “**e**”.

Sappiamo che la successione di termine generale $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ converge al celebre numero “e” e sappiamo pure che se (a_n) è una successione con valori in ℕ, divergente positivamente, allora anche la successione di termine generale $\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$ converge ad “e”.

Consideriamo ora, invece della successione, la funzione di variabile reale x:

$$f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x,$$

il cui dominio è costituito dagli x reali tali che $1+\frac{1}{x}>0$, ossia $x<-1$ oppure $x>0$ (Fig. 12).

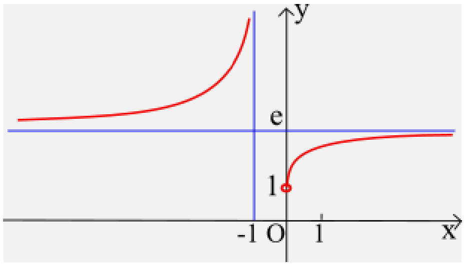

FIG. 12

Ebbene, si ha [5]:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e\,.$$

---

[5] Scriviamo $x\to\pm\infty$ per indicare che x può tendere sia a $+\infty$ sia a $-\infty$.

DIMOSTRAZIONE. Occupiamoci dapprima del caso in cui x tende a $+\infty$ e incominciamo ad osservare che, in tal caso, è legittimo supporre $x>1$. Se indichiamo con n il massimo intero tale che $n \le x < n+1$, si ha:

$$\frac{1}{n+1}<\frac{1}{x}\le\frac{1}{n}\text{ , da cui segue: } 1+\frac{1}{n+1}<1+\frac{1}{x}\le 1+\frac{1}{n}\text{ e dunque:}$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

D'altro canto:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}}=\frac{e}{1}=e\,,$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]=e\cdot 1=e\,.$$

Ragion per cui, dopo aver constatato che, quando $n\to+\infty$, $x\to+\infty$, per il teorema del confronto si ha:

$$\lim_{n\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\,.$$

Se $x\to-\infty$, poniamo $x=-z$. Si ha:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\left(1-\frac{1}{z}\right)^{-z}=\left(\frac{z-1}{z}\right)^{-z}=\left(\frac{z}{z-1}\right)^z=\left(1+\frac{1}{z-1}\right)^z.$$

Pertanto, siccome per $x\to-\infty$, $z\to+\infty$, si ha:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{z\to+\infty}\left(1+\frac{1}{z-1}\right)^z=\lim_{z\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{z-1}\right)^{z-1}\left(1+\frac{1}{z-1}\right)\right]=e\cdot 1=e.$$

[c.v.d.]

64.6.6 Alcuni esercizi di riepilogo su quanto appreso in questo paragrafo (indipendentemente dal fatto che conosca o meno le dimostrazioni). Altri esercizi saranno proposti nella sezione "verifiche".

1. Calcolare i limiti della funzione $\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x-1}$ per $x\to 8,\ x\to 0,\ x\to 1^+,\ x\to 1^-,\ x\to+\infty,\ x\to-\infty$.
2. Calcolare i limiti della funzione $\frac{e^x}{x}$ per $x\to 1,\ x\to 0^+,\ x\to 0^-,\ x\to+\infty,\ x\to-\infty$.
3. Calcolare i limiti della funzione $\frac{\ln x}{x}$ per $x\to e,\ x\to 1,\ x\to 0^+,\ x\to+\infty$.
4. Calcolare i limiti della funzione $\frac{\sin x}{x}$ per $x\to\frac{\pi}{2},\ x\to 0,\ x\to+\infty,\ x\to-\infty$.
5. Calcolare i limiti della funzione $\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}$ per $x\to 1, x\to+\infty, x\to-\infty$.
6. Spiegare perché:
   a) non esiste il limite di $\sin x$ per x tendente a $+\infty$ o a $-\infty$;
   b) non esiste il limite di $\sin\frac{1}{x}$ per x tendente a 0;
   c) la funzione $x\sin\frac{1}{x}$ tende a 0 per x tendente a 0.
7. ESERCIZIO SVOLTO. Trovare i polinomi P(x) per i quali risulti: $1-x^2\le P(x)\le 1+x^2$ per ogni x reale.
   RISOLUZIONE. Se a è un numero reale tale che $-1\le a\le 1$, moltiplicando tutti e tre i membri per x^2, risulta: $-x^2\le ax^2\le x^2$ e perciò: $1-x^2\le 1+ax^2\le 1+x^2$. I polinomi cercati sono dunque i seguenti:

$$P(x) = 1 + ax^2, \text{ con } -1 \le a \le 1 .$$

Questo procedimento va bene in questo caso particolare, ma non è generalizzabile. Noi vogliamo mostrarne uno che è per l'appunto generalizzabile, per esempio al caso in cui il polinomio cercato deve essere compreso fra $1-x^3$ e $1+x^3$.

Sottraiamo 1 da tutti e tre i membri della disuguaglianza proposta, la quale diventa:

$$-x^2 \le P(x) - 1 \le x^2,$$

o anche, ponendo $P(x)-1=Q(x)$: $-x^2 \le Q(x) \le x^2$. Osserviamo che se $x=0$ deve essere $0 \le Q(x) \le 0$ e perciò $Q(x)=0$. Supponiamo allora $x\neq 0$ e dividiamo tutto per x^2. Si ha:

$$-1 \le \frac{Q(x)}{x^2} \le 1$$

e da qui, passando al limite per $x\to\pm\infty$, segue che la disuguaglianza è possibile se e solo se $Q(x)$ è un polinomio al più di 2° grado, quindi: $Q(x)=ax^2+bx+c$. D'altro canto, constatando che:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{ax^2+bx+c}{x^2} = a ,$$

ne consegue che a è un numero reale tale che $-1\le a\le 1$.

A questo punto possiamo dire che si ha:

$$-x^2 \le ax^2 + bx + c \le x^2$$

e da qui, passando al limite per $x\to 0$, segue che deve essere $c=0$. Si ha pertanto:

$$-x^2 \le ax^2 + bx \le x^2 \quad \text{ossia, dividendo per x:}$$

$$\text{se } x > 0, -x \le ax + b \le x; \quad \text{se } x < 0, -x \ge ax + b \ge x$$

in ogni caso, passando al limite per per $x\to 0$, segue che deve essere $b=0$.

Da tutto ciò si desume che si ha: $Q(x)=ax^2$ e perciò, in definitiva:

$$P(x) = ax^2 + 1, \text{ con } -1 \le a \le 1 .$$

VERIFICHE

Ricorrendo alla definizione di limite di una funzione, verificare quali dei seguenti limiti sono veri e quali sono falsi (nn. 1-12):

1. $\lim_{x\to 1}(2x-1) = 1.$

2. $\lim_{x\to 0}(x^2+1) = 2.$

3. $\lim_{x\to -\infty}\sqrt{1-x} = -\infty.$

4. $\lim_{x\to 1}\sqrt{3x+1} = 2.$

5. $\lim_{x\to 1^+}\frac{x}{x-1} = -\infty.$

6. $\lim_{x\to 1^-}\frac{x}{x-1} = -\infty.$

7. $\lim_{x\to 2^+}\frac{x-2}{2x} = +\infty.$

8. $\lim_{x\to 0^-}\frac{2x}{x-2} = -\infty.$

9. $\lim_{x\to 1}\frac{2}{x+1} = 1.$

10. $\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{2-x}{x} = 3.$

11. $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}}{x} = \frac{1}{2}.$

12. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{x+1} = 1.$

Tenendo presenti le regole per il calcolo dei limiti, calcolare i limiti della funzione f(x) sapendo che (nn. 13-21):

13. $f(x) = x^3 - 3x + 2,\ \ x \to 0,\ \ x \to 1,\ \ x \to -\dfrac{1}{2}.$

14. $f(x) = x^3 + 3,\ \ x \to 1,\ \ x \to -\infty,\ \ x \to +\infty.$

15. $f(x) = 1 - x^2 - x^4,\ \ x \to -1,\ \ x \to -\infty,\ \ x \to +\infty.$

16. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 1}{x - 2},\ \ x \to 1,\ \ x \to 2^+,\ \ x \to 2^-.$

17. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1},\ \ x \to 0,\ \ x \to -1^+,\ \ x \to -1^-,\ \ x \to 1^+,\ \ x \to 1^-.$

18. $f(x) = \dfrac{2}{x^2 - 2x},\ \ x \to 0^-,\ \ x \to 0^+,\ \ x \to 2^-,\ \ x \to 2^+.$

19. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - x},\ \ x \to 0^-,\ \ x \to 0^+,\ \ x \to 1^+,\ \ x \to 1^-,\ \ x \to -\infty,\ \ x \to +\infty.$

20. $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x - 1}{x},\ \ x \to 2,\ \ x \to 0^-,\ \ x \to 0^+,\ \ x \to -\infty,\ \ x \to +\infty.$

21. $f(x) = \dfrac{x^3 + 2}{x^2},\ \ x \to 2,\ \ x \to -2,\ \ x \to 0,\ \ x \to -\infty,\ \ x \to +\infty.$

Tenendo presenti i limiti fondamentali, calcolare i limiti della funzione f(x) sapendo che (nn. 22-30):

22. $f(x) = \sqrt{x},\ \ x \to 2,\ \ x \to 0^+,\ \ x \to +\infty.$

23. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x},\ \ x \to 4,\ \ x \to 0^+,\ \ x \to +\infty.$

24. $f(x) = x - \sqrt{x},\ \ x \to 2,\ \ x \to 0^+,\ \ x \to +\infty.$

25. $f(x) = \sqrt[3]{x^2},\ \ x \to 1,\ \ x \to 0,\ \ x \to +\infty,\ \ x \to -\infty.$

26. $f(x) = x^{2x},\ \ x \to 1,\ \ x \to 0,\ \ x \to +\infty,\ \ x \to -\infty.$

27. $f(x) = x \ln x,\ \ x \to e,\ \ x \to 1,\ \ x \to 0^+,\ \ x \to +\infty.$

28. $f(x) = \dfrac{x^2}{|\ln x|},\ \ x \to e,\ \ x \to 1,\ \ x \to 0^+,\ \ x \to +\infty.$

29. $f(x) = \dfrac{x}{\cos x},\ \ x \to 0,\ \ x \to \dfrac{\pi}{2}^+,\ \ x \to \dfrac{\pi}{2}^-.$

30. $f(x) = x \tan x,\ \ x \to 0,\ \ x \to \dfrac{\pi}{4},\ \ x \to \dfrac{\pi}{2}^+,\ \ x \to \dfrac{\pi}{2}^-.$

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

DOMANDE.

1 È vero che, per ogni numero reale a, a appartiene ad ogni intorno di a?

2 È vero che una funzione f(x) si dice infinitesima se x tende a zero?

3 È vero che la funzione f(x) deve essere definita nel punto a affinché possa ammettere limite in a?

4 È vero che la funzione f(x) è definita nel punto a se a è un punto di accumulazione dell'insieme $\operatorname{dom} f(x)$?

5 Affinché la funzione f(x) ammetta limite in un punto a è sufficiente che a sia punto di accumulazione dell'insieme dominio di f(x). È vero o è falso?

6 È vero che, considerata la successione di termine generale $a_n=\frac{1}{n}$, risulta $\lim_{n\to 2} a_n=\frac{1}{2}$?

7 È vero che, per x tendente ad 1, la funzione $\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}$ tende a 0 ?

8 È vero che, per il teorema dell'unicità del limite, non esiste una funzione f(x) tale che f(x)→1 per x→0 e per x→1 ?

9 Si consideri la funzione:

$$f(x)=\frac{(100!)^{100}}{e^x}$$

È vero che il suo limite per x tendente a +∞ è 0 e per x tendente a –∞ è +∞?

10 Si sa che $f(x)\to-\infty$ e $g(x)\to 0^-$ per $x\to 0^+$. Si deve concludere che $f(x)g(x)\to-\infty$ per $x\to 0^+$?

11 Si sa che $f(x)\to+\infty$ e $g(x)\to 0^-$ per $x\to 0^+$. Si deve concludere che $\frac{f(x)}{g(x)}\to-\infty$ per $x\to 0^+$?

12 È vero che si ha, in sequenza: $\lim_{x\to+\infty}(x^3-x^2)=\infty^3-\infty^2=\infty-\infty=0$?

RISPOSTE.

1. Sì. Se, infatti, è 2d l'ampiezza dell'intorno, risulta: a–d<a<a+d.
2. No. La funzione f(x) si dice infinitesima se f(x) tende a zero, ma solo per il valore di x per il quale f(x)→0. In altri termini: se per x→a risulta f(x)→0 allora f(x) si dice infinitesima per x→a.
3. No. Per l'esistenza del limite di una funzione in un punto a è irrilevante che la funzione sia o non sia definita in a.
4. È falso. In un punto di accumulazione del suo dominio la funzione può essere definita o non esserlo. Ad esempio: Il punto 0 è punto di accumulazione dei domini delle due funzioni reali di variabile reale y=x ed y=1/x. Sennonché, la prima funzione è definita in tale punto ma la seconda non lo è.
5. È falso. La condizione è necessaria ma non sufficiente. Per esempio, il punto 0 è un punto di accumulazione per la funzione $\sin\frac{1}{x}$ eppure non esiste il limite di tale funzione per x→0.
6. No. Il limite considerato non esiste poiché il valore n=2, nel quale si calcola il limite, non è punto di accumulazione del dominio della funzione. In effetti basta prendere l'intorno]2–δ, 2+δ [, con 0<δ<1, per rendersi conto che in tale intorno non cadono punti, diversi da 2, nei quali la successione è definita.
7. È falso. La funzione non ammette limite nel punto 1, giacché esso non è punto di accumulazione del dominio della funzione. Dominio che anzi si riduce al solo punto 1, nel quale punto la funzione assume valore 0.
8. È falso. Il teorema dell'unicità del limite non c'entra nulla: esso esclude infatti che una funzione f(x) possa ammettere due limiti nello stesso punto. Per quanto concerne, invece, il nostro interrogativo, basta considerare la funzione f(x)=x(x–1)+1 perché risulti f(x)→1 per x→0 e per x→1.
9. È vero. Infatti la funzione è una frazione avente al numeratore una costante positiva ed al denominatore la funzione e^x. Ora, $e^x\to+\infty$ quando $x\to+\infty$, per cui la frazione tende a 0 per $x\to+\infty$. Invece $e^x\to 0$ quando $x\to-\infty$ e pertanto la funzione tende a $+\infty$ quando $x\to-\infty$
10. No. Infatti la funzione f(x)g(x) è una forma indeterminata di tipo 0·∞ per $x\to 0^+$.
11. Sì.
12. No. È assolutamente falso, è una vera è propria corbelleria. Si ha invece:

$$\lim_{x\to+\infty}(x^3-x^2)=\lim_{x\to+\infty}[x^2(x-1)]=+\infty\,.$$

COMPLEMENTI: CONFRONTO DI INFINITI E INFINITESIMI.

1. Come in altre circostanze proponiamo alcuni cenni riguardanti un argomento non contemplato né dalle Indicazioni Nazionali (Licei) né dalle Linee Guida (Tecnici e Professionali), ma che può interessare ugualmente qualche studente particolarmente motivato allo studio della matematica.
Riprendiamo i concetti di "infinito" e "infinitesimo" già formulati (Cfr.: n. 64.3.1).

Si dice che la funzione reale di variabile reale f(x) è:
- ***un infinito*** per $x\to a$ se $\lim_{x\to a}f(x)=\pm\infty$; in particolare, se il limite è $+\infty$ la funzione si dice che è *un infinito positivo*, se è $-\infty$ si dice che è *un infinito negativo*.
- ***un infinitesimo*** per $x\to a$ se $\lim_{x\to a}f(x)=0$.

Gli infiniti, così come gli infinitesimi, possono essere confrontati. È di questo che andiamo ad occuparci.

2. Siano f(x) e g(x) due funzioni reali di variabile reale, entrambe infinite per $x\to a$. Poniamo l'attenzione sul seguente limite, dove a può essere un numero reale oppure $+\infty$ oppure $-\infty$:

(*) $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\,.$$

Si possono presentare diverse situazioni, a seconda che il limite sia un numero reale diverso da 0, oppure sia 0, oppure sia $\pm\infty$, oppure non esista.

- Se il limite è $\pm\infty$ si dice che, per $x\to a$, f(x) è **un infinito di ordine superiore** rispetto a g(x) oppure, in termini equivalenti, che g(x) è **un infinito di ordine inferiore** rispetto ad f(x).
  Questo significa che, per $x\to a$, f(x) tende ad infinito più rapidamente di g(x) oppure che g(x) tende ad infinito meno rapidamente di f(x).
  ESEMPIO. Le funzioni e^x ed x sono entrambe degli infiniti positivi per $x\to+\infty$. Ha senso confrontare i due infiniti. Consideriamo al riguardo la funzione e^x/x : è una f. i. di tipo ∞/∞ per $x\to+\infty$. Si dimostra tuttavia (Cfr.: unità 67, n. 67.2) che essa tende a $+\infty$ per $x\to+\infty$. Ragion per cui, per $x\to+\infty$, la funzione e^x è un infinito di ordine superiore rispetto ad x.
- Se $f(x)/g(x)\to0$ allora $g(x)/f(x)\to\pm\infty$, per cui, per $x\to a$, g(x) è un infinito di ordine superiore rispetto ad f(x), che, ovviamente, è un infinito di ordine inferiore rispetto a g(x).
  ESEMPIO. Le funzioni $\ln x$ ed x sono entrambe degli infiniti positivi per $x\to+\infty$. Ha senso confrontare i due infiniti. Consideriamo al riguardo la funzione $\ln x/x$: è una f. i. di tipo ∞/∞ per $x\to+\infty$. Si dimostra tuttavia (Cfr.: unità 67, n. 67.2) che essa tende a 0 per $x\to+\infty$. Ragion per cui, per $x\to+\infty$, la funzione $\ln x$ è un infinito di ordine inferiore rispetto ad x.
- Se il limite (*) è un numero reale non nullo si dice che f(x) e g(x) sono **infiniti dello stesso ordine** per $x\to a$. Il che significa che, $x\to a$, f(x) e g(x) tendono ad infinito con la stessa velocità.
  ESEMPIO. Le funzioni $2x^2+x$ e $3x^2-x$ sono entrambe degli infiniti positivi per $x\to+\infty$. Ha senso confrontare i due infiniti. Consideriamo al riguardo la funzione $\frac{2x^2+x}{3x^2-x}$: è una f. i. di tipo ∞/∞. Si ha tuttavia:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+x}{3x^2-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{3-\frac{1}{x}}=\frac{2}{3}.$$

Ragion per cui, per $x\to+\infty$, le due funzioni prese in esame sono degli infiniti dello stesso ordine.

- Se il limite $(*)$ non esiste, **i due infiniti non sono confrontabili**.

  ESEMPIO. Le funzioni $x\sin x$ ed x sono entrambe degli infiniti per $x\to+\infty$. Ma siccome non esiste il limite di $x\sin x/x$, vale a dire di $\sin x$, per $x\to+\infty$, i due infiniti non sono confrontabili.

3. Il confronto fra due infinitesimi avviene più o meno allo stesso modo. Precisamente siano f(x) e g(x) due funzioni infinitesime per $x\to a$. Poniamo l'attenzione sul seguente limite, dove a può essere un numero reale oppure $+\infty$ oppure $-\infty$:

(**) $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\,.$$

Si possono presentare diverse situazioni, a seconda che il limite sia un numero reale diverso da 0, oppure sia 0, oppure sia $\pm\infty$, oppure non esista.

- Se il limite è 0 si dice che, per $x\to a$, f(x) è **un infinitesimo di ordine superiore** rispetto a g(x) oppure, in termini equivalenti, che g(x) è **un infinitesimo di ordine inferiore** rispetto ad f(x).

  Questo significa che, per $x\to a$, f(x) tende a 0 più rapidamente di g(x) oppure che g(x) tende a 0 meno rapidamente di f(x).

  ESEMPIO. Le funzioni x e $\sqrt{x}$ sono entrambe degli infinitesimi per $x\to0$. Ha senso confrontare i due infinitesimi. Consideriamo al riguardo la funzione $x/\sqrt{x}$: è una f. i. di tipo $0/0$ per $x\to0^+$. Si ha tuttavia:

  $$\lim_{x\to0^+}\frac{x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to0^+}\sqrt{x}=0\,.$$

  Ragion per cui, per $x\to0^+$, la funzione x è un infinitesimo di ordine superiore rispetto ad $\sqrt{x}$.

- Se $f(x)/g(x)\to\pm\infty$ allora $g(x)/f(x)\to0$, per cui, per $x\to a$, g(x) è un infinitesimo di ordine superiore rispetto ad f(x), che, ovviamente, è un infinitesimo di ordine inferiore rispetto a g(x).

  ESEMPIO. Le funzioni e^x-1 e $\cos x-1$ sono entrambe degli infinitesimi per $x\to0$. Ha senso confrontare i due infinitesimi. Consideriamo al riguardo la funzione $\frac{e^x-1}{\cos x-1}$: è una f. i. di tipo $0/0$ per $x\to0$. Si dimostra tuttavia (Cfr.: unità 67, n. 67.2) che essa tende a $\pm\infty$ per $x\to0$. Ragion per cui, per $x\to0$, la funzione e^x-1 è un infinitesimo di ordine inferiore rispetto a $\cos x-1$.

- Se il limite $(**)$ è un numero reale non nullo si dice che f(x) e g(x) sono **infinitesimi dello stesso ordine** per $x\to a$. Il che significa che, $x\to a$, f(x) e g(x) tendono a 0 con la stessa velocità.

  ESEMPIO. Le funzioni $\ln(x+1)$ ed x sono entrambe degli infinitesimi per $x\to0$. Ha senso confrontare i due infinitesimi. Consideriamo al riguardo la funzione $\ln(x+1)/x$: è una f. i. di tipo $0/0$ per $x\to0$. Si dimostra tuttavia (Cfr.: unità 67, n. 67.2) che essa tende ad 1 per $x\to0$.

  Ragion per cui, per $x\to0$, le due funzioni prese in esame sono degli infinitesimi dello stesso ordine.

- Se il limite $(**)$ non esiste, **i due infinitesimi non sono confrontabili**.

  ESEMPIO. Le funzioni $x\sin(1/x)$ ed x sono entrambe degli infinitesimi per $x\to0$. Ma siccome non esiste il limite di $x\sin(1/x)/x$, vale a dire di $\sin(1/x)$, per $x\to0$, i due infiniti non sono confrontabili.

4. L'argomento potrebbe essere ulteriormente approfondito. In particolare, potrebbe essere precisato ulteriormente il concetto di ***ordine*** di un infinito o di un infinitesimo. Ma per tutto questo rimandiamo ad eventuali studi universitari.