Prerequisiti:
- Risoluzione di disequazioni
- Calcolo algebrico
- Limiti di funzioni e loro proprietà

Questa unità, fatto salvo il diverso livello di approfondimento, riguarda tutte le scuole superiori: gli Istituti Tecnici e gli Istituti Professionali ne affronteranno lo studio nel 2° biennio, i Licei nella 5ª classe.

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:

- *fornire la definizione di funzione continua in un punto e in un intervallo*
- *calcolare limiti in caso di semplici forme indeterminate dei vari tipi e verificarne l'esattezza ricorrendo ad un idoneo software matematico*
- *fornire esempi di funzioni continue e non continue, tratte anche dalla fisica*

Continuità
Unità 65

65.1 FUNZIONI CONTINUE

65.1.1 Abbiamo precisato che il limite di una funzione f(x) in un punto "a" prescinde dal valore della funzione in a, che può esistere ma essere diverso dal limite e può anche non esistere. Può accadere, tuttavia, che per una funzione f(x) si verifichino contemporaneamente questi fatti:

1) f(x) è definita in un punto a: sia f(a) il suo valore;
2) esiste il limite di f(x) per x che tende ad a;
3) questo limite ed f(a) coincidono.

Questi tre fatti si riassumono nella seguente relazione:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Quando questo accade si dice che f(x) è **funzione continua nel punto a**.

Osserviamo che la formula precedente, la quale esprime la continuità di f(x) in a, può essere scritta indifferentemente anche in uno dei modi seguenti:

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)-f(a)\big)=0,\qquad \lim_{h\to 0} f(a+h)=f(a),\qquad \lim_{h\to 0}\big(f(a+h)-f(a)\big)=0.$$

Lasciamo a te la giustificazione di ciò.

- ESEMPIO 1. Considerata la funzione:

$$f_1(x)=x+1,$$

si trova facilmente che:

$$f_1(1)=2,\quad \lim_{x\to 1} f_1(x)=2.$$

Sicché la funzione è continua nel punto 1 (Fig. 1).

- ESEMPIO 2. Considerata la funzione:

$$f_2(x)=\begin{cases} x+1 \text{ per } x\neq 1 \\ 1 \text{ per } x=1 \end{cases}$$

si trova facilmente che:

$$f_2(1)=1,\quad \lim_{x\to 1} f_2(x)=2.$$

Pertanto la funzione non è continua nel punto 1 (Fig. 2).

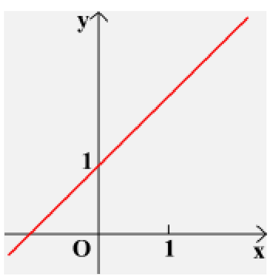

FIG.1

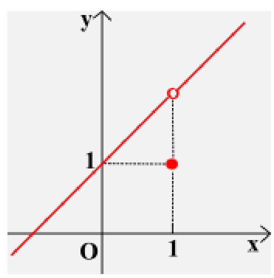

FIG.2

Si capisce che se una funzione f(x) è definita in un intervallo del tipo [α,β] ed il punto in cui si vuole stabilire la continuità è uno degli estremi dell'intervallo, **la continuità ha senso solamente a destra di α ed a sinistra di β**. Ad esempio, la funzione $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, definita nell'intervallo [−1,1], è continua a destra di −1 ed a sinistra di 1.

Una funzione f(x) continua in un punto a esprime il fatto che ad un incremento "molto piccolo" dato ad x nell'intorno di a, corrisponde un incremento "molto piccolo" di f(x) nell'intorno di f(a).

I grafici delle due funzioni precedenti mostrano chiaramente quanto detto. Il che è forse evidenziato meglio da due controesempi: quello delle funzioni:

$$y=\frac{|x|}{x}\ ,\quad y=\frac{1}{x}\ ,$$

che sei invitato a rappresentare graficamente: nessuna di esse è continua in 0, dove i due grafici presentano un "salto".

65.1.2 Se una funzione f(x) è continua in ogni punto di un intervallo J allora si dice che f(x) è una **funzione continua nell'intervallo J**. Questo significa, in ultima analisi, che per ogni $a\in J$ risulta:

$$\lim_{x\to a} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}).$$

Quando si parla di *funzione continua*, senza specificare altro, s'intende *una funzione continua nel proprio dominio*.
Tenendo allora presente quanto si è appreso sulla teoria dei limiti, possiamo concludere che risultano continue (nei rispettivi domini) le seguenti funzioni:
- ogni polinomio P(x) nell'indeterminata x (con coefficienti reali);
- le funzioni goniometriche $\sin x$ e $\cos x$;
- la funzione esponenziale a^x e la funzione logaritmica $\log_b x$, con b reale positivo è diverso da 1.

Inoltre, posto che siano continue le funzioni f(x) e g(x), risultano continue anche: $f(x)\pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $f(x)/g(x)$, esclusi, ma solo per l'ultima funzione, i valori x in cui g(x)=0, nei quali la funzione non è continua.

Per esempio, considerate le funzioni x^2+1 ed x, continue in tutto ℝ, sono continue in tutto ℝ anche:

$$(x^2+1)\pm x,\quad (x^2+1)x,\quad \frac{x^2+1}{x},$$

escluso, ma solo per l'ultima funzione, il punto x=0 in cui essa non è continua.

65.1.3 Le funzioni continue godono di un'importante proprietà:

Se una funzione f(x) è continua in a è possibile scambiare tra di loro gli operatori "f " e " $\lim_{x\to a}$".

Cioè:

$$\lim_{x\to a} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}\left(\lim_{x\to a} \mathbf{x}\right).$$

La spiegazione è immediata ove si tengano presenti la definizione di funzione continua in un punto e la continuità di x in tutto ℝ. Di fatto: $\lim_{x\to a} f(x) = f(a) = f\left(\lim_{x\to a} x\right)$.

Ancora più importanti di questa proprietà sono alcune sue generalizzazioni che ci torneranno utili nel prosieguo del programma:

Considerata una funzione f(x) continua (e se occorre positiva) in un intervallo J e preso un punto $c\in J$:

$$\lim_{x\to c}[f(x)]^\alpha = \left[\lim_{x\to c} f(x)\right]^\alpha\ ;\quad \lim_{x\to c} e^{f(x)} = e^{\lim_{x\to c} f(x)}\ ;\quad \lim_{x\to c} \log_b f(x) = \log_b \lim_{x\to c} f(x)\ ;\quad \text{ecc.}$$

La dimostrazione di queste relazioni è la stessa in tutti i casi. Basta porre y=f(x) e rifarsi alla proprietà precedente dopo aver constatato che $y\to f(c)$ per $x\to c$ e che le funzioni considerate sono continue.
A titolo di esempio:

$$\lim_{x\to c}[f(x)]^{\alpha}=\lim_{y\to f(c)}y^{\alpha}=\left[\lim_{y\to f(c)}y\right]^{\alpha}=[f(c)]^{\alpha}=\left[\lim_{x\to c}f(x)\right]^{\alpha}.$$

Le formule precedenti continuano a valere se $c=+\infty$ o $c=-\infty$ (ovviamente quando ciò è possibile) e anche quando, per x che tende a c, f(x) tende a più o meno infinito. Tralasciamo la dimostrazione.

Vogliamo invece far vedere come, utilizzando questa proprietà, si possano calcolare alcuni limiti importanti, collegati al numero "e".

- Esempio 1. Calcolare $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}$.

Si ha: $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{2}=\left[\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{2}=e^{2}$.

- Esempio 2. Calcolare $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x}$.

Posto $2x=t$ ossia $x=t/2$ e constatato che $t\to\pm\infty$ per $x\to\pm\infty$, risulta:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x}=\lim_{t\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{\frac{t}{2}}=\left[\lim_{t\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}\,.$$

Similmente si procede nei seguenti casi analoghi, che proponiamo per esercizio.

Calcolare i limiti delle seguenti funzioni per $x\to\pm\infty$:

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x};\quad\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1};\quad\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x};\quad\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{x}.$$

65.1.4 Ci soffermiamo brevemente su una questione di matematica finanziaria per mostrare un'interessante applicazione di quanto testé spiegato.

È noto che, se una somma C è investita, in regime di capitalizzazione composta, al tasso annuo i, il suo montante M dopo t anni è:

$$M=C(1+i)^{t}.$$

Se però la capitalizzazione avviene k volte all'anno ma il tasso i è sempre annuo, dopo t anni il montante è:

$$M=C\left(1+\frac{i}{k}\right)^{k\,t}.$$

Supponiamo ora che la capitalizzazione avvenga istante per istante, in modo continuativo. Ciò significa che il numero delle volte in cui, in un anno, avviene la capitalizzazione è infinito, vale a dire $k\to+\infty$. Per cui il montante di un capitale C impiegato in questo modo, sempre al tasso annuo i, è:

$$M=\lim_{k\to+\infty}C\left(1+\frac{i}{k}\right)^{k\,t}.$$

Posto ora $k=ix$ e tenendo presente che C è costante rispetto a k e quindi rispetto a x, e che $x\to+\infty$ quando $k\to+\infty$, si ha:

$$M=\lim_{k\to+\infty}C\left(1+\frac{i}{k}\right)^{k\,t}=C\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x\,i\,t}=C\left[\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{i\,t}=C\,e^{i\,t}.$$

In conclusione, il montante M di un capitale C, investito in regime di capitalizzazione composta e continua al tasso annuo i, dopo t anni è:

$$M=C\,e^{i\,t},$$

dove "e" è la costante di Nepero.

65.2 FORME INDETERMINATE: UN PRIMO APPROCCIO

65.2.1 Trattando dei limiti abbiamo incontrato alcune forme indeterminate e precisamente quelle dei seguenti tipi:

$$\frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty},\quad 0\cdot\infty,\quad \infty-\infty.$$

A volte bisogna ricorrere a considerazioni sofisticate per eliminare la causa dell'indeterminazione ed ottenere informazioni sul limite: ce ne occuperemo più avanti. Altre volte, invece, bastano degli artifici, più o meno semplici. Di ciò ci occupiamo subito, senza la pretesa di esaurire tutta la casistica possibile, ma con lo scopo di fornirti una discreta gamma di esempi.

65.2.2 Esempi.

- Esercizio 1. Calcolare $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+x}{x^2}$.

Risoluzione. Chiaramente per $x\to 0$ la funzione $\dfrac{x^3+x}{x^2}$ è una forma indeterminata di tipo $\dfrac{0}{0}$.

Tuttavia si trova subito che:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(x+\frac{1}{x}\right).$$

Di modo che: $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^3+x}{x^2}=+\infty,\quad \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^3+x}{x^2}=-\infty.$

La funzione non ammette limite nel punto 0.

- Esercizio 2. Calcolare $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$.

Risoluzione. Per $x\to 2$ la funzione $\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$ è una forma indeterminata di tipo $\dfrac{0}{0}$.

Tuttavia, siccome per $x\neq 2$ si ha:

$$\frac{x^3-8}{x^2-4}=\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)}=\frac{x^2+2x+4}{x+2},$$

allora risulta: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x+4}{x+2}=\dfrac{4+4+4}{4}=3.$

- Esercizio 3. Calcolare $\lim\limits_{x\to -\infty}(x^3+x^2)$.

Risoluzione. Per $x\to-\infty$ la funzione x^3+x^2 è una forma indeterminata di tipo $\infty-\infty$.

Si trova subito che:

$$\lim_{x\to-\infty}(x^3+x^2)=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(1+\frac{1}{x}\right)=-\infty.$$

♦ AVVERTENZA. Il procedimento seguito in quest'esercizio 3 si estende al calcolo del limite di un qualunque polinomio $P(x)$ per $x\to-\infty$ e per $x\to+\infty$.
In ogni caso si trova che $P(x)$ tende a $-\infty$ oppure a $+\infty$, a seconda delle situazioni.

- Esercizio 4. Calcolare $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3+2}{x^2}$.

Risoluzione. Per $x\to+\infty$ la funzione $\dfrac{x^3+2}{x^2}$ è una forma indeterminata di tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Tuttavia si trova subito che:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+2}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{2}{x^2}\right)=+\infty.$$

- Esercizio 5. Calcolare $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-3x+2}{2x^2+1}$.

Risoluzione. Per $x\to-\infty$ la funzione $\frac{x^3-3x+2}{2x^2+1}$ è una forma indeterminata di tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

L'artificio che elimina la causa dell'indeterminazione consiste nel dividere numeratore e denominatore della frazione per x^2. Sicché si ha:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-3x+2}{2x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{2+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}.$$

- Esercizio 6. Calcolare $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{x^2+1}$.

Risoluzione. Per $x\to\pm\infty$ la funzione $\frac{2x}{x^2+1}$ è una forma indeterminata di tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Come sopra, l'artificio che elimina la causa dell'indeterminazione consiste nel dividere numeratore e denominatore della frazione per x^2. Si ha allora:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{x^2+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}=0.$$

♦ IMPORTANTE. Il procedimento seguito nei precedenti esercizi 4, 5, 6 si estende al calcolo del limite del rapporto $A(x)/B(x)$ di due qualsiasi polinomi per $x\to+\infty$ e per $x\to-\infty$. Vale precisamente la seguente regola che farai bene a memorizzare.

♦ REGOLA: **Indicati con $A(x)$ e $B(x)$ due polinomi in x di gradi g_A e g_B rispettivamente, il limite del rapporto $A(x)/B(x)$ per $x\to+\infty$ e per $x\to-\infty$ è:**

- **0 se $g_A<g_B$;**
- **uguale al rapporto dei coefficienti dei termini di grado maggiore se $g_A=g_B$;**
- **$+\infty$ o $-\infty$, a seconda dei casi, se $g_A>g_B$.**

Ragion per cui, senza tanti fronzoli, si ha ad esempio:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+1}{x^3}=0;\quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^3+1}{3x^3-x^2}=\frac{2}{3};\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+1}{x^2}=+\infty;\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+1}{x^2}=-\infty$$

- Esercizio 7. Dimostrare che:

$$\mathbf{\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1.}$$

DIMOSTRAZIONE. Per $x\to0$ la funzione $\frac{\sin x}{x}$ è una forma indeterminata di tipo $\frac{0}{0}$. Per eliminare la causa dell'indeterminazione è necessario un procedimento particolare. A questo riguardo, con riferimento alla circonferenza trigonometrica (Fig. 3), consideriamo un qualsiasi angolo $A\hat{O}P$ del primo quadrante, di x radianti $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$.

Risulta:

$$\text{area triangolo OAP} < \text{area settore circolare OAP} < \text{area triangolo OAT},$$

da cui, tenendo presente che $\overline{OA}=1$, segue: $\overline{AP}<\text{arco}AP<\overline{AT}$. D'altro canto: HP<AP e perciò: $\overline{HP}<\text{arco}AP<\overline{AT}$, ossia: $\sin x<x<\tan x$. Da qui, dividendo per $\sin x$ $\left(\sin x>0 \text{ per } 0<x<\frac{\pi}{2}\right)$ segue:

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x} \text{ o anche: } \cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$

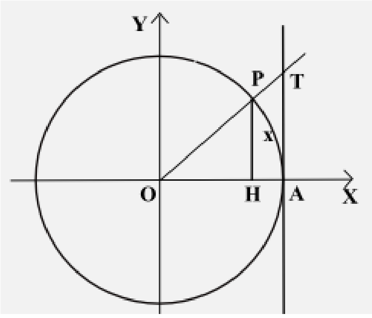

FIG. 3

Siccome, per $x\to 0^+$, sia $\cos x$ sia 1 tendono al limite 1, per il teorema di confronto possiamo concludere che anche $\frac{\sin x}{x}$ tende al limite 1.

Inoltre, posto $z=-x$ e constatato che $z\to 0^+$ per $x\to 0^-$, risulta:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}=\lim_{z\to 0^+}\frac{\sin(-z)}{-z}=\lim_{z\to 0^+}\frac{\sin z}{z}=1.$$

In definitiva, come si doveva dimostrare:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

- Esercizio 8. Calcolare $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$.

Risoluzione. Per $x\to 0$ la funzione $\frac{\tan x}{x}$ è una forma indeterminata di tipo $\frac{0}{0}$. Si trova:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=1.$$

65.3 PUNTI DI DISCONTINUITÀ

65.3.1 Sia f(x) una funzione reale di variabile reale, definita in un insieme J. Può accadere che a quest'insieme appartenga un ***punto isolato*** "a". In questo punto la definizione di "funzione continua" cade in difetto giacché non si può calcolare il limite della funzione in esso. Ebbene, si assume per convenzione che la funzione f(x) sia continua in a. Vale a dire:

Ogni punto isolato appartenente al dominio di una funzione
si assume per convenzione come punto di continuità della funzione.

Per esempio, la funzione:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} \text{ se } x\geq 0\\ 1 \text{ se } x=-1\end{cases}$$

non solo è continua per $x\geq 0$ (per $x=0$ ovviamente solo a destra), ma anche il punto $x=-1$ è per essa un punto di continuità.

In realtà la continuità nei punti isolati è priva di interesse ai fini pratici. Ed è per questo che, con rife-

rimento alle successioni, costituite solo ed esclusivamente da punti isolati, non si parla di "successioni continue".
Ciò premesso, ogni punto a, che non sia punto di continuità di una funzione, ma che sia un punto di accumulazione del suo dominio, si chiama **punto di discontinuità** della funzione. Si dice pure che la funzione **presenta una discontinuità** (o che **è discontinua**) nel punto a.

NOTA BENE. Alcuni analisti non condividono questa definizione, sostenendo che per parlare di funzione discontinua in un punto bisogna che anzitutto la funzione sia definita in esso. Se la funzione non è definita nel punto, sostengono, non ha alcun senso porsi il problema della sua discontinuità in esso. In altri termini, la definizione corretta di "funzione discontinua" sarebbe la seguente:

Una funzione si dice discontinua in un punto a
se in a *è definita e, qualora vi ammetta limite,*
questo è diverso dal valore della funzione.

65.3.2 I punti di discontinuità possono essere di due tipi: *eliminabili* e *non eliminabili*.

- Affinché un punto a di discontinuità di una funzione f(x) sia **eliminabile** è indispensabile che esista finito il limite di f(x) per $x \to a$. In tal caso, chiamato *l* questo limite, si pone $f(x)=l$:
  - sia nel caso in cui f(a) esiste, ma ovviamente è diverso da *l*: si parla di ***ridefinizione della funzione*** in a; da alcuni questo punto di discontinuità è detto ***artificiale***;
  - sia nel caso in cui f(a) non esiste: si parla di ***prolungamento*** (o ***estensione***) ***del dominio della funzione per continuità*** in a.

  Per esempio, con riferimento alla funzione (rivedere Fig. 1):

$$f_2(x)=\begin{cases} x+1 \text{ se } x\neq 1 \\ 1 \text{ se } x=1 \end{cases}$$

siccome $f_2(x)\to 2$ per $x\to 1$, il punto 1 di discontinuità è eliminabile: basta ridefinire la funzione in 1 assegnandole il valore 2 al posto del valore 1, dato per definizione.
Discorso simile per la funzione (Fig. 4):

$$f_3(x) = \frac{x^2-1}{x-1};$$

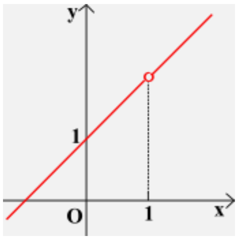

FIG. 4

siccome $f_3(x)\to 2$ per $x\to 1$, il punto 1 di discontinuità è eliminabile: basta ampliare il dominio della funzione, che è $\mathbb{R}-\{1\}$, ammettendo che proprio nel punto 1 essa abbia valore 2.
Facciamo notare che la funzione $f_2(x)$ e la funzione $f_3(x)$, una volta eliminata la discontinuità, finiscono per identificarsi con la funzione: $f_1(x)=x+1$.
Allo stesso modo, quando il punto di discontinuità di f(x) è un estremo dell'intervallo di definizione, se in tale punto esiste il limite della funzione (destro o sinistro, a seconda dei casi) ma è diverso dal valore della funzione nel punto o questo valore addirittura non esiste, allora la discontinuità può

essere eliminata con una ridefinizione della funzione nel punto o con un prolungamento del suo dominio.

Per esempio, la funzione

$$f(x) = e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}},$$

definita per $x>0$, presenta una discontinuità a destra, nel punto 0. Siccome però risulta:

$$\lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}} = 0\,,$$

è possibile eliminare tale discontinuità: basta prolungare il dominio della funzione ponendo $f(0)=0$.

- Se nel punto a, che non sia un estremo dell'intervallo di definizione della funzione, la funzione f(x) non ammette limite finito, il punto a è un punto di discontinuità **non eliminabile**.

  Per esempio, è un punto di discontinuità non eliminabile il punto 0 per le seguenti funzioni:

  (1) funzione $f(x)=x+\frac{|x|}{x}$: i limiti destro e sinistro sono finiti ma sono disuguali;

  (2) funzione $f(x)=\frac{1}{x^2}$: entrambi i limiti, destro e sinistro, sono infiniti;

  (3) funzione $f(x)=e^{1/x}$: il limite sinistro è finito, quello destro è infinito.

  (4) funzioni $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ e $g(x)=\cos\frac{1}{x}$: non esistono né il limite destro né il limite sinistro.

  Di queste funzioni calcola, quando esistono, i limiti destro e sinistro nel punto 0. Prova pure a rappresentarle, utilizzando, se del caso, un software matematico.

Per esercizi più significativi, ma anche più complessi, sulla classificazione dei punti di discontinuità ritorneremo nell'unità 67, n. 67.2.6. Per il momento ti proponiamo alcune situazioni abbastanza semplici.

ESERCIZIO. Studiare i punti di discontinuità delle seguenti funzioni, stabilendo in particolare se si tratta di punti di discontinuità eliminabili o non eliminabili:

a) $f(x)=\frac{\cos x}{x^2}$; b) $f(x)=\frac{x^3-1}{x-1}$; c) $f(x)=\frac{|x-1|}{x-1}$; d) $f(x)=\frac{\sin x}{x}$; e) $f(x)=x+\cos\frac{1}{x}$.

AVVERTENZE.

- I matematici concordano nel denominare ***punto di discontinuità (non eliminabile) di 1ª specie*** o ***punto di discontinuità ordinaria*** un punto nel quale esistono e sono finiti il limite destro ed il limite sinistro della funzione ma sono disuguali: vedi precedente esempio (1). Concordano pure nel dire che ***la funzione presenta nel punto un salto finito*** e che la discontinuità è ***finita***.
- I matematici concordano altresì nel chiamare ***punto di discontinuità di 3ª specie*** un punto di discontinuità eliminabile.
- Vi sono diversità di vedute sulle ***discontinuità di 2ª specie***.

  I più chiamano *punto di discontinuità di 2ª specie* un punto di discontinuità non eliminabile che non sia di 1ª specie: vedi precedenti esempi (2), (3), (4).

  Ma ve ne sono alcuni secondo i quali un punto di discontinuità in cui almeno uno dei due limiti, destro o sinistro, sia infinito, mentre l'altro può essere finito o infinito, è ancora un *punto di discontinuità di 1ª specie*, che chiamano discontinuità *infinita* per distinguerla da quella finita: vedi precedenti esempi (2) e (3). Per costoro un *punto di discontinuità di 2ª specie* è un punto di discontinuità (non eliminabile) tale che, pur essendo definita la funzione in ogni intorno destro e in ogni intorno sinistro del punto, non esiste alcuno dei limiti destro o sinistro. È una situazione che si presenta raramente ma può capitare: vedi precedente esempio (4).

- Ci corre l'obbligo di precisare, ad ogni buon conto, che noi ci limiteremo a distinguere i punti di discontinuità eliminabili da quelli non eliminabili, senza occuparci delle varie classificazioni.
- Le funzioni discontinue di cui ci stiamo occupando sono funzioni che hanno un numero finito di punti di discontinuità in un determinato intervallo reale [a,b]. Esistono tuttavia funzioni discontinue che hanno un numero infinito di punti di discontinuità in un dato intervallo reale [a,b]. Ma di queste funzioni non avremo modo di occuparci. Presentiamo qui, nondimeno, un esempio di tali funzioni, la cosiddetta *funzione di Dirichlet*:

$$f(x)=\begin{cases}1 \ \text{ per } \ x\in\mathbb{Q}\\ 0 \ \text{ per } \ x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$$

Si tratta di una funzione definita su tutto l'asse reale ma discontinua in ogni suo punto.

65.3.3 Le funzioni che presentano qualche discontinuità in un intervallo di continuità non sono soltanto interessanti da un punto di vista teorico, ma rappresentano anche situazioni che si incontrano in natura.

♦ ESEMPIO [1] 1. È noto dalla Fisica che, se ad 1 kg di acqua (o meglio di ghiaccio) a -10°C ed alla pressione ordinaria (1 atmosfera) viene somministrata costantemente la stessa quantità di calore, la temperatura T del ghiaccio aumenta proporzionalmente alla quantità Q di calore assorbito fino a 0°C, dove si mantiene costante finché tutto il ghiaccio non sia fuso (cioè è diventato acqua), per aumentare di nuovo proporzionalmente a Q, mettiamo fino a 10°C.
Quando il ghiaccio si riscalda fino a 0°C, la legge che esprime Q in funzione di T è la seguente:

$$Q=mc(T+10),$$

dove m è la massa di ghiaccio (nel caso specifico: m=1 kg) e c è il suo calore specifico (nel nostro caso: $c=0{,}5\,\frac{\text{kcal}}{°\text{C}\cdot\text{kg}}$) e dove si è supposto che a -10°C il ghiaccio non avesse assorbito ancora alcuna quantità di calore. Per cui si ha:

$$Q=0{,}5\,T+5 \ \text{ per } -10\le T<0\ .$$

Durante la fusione del ghiaccio, T si mantiene costantemente uguale a 0°C, mentre si ha:

$$Q=m\,c_f+Q_0',$$

dove $c_f=80\,\frac{\text{kcal}}{\text{kg}}$ è il calore di fusione del ghiaccio e $Q_0'=5$ kcal è la quantità di calore già assorbita. Per cui si ha: Q=85 kcal per T=0.
Dopo che tutto il ghiaccio è fuso, la temperatura del corpo (che adesso è allo stato liquido) riprende a salire con questa legge:

$$Q=mcT+Q_0'',$$

dove ora il calore specifico dell'acqua è $c=1\,\frac{\text{kcal}}{°\text{C}\cdot\text{kg}}$ e $Q_0''=85$ kcal è la quantità di calore già assorbita. Per cui:

$$Q=T+85\ (\text{kcal}) \ \text{ per } \ 0<T\le 10.$$

In sintesi, Q, espresso in kcal, varia in funzione di T, espresso in °C, in base alla seguente legge:

$$Q=\begin{cases}0{,}5\,T+5 \ \text{ per } -10\le T<0\\ T+85 \ \text{ per } \ 0\le T\le 10\end{cases}$$

Si tratta di una funzione definita a tratti, continua nell'intervallo di temperatura $[-10,10]$ tranne che nel punto T=0 dove evidentemente presenta una discontinuità non eliminabile (Fig. 5).

[1] È tratto da Aleksandrov-Kolmogorov-Laurent'ev, *Le Matematiche*, Torino, Universale scientifica Boringhieri, Ristampa 1977, pag. 91.

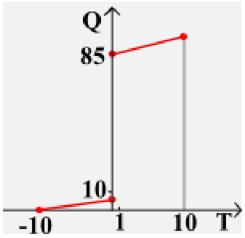

FIG. 5

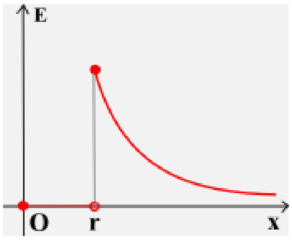

FIG. 6

♦ ESEMPIO 2. L'intensità E del campo elettrico generato da una sfera metallica di raggio r, sulla quale sia distribuita (ovviamente in maniera uniforme e solo sulla superficie) una carica elettrica, calcolato in un determinato punto P varia in funzione della distanza x del punto dal centro della sfera. Precisamente esso è 0 fintantoché il punto P è situato all'interno della sfera e diventa k/x^2 quando P si trova sulla superficie sferica o all'esterno, essendo k una costante che dipende dal mezzo in cui è posta la sfera oltre che dalla quantità di carica elettrica distribuita sulla sua superficie. Per cui E varia in funzione di x secondo la seguente legge:

$$E=\begin{cases} 0 \ \text{ per } \ 0\le x<r \\ \dfrac{k}{x^2} \ \text{ per } \ x\ge r \end{cases}$$

Anche adesso abbiamo una funzione definita a tratti, continua per x≥0 tranne che nel punto x=r, dove presenta una discontinuità non eliminabile (Fig. 6).

VERIFICHE

Utilizzando le proprietà delle funzioni continue, calcolare i seguenti limiti (nn. 1-10):

1. $\lim_{x\to1^+}\sqrt{x^2-1}$.

2. $\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x+2}}{x-1}$.

3. $\lim_{x\to1^-}\frac{e^x-1}{x-1}$.

4. $\lim_{x\to0}\ln(x^2-3x+2)$.

5. $\lim_{x\to2^+}\ln(x^2-3x+2)$.

6. $\lim_{x\to4^+}\ln\left(\sqrt{x}-1\right)$.

7. $\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^x$. $\left[\mathbf{R.}\ \text{Si osservi che si ha } \frac{x+1}{x+2}=1-\frac{1}{x+2} \text{ per cui } \dots \frac{1}{e}\right]$

8. $\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^x$. $\left[\mathbf{R.}\ \text{Si osservi che si ha: } \frac{x+2}{x+1}=1+\frac{1}{x+1} \text{ per cui } \dots\ e\right]$

9. $\lim_{x\to0}(1-x)^{\frac{1}{2x}}$. $\left[\mathbf{R.}\ \text{Conviene porre } x=-\frac{1}{z} \text{ per cui } \dots \frac{1}{\sqrt{e}}\right]$

10. $\lim_{x\to0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$. $\left[\mathbf{R.}\ \text{Conviene porre } x=-\frac{1}{2z} \text{ per cui } \dots \frac{1}{e^2}\right]$

Forme indeterminate. Calcolare i seguenti limiti (nn. 11-31):

11. $\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x^2-1}$. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{3}{2}\right]$

13. $\lim_{x\to2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$. $[\mathbf{R.}\ 0]$

12. $\lim_{x\to-1}\frac{x^3+1}{x^2-1}$. $\left[\mathbf{R.}\ -\frac{3}{2}\right]$

14. $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}$. $[\mathbf{R.}\ +\infty \text{ per } x\to1^+, \dots]$

15. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x^2-1}$. [**R.** 0]

16. $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-2x}{x^2+2}$. [**R.** 1]

17. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x-1}$. [**R.** $+\infty$]

18. $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{x-1}$. [**R.** $-\infty$]

19. $\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$. [**R.** 0]

20. $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$. [**R.** 0]

21. $\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x-1}\right)$. [**R.** $+\infty$]

22. $\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\sin x}$. [**R.** 2]

23. $\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$. [**R.** 2]

24. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}$. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{1}{2}\right]$

25. $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{2x}$. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{1}{2}\right]$

26. $\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}$. [**R.** 3]

27. $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{1}{2}\right]$

28. $\lim_{x\to0}\frac{\tan 2x}{x}$. [**R.** 2]

29. $\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}$. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{3}{2}\right]$

30. $\lim_{x\to\alpha}\frac{\sin x-\sin\alpha}{x-\alpha}$. [**R.** $\cos\alpha$]

31. $\lim_{x\to\alpha}\frac{\cos x-\cos\alpha}{x-\alpha}$. [**R.** $-\sin\alpha$]

Determinare se esistono e, in caso affermativo, quali sono i valori che bisogna assegnare alle seguenti funzioni f(x) affinché i loro punti di discontinuità siano eliminabili (nn. 32-37):

32. $f(x)=\frac{1}{x-1}$. [**R.** $x=1$ è un punto di discontinuità non eliminabile]

33. $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$. [**R.** $x=2$ è un punto di discontinuità eliminabile: bisogna porre $f(2)=4$]

34. $f(x)=\frac{x+1}{x^2-1}$. [**R.** $x=1$ è un punto di discontinuità non eliminabile; $x=-1$ è un punto di discontinuità eliminabile]

35. $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-x}{x} \text{ se } x\in\mathbb{R}_0\\ 0 \text{ se } x=0\end{cases}$. [**R.** $x=0$ è un punto di discontinuità eliminabile]

36. $f(x)=\frac{1-\cos x}{x}$. [**R.** $x=0$ è un punto di discontinuità eliminabile]

37. $f(x)=\frac{x^2}{|x|}+1$. [**R.** $x=0$ è un punto di discontinuità eliminabile]

Questioni varie:

38. Calcolare quale valore bisogna attribuire al parametro reale a affinché risulti:

a) $\lim_{x\to2}\frac{x^2-3a}{ax+1}=\frac{1}{2}$. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{7}{8}\right]$ b) $\lim_{x\to a}\frac{x+2}{x-2}=2$. [**R.** 6]

c) $\lim_{x\to-1}\frac{2x^2-(a+2)x+a}{x^2-(a+1)x+a}=\frac{3}{2}$. [**R.** 1] d) $\lim_{x\to-a}\frac{x^2-(a-1)x-a}{2x^2-ax-a^2}=\frac{1}{2}$. [**R.** 2]

39. Di ciascuno dei seguenti limiti dire se è vero o falso:

a) $\lim_{x\to0^+}e^{-x}=0$. b) $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{3x}=\frac{1}{3}$. c) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x}=1$.

d) $\lim\limits_{x\to 1}\ln|x-1|=-\infty$. e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{x-1}=+\infty$. f) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2}{(x-1)^2}=+\infty$.

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-\sin x}{x+\sin x}=\dfrac{1}{2}$. h) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x-\sin x}{x+\sin x}=2$. i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}=2$.

40. Studiare i punti di discontinuità delle seguenti funzioni, tenendo presente che, ove figuri, con la scrittura $E(\alpha)$ si indica la parte intera del numero reale α:

a) $f(x)=\sin x-E(\sin x)$, con $x\in[0,\pi]$. b) $f(x)=2^{1/x}$.

c) $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x}$. d) $f(x)=\dfrac{\tan x}{x}$, con $x\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$. e) $f(x)=E(x)$.

41. Tenendo presente che $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ ed inoltre che la funzione logaritmo è continua, dimostrare che si ha:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$. b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$.

[**R.** a) Posto $x=\dfrac{1}{z}$, … . b) Posto $e^x-1=z$, …]

42. Considerata l’equazione: $a\,x^2-3\,x-2=0$, dove a è un numero reale non nullo, calcolare i valori cui tendono le sue radici quando $a\to 0$. [**R.** Un valore è $-3/2$, l’altro è $+\infty$ se $a>0$ e $-\infty$ se $a<0$]

43. Considerata l’equazione: $a\,x^2+b\,x+c=0$, dove $a\in\mathbb{R}_0$ e $b,c\in\mathbb{R}_0^+$, calcolare i valori cui tendono le sue radici quando $a\to 0$. [**R.** Un valore è $-c/b$, l’altro è $+\infty$ se $a>0$ e $-\infty$ se $a<0$]

44. Si consideri la successione di termine generale:

$$a_n=\frac{f(n)}{3^n}$$

dove $f(n)=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}$.

a) Dimostrare che $f(n)=2^n$.

b) Determinare il più piccolo valore di n per cui risulta: $a_n<10^{-10}$.

c) Spiegare perché, se n è dispari, risulta:

$$f(n)=2\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{(n-1)/2}\right]$$

fornendo la dimostrazione di ogni eventuale formula cui si fa ricorso. Scrivere un’espressione equivalente di $f(n)$ quando n è pari.

d) Calcolare $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ e, ricorrendo alla definizione, verificare il limite così trovato.

e) Esiste $\lim\limits_{n\to 10^{10}}a_n$? Motivare esaurientemente la risposta.

[Tratto dall’esame di maturità scientifica, 2000, sessione ordinaria]

45. Sia $f(x)$ una funzione di variabile reale definita nel modo seguente:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{a}\sin 2x & \text{per } 0<x<\dfrac{\pi}{2}\\[2mm] \dfrac{1+a}{\sin x} & \text{per } -\dfrac{\pi}{2}<x<0\end{cases}$$

dove a è un parametro reale non nullo. Stabilire se esiste un valore di a per il quale il dominio della funzione possa essere prolungato anche nel punto $x=0$.

[Tratto dall’esame di maturità scientifica, 2002, sessione suppletiva]

46. Sapendo che:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{ax+2b}-6}{x} = 1$$

determinare i valori di *a* e *b*.

[Tratto dall'esame di Stato 2017, indirizzo scientifico, sessione ordinaria]

[**R.** Come prima condizione bisogna imporre che la funzione sia una f.i. del tipo $0/0$ per $x\to 0$, ragion per cui deve essere $\sqrt{2b}-6=0$. … $b=18$, $a=12$]

47. Sapendo che:

$$\lim_{x\to +\infty} \left(ax-\sqrt{x^2+b}\right) = 0$$

determinare i valori di *a* e *b*.

[**R.** a=1, b qualsiasi]

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE.

DOMANDE

1. È vero o è falso che la funzione $f(x)=|x^2-1|$ è continua su tutto l'asse reale?
2. È vero o è falso che la funzione $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x-1} \text{ per } x\le 0\\ 1 \text{ per } x>0\end{cases}$ è continua su tutto l'asse reale?
3. È vero o è falso che la funzione $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x+1} \text{ pe } x\le 0\\ 1 \text{ per } x>0\end{cases}$ è continua su tutto l'asse reale?
4. La funzione $f(x)=\frac{\sin 3x}{x}$ ha un punto di discontinuità per $x=0$. È vero che si tratta di una discontinuità eliminabile?
5. È vero che la funzione $f(x)=\frac{2x^2-1}{2x^2+1}$ tende ad 1 per $x\to\pm\infty$?
6. È vero che, se a è un punto isolato del dominio di una funzione, in ogni intorno di a non cadono punti del dominio della funzione, diversi da a?
7. È vero che o è falso che la funzione E(x), dove E(x) rappresenta la parte intera di x, è definita su tutto l'asse reale ma ha infiniti punti di discontinuità?

RISPOSTE

1. È vero.
2. È falso. Nel punto $x=0$ infatti essa non è continua, mentre lo è in ogni altro punto. Il punto $x=0$, inoltre, è un punto di discontinuità non eliminabile giacché in tale punto la funzione non ammette limite: ha il limite sinistro ($=-1$) ed ha il limite destro ($=1$) ma essi non sono uguali.
3. È falso. Nel punto $x=-1$ infatti non è continua, mentre lo è in ogni altro punto. Il punto $x=-1$ è tuttavia un punto di discontinuità eliminabile dal momento che $f(x)\to -2$ per $x\to -1$. Basta assumere, con un prolungamento della funzione, $f(-1)=-2$. La funzione acquista questa forma: $f(x)=\begin{cases}x-1 \text{ per } x\le 0\\ -1 \text{ per } x>0\end{cases}$ ed è continua su tutto l'asse reale.
4. Sì, è vero. Infatti la funzione ammette limite finito ($=3$) per $x\to 0$. Perciò nel punto 0 c'è una discontinuità eliminabile per estensione del dominio della funzione, ponendo per l'appunto $f(0)=3$.
5. Sì. Il calcolo è immediato: basta effettuare il rapporto dei coefficienti dei termini della frazione alge-

brica aventi il grado maggiore.

6. È falso. Esistono certamente infiniti intorni di a nei quali non cadono punti del dominio della funzione diversi da a, ma ce ne sono infiniti altri in cui cadono punti del dominio della funzione, a meno che il dominio della funzione non si riduca al solo punto a.

7. È vero. Infatti, nei punti x=z, dove z è un intero, essa è definita, ma non è continua dal momento che in ogni z il limite sinistro della funzione è $z-1$ mentre il limite destro è z.

LETTURA.

Discreto e continuo.

Il termine "continuo" oltre che in opposizione al termine "discontinuo" può mettersi in opposizione al termine "discreto".

L'opposizione discreto/continuo affonda le sue radici al tempo dei Greci. Anzi, proprio il voler considerare un segmento di retta come costituito da un numero finito di punti (oggi diremmo da un *insieme discreto*), magari "piccolissimi" ma comunque di dimensioni finite, portò i Pitagorici ad ammettere l'esistenza di segmenti "incommensurabili", cioè non esprimibili come multipli di uno stesso segmento, assunto come segmento unitario.

Qui non possiamo e non vogliamo fare un discorso completo ed esauriente su questa opposizione. Vogliamo solo evidenziarne qualche aspetto interessante, che sintetizza in qualche misura cose già dette in passato. Lo facciamo riprendendo la vecchia abitudine di rappresentare i numeri su una retta cartesiana e ripetendo a grandi linee il percorso che, dai numeri naturali, porta ai reali passando per gli interi ed i razionali.

Sia allora la retta r, sulla quale sono fissati due punti distinti: **O** (*origine*) ed **U** (*punto unità*).

- Si riporta sulla semiretta di origine O passante per U, il segmento OU n volte a partire da O (Fig. 7), essendo n un qualsiasi numero naturale: si ottiene il punto P, cui è perciò associato il numero naturale n. In questo modo, al variare di n, è rappresentato sulla retta r l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali.

  Questo insieme, considerato assieme alla relazione d'ordine "è minore" (simbolo "<"), è un modello di quello che si chiama uno **spazio ordinato *discreto***, anzi ne è il prototipo.

  In tale spazio vale la seguente proprietà:

  [1] $\forall n\in\mathbb{N}\ \exists n'\in\mathbb{N}$, con $n<n'$, tale che $(\overline{\exists x\in\mathbb{N}}$ tale che $n<x<n')$.

  Per esempio, qualunque sia il naturale n, basta prendere $n'=n+1$ e non esiste alcun naturale x tale che $n<x<n+1$. Detto in altre parole, questo significa che:

  ogni numero naturale ha uno ed un solo successore.

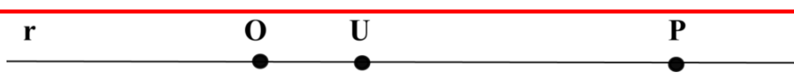

FIG. 7

- Se la retta r è riempita, oltre che con i punti immagine dei numeri naturali, anche con i loro simmetrici rispetto al punto O, si ottiene la rappresentazione dell'insieme $\mathbb{Z}$ degli interi.

  Pure quest'insieme, considerato con la relazione "<", è un modello di *spazio ordinato discreto*, che soddisfa ancora alla relazione [1], dove ovviamente al posto di $\mathbb{N}$ c'è $\mathbb{Z}$, per cui:

  ogni intero z ha uno e un solo successore.

- La retta r può essere ulteriormente riempita di punti, quelli che sono immagini dei numeri del tipo a/b, dove a, b sono numeri interi qualunque, primi fra loro [2], con $b>0$. Si ottiene così la rappresentazione dell'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali. Esso non gode più di una proprietà come la [1]. È noto infatti che fra due numeri razionali qualsiasi è possibile inserirne almeno un altro. Per esempio, qualunque siano i razionali p, q, con $p<q$, risulta $p<\frac{p+q}{2}<q$. Come si sa, in virtù di questo fatto, l'insieme $\mathbb{Q}$ si dice ***denso*** rispetto alla relazione "<". Detto in altro modo, questo significa che nessun elemento q di $\mathbb{Q}$ è un punto isolato ed infatti in ogni intorno di q cade almeno un elemento di $\mathbb{Q}$ diverso da q. Insomma l'insieme $\mathbb{Q}$ *non può essere considerato un insieme discreto*.
  Quantunque l'insieme dei numeri razionali, ordinato con la relazione "<", non sia un insieme discreto e sia invece denso, tuttavia la retta r, riempita dai punti immagine di tali numeri, presenta ancora "molti buchi"; vale a dire punti che non sono immagini di alcun numero razionale: basti pensare, ad esempio, a $\sqrt{2}$, π, e, $\log_2 3$, eccetera. Questo, detto in termini grossolani, implica che:
  il passaggio da un punto immagine di un razionale ad un punto immagine di un altro numero razionale avviene attraverso un'interruzione proprio a causa dei suddetti "buchi".
- Se i "buchi" della retta, su cui è rappresentato l'insieme dei razionali, sono riempiti con i numeri irrazionali, non solo la retta diventa la rappresentazione dell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, ma accade un fatto fondamentale:
  il passaggio da un punto immagine di un numero reale ad un punto
  immagine di un altro numero reale avviene senza interruzioni,
  passando cioè solo ed esclusivamente attraverso altri numeri reali,
  o come anche si dice, *senza soluzione di continuità*.
  L'insieme $\mathbb{R}$, preso sempre assieme alla relazione "<", è un modello di **spazio ordinato *continuo***, anzi ne è il prototipo.

In sintesi:
- l'insieme dei numeri naturali è discreto, così come l'insieme degli interi;
- l'insieme dei razionali non è discreto ma è denso (però non è continuo);
- l'insieme dei reali è denso e continuo.

Il matematico francese René Thom (1923-2002), celebre per la sua *teoria delle catastrofi*, scrisse per l'Enciclopedia Einaudi, vol. 15, pagg. 1133-1146, *L'aporia fondatrice delle matematiche*. Egli chiamò così l'opposizione discreto/continuo, specificando che tutta la matematica dovrebbe fondarsi proprio su tale opposizione, vale a dire sulle differenze, se non sulle contrapposizioni, che sussistono tra il continuo ed il discreto.

Bisogna aggiungere che la continuità è una caratteristica solamente di alcuni oggetti matematici (insiemi, funzioni, …), poiché nella realtà non esiste. Anche gli oggetti che ci sembrano continui e compatti sono, tutto sommato, pieni di "buchi" e perciò non sono continui. Basti pensare alla struttura fisico-chimica dei corpi. Forse solo il "tempo" si può ritenere continuo [3]. Tanto da indurre molti pensatori ad assimilare l'opposizione "discreto/continuo" a quella "spazio/tempo".

---

[2] Due numeri interi possiamo definirli *primi fra loro* se sono primi fra loro i loro valori assoluti.
[3] Diciamo "forse" poiché non manca chi si pone l'interrogativo se il tempo debba essere considerato "continuo" o "quantizzato". Cfr. al riguardo: Samuel Tolansky, *Introduzione alla fisica atomica*, volume secondo, Torino, Universale scientifica Boringhieri, 1966, pag. 432.