Prerequisiti:
- Calcolare limiti e derivate di semplici funzioni.
- Risolvere equazioni, disequazioni e sistemi di equazioni.

Questa unità è rivolta a tutte le scuole superiori. Gli Istituti Tecnici e gli Istituti Professionali ne affronteranno lo studio nel 2° biennio, i Licei nella 5ª classe.

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:

- *determinare gli estremi assoluti di una funzione assegnata e i valori estremanti col metodo delle derivate*
- *trovare gli estremi assoluti di una funzione per via elementare*
- *determinare gli zeri approssimati di semplici funzioni mediante il metodo delle tangenti*

Estremi assoluti di una funzione

Unità 69

69.1 RICERCA DEGLI ESTREMI ASSOLUTI DI UNA FUNZIONE

69.1.1 Nella precedente unità abbiamo fornito le definizioni di **massimo assoluto** e **minimo assoluto** (detti cumulativamente **estremi assoluti**) di una funzione in un dato dominio.

In questa unità ci occupiamo della loro ricerca. Lo facciamo sia ricorrendo al metodo delle derivate sia ricorrendo a procedimenti elementari. Incominciamo con la risoluzione di un problema.

PROBLEMA. Considerata la parabola p di equazione $x^2=9-4y$, assegnata in un piano cartesiano ortogonale (Oxy), determinare i punti di essa che hanno distanza minima dall'origine O.

RISOLUZIONE. Indicata con x l'ascissa di un generico punto P della parabola, l'ordinata di P è $-\frac{x^2}{4}+\frac{9}{4}$. Risulta allora:

$$\overline{OP}^2=x^2+\left(-\frac{x^2}{4}+\frac{9}{4}\right)^2=\frac{1}{16}(x^4-2x^2+81)$$

ed è evidente che $\overline{OP}$ risulta minima quando è minima $\overline{OP}^2$ e quindi quando è minima la funzione:

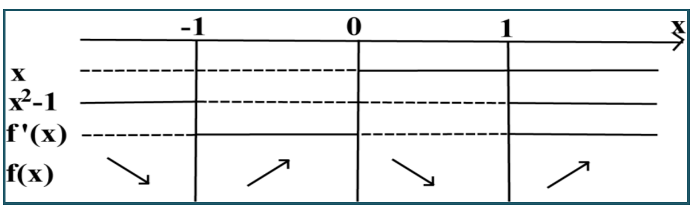
$$f(x) = x^4-2x^2.$$

A questo punto, dopo aver calcolato che:

$$f'(x) = 4x(x^2-1),$$

si può procedere in due modi.

<u>Primo procedimento</u>. Si studia il segno di $f'(x)$ (Tab. 1) e se ne desume che nei punti −1 ed 1 la funzione f(x) ha due minimi locali e che il minore di essi è anche il minimo assoluto.



TAB. 1

Siccome poi $f(-1)=f(1)=-1$ allora $\min f(x)=-1$ per $x=\pm1$. Di conseguenza:

$$\min \overline{OP} = \frac{1}{4}\sqrt{\min f(x)} = \frac{1}{4}\sqrt{80} = \sqrt{5}\,.$$

Dopo aver constatato che per $x=\pm1$ è $y=2$, possiamo concludere che i punti che hanno da O questa distanza minima sono $(-1,2)$ e $(1,2)$.

<u>Secondo procedimento</u>. Si trovano i valori che annullano $f'(x)$ e che sono $x=0$, $x=-1$, $x=1$. Si sostituiscono questi nella derivata seconda, $f''(x) = 12x^2-4$, e si trova $f''(0) =-4$ ed $f''(\pm1) = 8$; sicché f(x) ha in O un massimo locale e nei punti −1 ed 1 due minimi locali. Siccome f(x) tende a $+\infty$ per $x\to\pm\infty$ ed è continua e derivabile in ogni x, il minimo di f(x) coincide col minore dei valori $f(-1)$ ed $f(1)$. Siccome, nel caso specifico, questi due valori sono uguali a −1, la conclusione è evidente.

69.1.2 I due procedimenti descritti possono essere seguiti in tutte le situazioni in cui si cerca il minimo o il massimo assoluto di una funzione f(x) in un determinato intervallo, a condizione, naturalmente, che si sappia risolvere l'equazione $f'(x) = 0$.

- Col primo procedimento, una volta studiato il segno di $f'(x)$, la conclusione è immediata.
- Col secondo bisogna controllare quali, fra i valori che annullano $f'(x)$, portano a massimi e quali a minimi locali; scegliere quelli che di volta in volta interessano e confrontare i valori di f(x) in tali

punti con quelli che f(x) assume agli estremi dell'intervallo in cui è studiata.
I due procedimenti, pur efficaci, sono a volte sproporzionati rispetto a quello che si cerca. Nel senso che molti problemi di massimo e di minimo si risolvono con considerazioni che non richiedono il coinvolgimento di uno strumento così sofisticato come il calcolo differenziale, come faremo vedere nelle prossime pagine, a partire dai problemi che seguono.

- PROBLEMA 1. Fra i triangoli inscritti in un semicerchio di raggio r trovare quello di area massima.

RISOLUZIONE. Chiamato AB il diametro del semicerchio, sia ABC un triangolo (ovviamente rettangolo) inscritto in esso (Fig. 1).

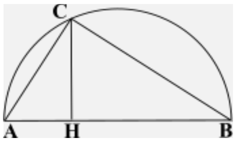


FIG. 1

Si potrebbe pensare di calcolare l'area S del triangolo come semiprodotto delle lunghezze dei suoi cateti: $S=\frac{1}{2}\,\overline{CA}\cdot\overline{CB}$. Dopodiché, posto $\overline{CA}=x$, con $0<x<2r$, e di conseguenza $\overline{CB}=\sqrt{4r^2-x^2}$, si avrebbe: $S=\frac{1}{2}x\sqrt{4r^2-x^2}$. Da qui in poi si procederebbe come nell'esercizio precedente, ricorrendo alle derivate, con spreco di tempo e di energia, dal momento che il problema si risolve quasi subito.
Basta pensare l'area del triangolo come semiprodotto delle lunghezze dell'ipotenusa AB e dell'altezza CH relativa ad essa: $S=\frac{1}{2}\,\overline{AB}\cdot\overline{CH}$; e poiché $\frac{1}{2}\overline{AB}$ è uguale alla costante r, risulta evidente che S varia perché varia CH ed è massima quando CH è massima. Il che accade quando C è il punto medio della semicirconferenza; nel qual caso il triangolo è isoscele, oltre che rettangolo. La sua area è r^2.

- PROBLEMA 2. Fra i triangoli di cui sono assegnati due lati trovare quello di area massima.

RISOLUZIONE. Anche questo problema si risolve immediatamente. Basta esprimere l'area del triangolo in funzione dell'angolo compreso fra i due lati. Per cui, se a, b sono le misure di questi lati ed x è l'ampiezza dell'angolo che essi comprendono, l'area A del triangolo è tale che:

$$A=\frac{1}{2}a\,b\sin x$$

ed è evidente che essa è massima quando è massima la funzione $\sin x$. Il che accade per $x=\pi/2$, vale a dire quando l'angolo compreso fra i due lati assegnati è retto.

- PROBLEMA 3. Fra i parallelogrammi, i cui lati mantengono le stesse misure, ce n'è uno di area massima? Ce n'è uno di area minima?

RISOLUZIONE. Se si indicano con a, b le misure di due lati consecutivi e con x l'ampiezza dell'angolo che questi lati formano, è noto che l'area A del parallelogramma è:

$$A=a\,b\sin x\,.$$

Si conclude subito che l'area è massima quando $x=\pi/2$, cioè quando il parallelogramma è un rettangolo. Mentre non esiste un parallelogramma di area minima. O meglio, dovendo essere $x=0$, esso degenera in un segmento.
Una figura rende bene l'idea (Fig. 2): si può notare, infatti, che il parallelogramma ABCD, di lati a, b costanti, cambia la sua area al variare dell'angolo x che questi due lati formano e che quest'area è massima quando il vertice B, che ruota mantenendosi sulla semicirconferenza di centro A e raggio a, si trova nel punto medio H della semicirconferenza. Nel medesimo tempo si può constatare che il parallelogramma degenera in un segmento quando $x=0$.

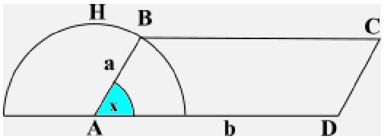


FIG. 2

- PROBLEMA 4. Una formica si trova nel punto medio A dello spigolo di una parete di un edificio a forma di tetraedro regolare (Fig. 3) e vuole recarsi nel punto medio B dello spigolo che si trova su una parete diversa. Quant'è lungo il cammino più breve che deve fare la formica, sapendo che lo spigolo del tetraedro è 3 m?

RISOLUZIONE (traccia). Basta considerare lo sviluppo del tetraedro e ci si rende conto che il cammino più breve è realizzato dal segmento di retta AB (Fig. 4). Un facile ragionamento porta a concludere che questo segmento è lungo quanto lo spigolo del tetraedro, vale a dire 3 m e di fatto il cammino consiste nell'andare da A al punto medio dello spigolo comune alle due facce e da qui al punto B.

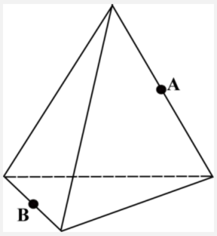


FIG. 3

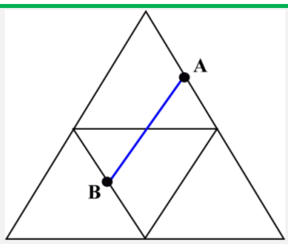


FIG. 4

- DUE PROBLEMI DA RISOLVERE.
  1) Una formica si trova nel punto medio A dello spigolo di una parete di un edificio a forma di cubo (Fig. 5) e vuole recarsi nel vertice B che si trova su una parete diversa. Quant'è lungo il cammino più breve che deve fare la formica, sapendo che lo spigolo del cubo è 6 m?
  2) Una formica si trova nel vertice A di una scatola aperta su tre facce (Fig. 6) e vuole recarsi nel vertice B. Quant'è lungo il cammino più breve e sotto quali angoli tale cammino interseca gli spigoli della base della scatola?

  RISOLUZIONE (traccia). Lasciamo a te la risoluzione di questi due problemi. Ti forniamo solo il risultato. Nel primo la lunghezza minima è $3\sqrt{13}$ m ed il cammino consiste nell'andare dal punto A al punto, più vicino a B, che divide lo spigolo comune alle due facce nel rapporto 1:2 e da qui al punto B.
  Nel secondo problema il cammino più breve è lungo 130 cm, mentre gli angoli secondo cui esso intercetta gli spigoli minori della base della scatola, approssimati al secondo, misurano entrambi 67°22'48".

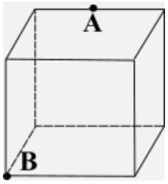


FIG. 5

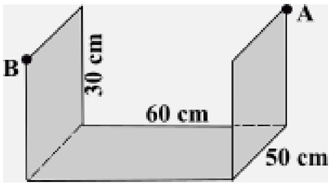


FIG. 6

69.2 MASSIMI E MINIMI PER VIA ELEMENTARE

69.2.1 A volte sono utili, nella risoluzione dei problemi di massimo e di minimo, certe proprietà cosiddette "elementari" poiché la loro dimostrazione può essere condotta senza coinvolgere il calcolo differenzia-

le, ma basandosi esclusivamente sull'algebra elementare. Il che ovviamente non esclude una dimostrazione condotta ricorrendo alle derivate, cosa anzi possibilissima.
In realtà potresti già conoscere le prime due di queste proprietà dal momento che vi abbiamo fatto un cenno in passato: ti proponiamo comunque di fornirne una dimostrazione. Delle altre quattro proprietà, che da quelle due derivano per generalizzazione, forniamo gli enunciati [1].

- PROPRIETÀ 1. **Se la somma di due variabili positive è costante, il loro prodotto è massimo quando esse sono uguali.**
- PROPRIETÀ 2. **Se il prodotto di due variabili positive è costante, la loro somma è minima quando esse sono uguali.**
- PROPRIETÀ 3. **Se la somma di n variabili positive è costante, il loro prodotto è massimo quando esse sono uguali.**
- PROPRIETÀ 4. **Se il prodotto di n variabili positive è costante, la loro somma è minima quando esse sono uguali.**
- PROPRIETÀ 5. **Se la somma di due variabili positive x, y è costante, il prodotto $x^m y^n$ – dove m, n sono numeri razionali positivi – è massimo quando x ed y sono direttamente proporzionali ad m ed n.**
- PROPRIETÀ 6. **Se il prodotto $x^m y^n$ – dove x, y sono due variabili positive ed m, n sono due numeri razionali positivi – è costante, la somma x+y è minima quando x ed y sono direttamente proporzionali ad m ed n.**

69.2.2 Alcune conseguenze, più o meno immediate, delle proprietà enunciate sono le seguenti.

a) Dalla proprietà 1: fra i rettangoli di uguale perimetro il quadrato ha area massima.
b) Dalla proprietà 2: fra i rettangoli di uguale area il quadrato ha perimetro minimo.
c) Dalla proprietà 3: fra i triangoli di uguale perimetro il triangolo equilatero ha area massima.
d) Dalla proprietà 4: fra i triangoli di area uguale il triangolo equilatero ha perimetro minimo.
e) Ancora dalla proprietà 2: Ogni funzione del tipo: $f(x)=ax+b/x$ (definita per x>0 e tale che a, b siano costanti positive) è tale che il prodotto dei due termini ax e b/x è la costante ab. Ragion per cui la funzione f(x) è minima quando è soddisfatta la seguente relazione:

$$ax=\frac{b}{x}\ ,\quad \text{vale a dire}:\ x=\sqrt{\frac{b}{a}}\,.$$

Mentre delle conclusioni a) e b) lasciamo la spiegazione a te per esercizio, noi andiamo ad occuparci delle conclusioni c) e d), che andiamo dunque a dimostrare.

Indicate, per questo, con x, y, z (x>0, y>0, z>0) le lunghezze dei lati di un generico triangolo di perimetro 2p, l'area A del triangolo, in virtù della formula di Erone, è:

$$A=\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}\,.$$

- Se p è costante, per cui x+y+z=2p è costante, l'espressione che fornisce l'area A risulta massima quando è massimo il prodotto (p–x)(p–y)(p–z).
  Ora i tre fattori di questo prodotto sono positivi e siccome:

---

[1] Chi fosse interessato alle dimostrazioni di queste proprietà può trovarle nella cartella "Integrazioni 4", file "2 – Matematica – Esercizi e complementi", collocata in questo medesimo sito e scaricabile gratuitamente.

$$(p-x)+(p-y)+(p-z) = 3\,p - (x+y+z) = 3\,p - 2\,p = p,$$

quel prodotto è massimo quando p–x=p–y=p–z, ossia quando x=y=z; insomma quando il triangolo è equilatero.

- Se è l'area A ad essere costante risulta evidentemente costante il prodotto: $p(p-x)(p-y)(p-z)$.
  Tale prodotto può essere scritto in questo modo: $\left(\sqrt[3]{p}\right)^3(p-x)(p-y)(p-z)$, oppure così:
  $$\left(\sqrt[3]{p}\cdot p-\sqrt[3]{p}\cdot x\right)\left(\sqrt[3]{p}\cdot p-\sqrt[3]{p}\cdot y\right)\left(\sqrt[3]{p}\cdot p-\sqrt[3]{p}\cdot z\right).$$
  Ora, i fattori di questo prodotto sono positivi, per cui la loro somma è minima quando essi sono uguali, cioè quando:
  $$\sqrt[3]{p}\cdot p-\sqrt[3]{p}\cdot x=\sqrt[3]{p}\cdot p-\sqrt[3]{p}\cdot y=\sqrt[3]{p}\cdot p-\sqrt[3]{p}\cdot z\,;$$
  il che accade quando x=y=z.
  D'altra parte, tenendo presente che x+y+z=2p, risulta:
  $$\left(\sqrt[3]{p}\cdot p-\sqrt[3]{p}\cdot x\right)+\left(\sqrt[3]{p}\cdot p-\sqrt[3]{p}\cdot y\right)+\left(\sqrt[3]{p}\cdot p-\sqrt[3]{p}\cdot z\right)=$$
  $$=\sqrt[3]{p}\big(3p-(x+y+z)\big)=p^{\frac{1}{3}}\cdot(3p-2p)=p^{\frac{1}{3}}\cdot p=p^{\frac{4}{3}}.$$
  Quindi la somma suddetta e, di conseguenza, p ed ovviamente 2p risultano minimi quando x=y=z; vale a dire quando il triangolo è equilatero.

69.2.3 Come applicazione delle ultime due proprietà enunciate 5 e 6, risolviamo qualche problema.

- PROBLEMA 1. Considerata una semicirconferenza di diametro AB, lungo 2r, si determini su di essa il punto P per il quale è massima l'area del rettangolo avente A e P come vertici opposti e due lati nella direzione di AB.

RISOLUZIONE. Chiamate M ed N le proiezioni di P rispettivamente su AB e sulla tangente in A alla semicirconferenza (Fig. 7), il rettangolo AMPN è quello che fa al caso nostro. Esso è determinato quando è nota la posizione di M. Pertanto poniamo $\overline{AM}$=x, con 0<x<2r, e osserviamo che, per il 2° teorema di Euclide applicato al triangolo rettangolo APB, si ha: $\overline{PM}=\sqrt{\overline{AM}\cdot\overline{MB}}=\sqrt{x(2r-x)}$.
Di conseguenza l'area S=$\overline{AM}\cdot\overline{PM}$ del rettangolo AMPN diventa $S=x\sqrt{x(2r-x)}$, vale a dire:
$$S=x^{\frac{3}{2}}\,(2r-x)^{\frac{1}{2}}\,.$$
Siccome 0<x<2r, le due variabili x e 2r–x sono positive; inoltre x+(2r–x)=2r.
Per cui, per la proprietà 5, il prodotto $x^{3/2}\,(2r-x)^{1/2}$ risulta massimo quando si ha:
$$\frac{x}{3/2}=\frac{2r-x}{1/2}\quad \text{ossia:}\ \ x=\frac{3}{2}r\,.$$
Il massimo cercato è allora: $\max(S)=\frac{3}{2}r\cdot\sqrt{\frac{3}{2}r\left(2r-\frac{3}{2}r\right)}=\frac{3}{4}r^2\sqrt{3}.$

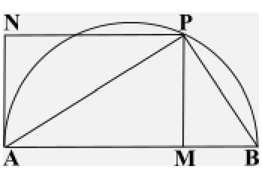


FIG. 7

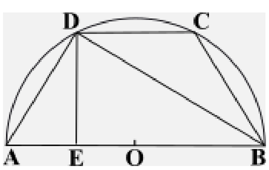


FIG. 8

- PROBLEMA 2. Fra i trapezi isosceli inscritti in un semicerchio di raggio r determinare quello di area massima e verificare che è anche quello di massimo perimetro.

RISOLUZIONE. Indicato con ABCD un trapezio isoscele inscritto nel semicerchio di centro O e diametro

AB, lungo 2r (Fig. 8), diciamo E la proiezione di D su AB ed x la lunghezza di AE, con $0<x<r$. Siccome $\overline{DC} = 2\,\overline{EO} = 2(r-x)$ e $\overline{DE} = \sqrt{\overline{AE}\cdot\overline{EB}} = \sqrt{x(2r-x)}$, l'area A del trapezio è:

$$A = \frac{1}{2}\left(\overline{AB}+\overline{DC}\right)\cdot\overline{DE} = \sqrt{x(2r-x)^3}.$$

Essa è massima quando lo è il prodotto $x(2r-x)^3$. Siccome nell'intervallo $]0, r[$ – che è quello che interessa ai fini del problema – le due variabili x e 2r–x sono positive e siccome la loro somma è la costante 2r, quel prodotto risulta massimo quando:

$$\frac{x}{1} = \frac{2r-x}{3} \quad \text{ossia}: \quad x = \frac{r}{2}.$$

In questo caso si ha: $\overline{DC}=r$ e $\overline{AD}=r$. Il trapezio isoscele di area massima inscritto nel semicerchio è pertanto quello di lati $\overline{AB}=2r$ e $\overline{AD}=r$. La sua area è:

$$\max(A) = \sqrt{\frac{r}{2}\cdot\left(2r-\frac{r}{2}\right)^3} = \frac{3}{4}r^2\sqrt{3}\,.$$

Per il calcolo del perimetro del generico trapezio conviene cambiare incognita e porre $\overline{AD}=z$, con $0<z<r\sqrt{2}$. Siccome:

$$\overline{AE}=\frac{\overline{AD}^2}{\overline{AB}}=\frac{z^2}{2r} \quad \text{e, di conseguenza,} \quad \overline{DC}=2\,\overline{EO}=2\left(r-\frac{z^2}{2r}\right), \text{ il perimetro del trapezio è:}$$

$$P=\overline{AB}+2\,\overline{AD}+\overline{DC}=-\frac{z^2}{r}+2z+4r\,.$$

L'andamento di P è quello di un arco di parabola con la concavità rivolta verso il basso, per cui ha il massimo nel vertice della parabola, posto che cada nell'intervallo $]0, r\sqrt{2}[$. Siccome l'ascissa del vertice è r ed è evidentemente compresa in tale intervallo, il trapezio di massimo perimetro è quello per cui risulta: $\overline{AB}=2r$, $\overline{AD}=\overline{CB}=r$, $\overline{DC}=r$. Vale a dire lo stesso trapezio che ha la massima area. Il perimetro di questo trapezio è evidentemente: $\max(P)=5r$.

- PROBLEMA 3. Fra i coni circolari retti di data apotema a, determinare quello di volume massimo.

Lasciamo a te la risoluzione di questo problema. Ti forniamo però la soluzione, che è la seguente: il raggio di base del cono è $\frac{a}{3}\sqrt{6}$.

- PROBLEMA 4. Fra i contenitori di forma cilindrica aventi volume 1728π cm³, trovare quello per cui è minima la somma della superficie laterale con la superficie di base.

RISOLUZIONE. Indicati con x il raggio di base del contenitore cilindrico e con y la sua altezza, il volume è $V=\pi x^2 y$ e la somma della superficie laterale con quella della base (una sola evidentemente, giacché la parte superiore del contenitore è aperta) è $S=2\pi xy+\pi x^2$.

Si tratta di stabilire quando S è minima sapendo che V è costante. Ora, essendo $S=\pi(2xy+x^2)$, è evidente che S è minima quando lo è la quantità $2xy+x^2$. D'altro canto, se V è costante, lo sono anche la quantità x^2y e il quadruplo del suo quadrato, ossia la quantità $4x^4y^2$. Siccome quest'ultima si può scrivere anche in questo modo: $(2xy)^2\,(x^2)$, per la proprietà 6 la somma $2xy+x^2$ è minima quando è soddisfatta la seguente relazione:

$$\frac{2xy}{2}=\frac{x^2}{1} \quad \text{ossia, essendo } x\neq 0, \text{ quando } x=y.$$

Siccome $V=1728\,\pi$ cm³, deve essere soddisfatta l'equazione: $\pi\, x^3=1728\pi$, da cui segue $x=12$ (cm). Il contenitore cercato è quello che ha uguali a 12 cm sia il raggio di base sia l'altezza.

69.2.4 Ti proponiamo per esercizio di calcolare, col metodo che ritieni più conveniente, quale valore di x rende massima o minima ognuna delle seguenti funzioni f(x) e qual è il relativo massimo o minimo.

a) $f(x) = \sin 2x \cos 2x$, massima in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
b) $f(x) = 2\ \sin 2x \cos x$, massima in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
c) $f(x) = \cos x - 2 \sin x + 3$, minima in $[0, \pi]$.
d) $f(x) = 2 - \sin x - \cos x$, minima in $[0, \pi]$.
e) $f(x) = x^2(a - x)$, massima in $[0, a]$.
f) $f(x) = 2a^2 - x\sqrt{a^2 - x^2}$, minima in $[0, a]$.
g) $f(x) = \dfrac{r^3}{x^2(2r - x)}$, minima in [0,2r].
h) $f(x) = 4a^2 + \sqrt{(x - a)(2a - x)^3}$, massima in $[a, 2a]$.
i) $f(x) = 5a^2 - \sqrt{2x^3(a - 2x)}$, minima in $\left[0, \frac{a}{2}\right]$.

Ti proponiamo inoltre di risolvere i seguenti problemi.

- PROBLEMA 1. Con x ed y sono indicati due qualsiasi numeri reali positivi tali che xy=1. Dimostrare che si ha: $(x+1)(y+1)\geq 4$.
- PROBLEMA 2. È dato un foglio di cartone di forma rettangolare, delle dimensioni di 32 cm e 20 cm. Dai quattro angoli del foglio si devono ritagliare altrettanti quadrati in modo che, ripiegando opportunamente i bordi sporgenti del foglio, si ottenga una scatola di volume massimo. Calcolare il lato di tali quadrati e il volume massimo della scatola. [**R.** 4 cm, …]

69.2.5 LABORATORIO DI MATEMATICA.

Si consideri il teorema di Weierstrass: "Se una funzione reale di variabile reale f(x) è continua in un intervallo chiuso e limitato [a,b], allora esiste nell'intervallo un punto in cui f(x) assume il valore massimo e ne esiste uno in cui assume il valore minimo".

A) Fornire esempi di funzioni per le quali non vale la conclusione del teorema se non è vera la premessa.
B) Dire se il teorema esprime una condizione solo necessaria o solo sufficiente o necessaria e sufficiente per il verificarsi della conseguenza specificata e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

69.3 COMPLEMENTI. METODO DELLE TANGENTI

69.3.1 Riproponiamo, in forma unificata, l'enunciato del **teorema di esistenza e unicità degli zeri**:

Se una funzione f(x) è continua e crescente o decrescente in un intervallo chiuso e limitato [a,b] e se inoltre $f(a)\cdot f(b)<0$ allora esiste uno ed un solo punto $c\in]a,b[$ tale che f(c)=0.

Il punto c, com'è noto, si chiama ***zero*** della funzione.
La ricerca dello zero di una funzione in un determinato intervallo nel quale essa soddisfi alle condizioni del teorema si conclude a volte positivamente, altre volte negativamente.
Per esempio, sia la funzione $f(x)=x^3+2x-3$. Nell'intervallo [0,2] essa soddisfa a tutte le ipotesi del teorema (cosa che puoi verificare da solo), per cui esiste uno ed un solo punto $c\in]0,2[$ tale che f(c)=0. Si trova, ancorché per tentativi, che c=1.
Anche la funzione $g(x)=x^5+2x-5$ soddisfa a tutte le ipotesi del teorema nell'intervallo [0,2], per cui ammette uno ed un solo zero in tale intervallo. Ma adesso non è possibile trovare il valore "esatto" di questo zero. In tal caso si può solo calcolare un suo valore approssimato, per esempio 1,2089.

In passato [2] abbiamo descritto un procedimento idoneo a calcolare i valori approssimati degli zeri di una funzione: il *metodo di bisezione*. Adesso vogliamo descriverne un secondo: è stato elaborato da Newton e va sotto il nome di *metodo delle tangenti*.

69.3.2 Il **metodo delle tangenti**, detto anche **metodo di Newton**, permette di calcolare un valore approssimato dello zero di una funzione in un determinato intervallo.
Bisogna però che, in aggiunta alle condizioni espresse dal teorema di esistenza ed unicità degli zeri, la funzione soddisfi ad un'ulteriore condizione:

la condizione che nell'intervallo in cui cade lo zero essa non cambi concavità.

Questo significa ovviamente che, indicata con f(x) la funzione e ammesso che essa sia derivabile almeno due volte, in ogni x dell'intervallo risulti $f''(x) > 0$ oppure (aut) $f''(x) < 0$.
Supponiamo allora che la funzione f(x) sia continua e derivabile almeno due volte nell'intervallo [a,b] ed ammettiamo, tanto per fissare le idee, che sia f(a)<0 ed f(b)>0, ed inoltre $f'(x) > 0$ ed $f''(x) > 0$ per ogni $x \in]a,b[$ (Fig. 9).

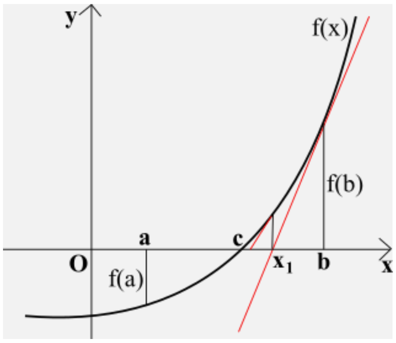


FIG. 9

Sappiamo che essa ammette nell'intervallo]a,b[uno ed un solo zero c, il quale è l'ascissa del punto in cui il grafico della funzione interseca l'asse x del sistema di riferimento cartesiano.
Posto, per comodità, $b=x_0$, si traccia la retta tangente al grafico nel suo punto si ascissa x_0; la sua equazione, come sai, è la seguente: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.
Indicata con x_1 l'ascissa del punto in cui tale retta interseca l'asse x (y=0), si ha:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Si ripete il procedimento mettendo x_1 al posto di x_0. Si ottiene il valore x_2 tale che:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Continuando allo stesso modo, si determinano altri valori $x_3, x_4, \ldots, x_n$, il generico dei quali, vale a dire x_k è tale che:

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}.$$

Si ottiene così la successione numerica $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, i cui termini sono valori sempre più prossimi al valore c dello zero della funzione, pur rimanendo comunque maggiori di c. Tale successione è per

---
[2] Cfr.: Unità 43: Equazioni polinomiali, N° 43.4.

l'appunto una successione di valori approssimati per eccesso dello zero c.
È facile rendersi conto che la successione in esame può essere definita ricorsivamente [3]. Basta constatare infatti che si ha:

$$x_n = \begin{cases} b \ \text{ se } \ n=0 \\ x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \ \text{ se } n>0 \end{cases}$$

- NOTA 1. Se la funzione f(x), continua e derivabile nell'intervallo [a,b], fosse tale che f(a)<0 ed f(b)>0 ed inoltre, per ogni x∈]a,b[, fosse $f'(x) > 0$ ma, diversamente dal caso precedente, $f''(x) < 0$, allora la successione suddetta sarebbe una successione di valori approssimati per difetto dello zero c.
Se fosse f(a)>0, f(b)<0, $f'(x) < 0$ ed $f''(x) > 0$, la successione sarebbe ancora una successione di valori approssimati per difetto di c.
Se fosse infine f(a)>0, f(b)<0, $f'(x) < 0$ ed $f''(x) < 0$, allora di nuovo si avrebbe una successione di valori approssimati per eccesso di c.
Sei invitato a verificare da te queste tre situazioni, ricorrendo ad appositi grafici della funzione.

- NOTA 2. Se nell'intervallo [a,b] in cui è situato lo zero della funzione, questa cambiasse concavità, il metodo di Newton potrebbe non funzionare. Valga per tutti l'esempio della funzione rappresentata in figura 10.
S'intuisce che, essendo x_0=b ed x_1=a ed essendo il grafico simmetrico rispetto al punto dell'asse x di ascissa c, il procedimento passa da x_0 ad x_1, da questo di nuovo ad x_0 e così via in un ciclo che non ha mai termine. Occorre dire, invero, che in tal caso il valore di c è immediato essendo $c=(a+b)/2$.

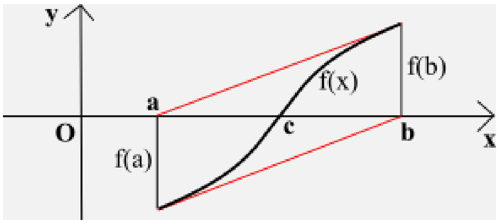


FIG. 10

VERIFICHE [4] [5]

1. Nell'insieme dei parallelogrammi di date diagonali trovare quello di area massima. [**R**. rettangolo]
2. Fra i triangoli rettangoli aventi la stessa ipotenusa trovare quello di perimetro massimo.
[**R.** Chiamati a (costante) ed x rispettivamente l'ipotenusa ed un angolo acuto, ...
la funzione da rendere massima è $f(x)=a(\sin x + \cos x)$]
3. Fra i triangoli isosceli inscritti in una circonferenza di raggio r determinare quello per cui è massima la

[3] Questo aspetto della questione, ovvero la ricorsione della successione, sarà accantonato dagli Istituti Tecnici e Professionali, per essere ripreso eventualmente nella 5ª classe, dopo lo studio dell'unità 85.
[4] Vedi nota 4, inserita nella sezione "verifiche" dell'unità 68: Studio di una funzione.
[5] I problemi (o gli esercizi) contrassegnati col simbolo ® sono risolti (totalmente o parzialmente) e la risoluzione è situata nella cartella "Integrazione 2", file "Matematica – Integrazione 2 – Unità 28-88", pubblicata in questo medesimo sito e scaricabile gratuitamente.

somma della base con l'altezza.

[**R.** Detta x la metà dell'angolo al vertice, ... la funzione da rendere massima è $f(x)=2r(\cos^2 x + \sin 2x)$]

4. Fra i triangoli aventi un lato lungo a e l'angolo opposto ampio 60°, trovare quello di area massima. Generalizzare la questione supponendo che l'angolo abbia un'ampiezza generica α.

[**R.** triangolo isoscele]

5. Considerata una semicirconferenza di diametro AB, lungo 2r, si determini su di essa il punto C per il quale è massimo il perimetro del rettangolo avente A e C come vertici opposti e due lati nella direzione di AB.

6. Sui lati Ox ed Oy di un angolo retto sono fissati i punti A e B rispettivamente in modo che $\overline{OA}=\frac{2}{3}r$ ed $\overline{OB}=\frac{2}{3}r\sqrt{3}$, dove r è il raggio della circonferenza di centro O. Sull'arco di tale circonferenza intercettato dall'angolo considerato determinare il punto per il quale è minima la somma dei quadrati delle sue distanze dai punti A e B.

7. Considerato un angolo acuto $a\hat{O}b$, ampio x, si prenda sul lato Oa il punto A in modo che il segmento OA abbia lunghezza unitaria. Quindi si dica B la proiezione ortogonale di A su Ob e, da parte opposta di A rispetto alla retta OB, si costruisca il triangolo equilatero OBC. Si determini x in modo che sia massima la distanza di C dal punto medio M del segmento OA. [**R.** max d(C,M) = … per x=30°]

8. Indicati con x ed y due qualsiasi numeri reali positivi tali che xy=1, dimostrare che si ha: $(x+1)^2(y+1)^3>28$.

9. Si determinino l'altezza e il raggio di base del cono di volume minimo circoscritto ad una data sfera di raggio r. Si dimostri poi che il suddetto cono è anche quello di minima superficie totale.
[Tratto dall'esame di maturità scientifica, 1972, sessione ordinaria.]

10. In un cono circolare retto avente per raggio di base e per altezza rispettivamente i segmenti r ed hr si inscriva il cilindro avente la base sul piano di base del cono ed il volume massimo. Per quale valore di h tale cilindro risulta anche equilatero? In questo caso particolare si trovi anche il cilindro inscritto per il quale è massima la superficie totale.
[Tratto dall'esame di maturità scientifica, 1976, sessione ordinaria.]

11. In una circonferenza di centro O e raggio unitario si conduca la corda AB tale che, costruito il triangolo equilatero ABC da parte opposta di O rispetto ad AB, l'area del quadrilatero ACBO risulti massima. Si calcolino i valori che assumono la lunghezza della corda AB e l'ampiezza dell'angolo $A\hat{O}B$.
[Tratto dall'esame di maturità scientifica, 1985, sessione ordinaria.]

12. Considerato il triangolo ABC avente i lati CA e CB lunghi rispettivamente a e $2a$, si costruisca, da parte opposta di C rispetto alla retta AB, il triangolo rettangolo ABD il cui cateto BD sia uguale alla metà del cateto AB. Si studi come varia l'area del quadrangolo ADBC al variare dell'angolo $A\hat{C}B$ e si calcoli il perimetro di detto quadrangolo quando la sua area è massima.
[Tratto dall'esame di maturità scientifica, 1988, sessione ordinaria.]

13. Ad una parete è affisso un quadro alto 1 m con la base inferiore collocata a 1,5 m di distanza dal pavimento. Calcolare a quale distanza dalla parete si deve mettere una persona affinché veda il quadro sotto il massimo angolo visuale, nell'ipotesi che, stando seduta, i suoi occhi si vengano a trovare ad 1 m dal pavimento. [**R.** ≈ 86 cm]

14. Una formica si trova nel punto A del contorno della base inferiore di un tubo avente la forma di un cilindro circolare retto e vuole recarsi nel punto B della base superiore situato sulla generatrice dl cilindro passante per A, ma non lo può fare seguendo questa generatrice AB. È costretta invece a muoversi lungo la superficie laterale del tubo. Ammesso che la formica compia il cammino più breve, calcolare quanto misura questo cammino, se la circonferenza di base del tubo e la sua altezza misurano rispettivamente 40 cm e 75 cm. [**R.** 85 cm]

15. PROBLEMA RISOLTO. Il grande filosofo greco **Aristotele** (384-322 a.C.) aveva postulato nella *Metafisica* (libro V) che *la natura sceglie sempre la via più facile*. Quasi duemila anni più tardi il giurista francese **Pierre de Fermat** (1601-1665), matematico per hobby, avrebbe enunciato un principio simile, ma più puntuale, e ne avrebbe dedotto le leggi della riflessione e rifrazione della luce. Il "principio di Fermat" è il seguente:

Fra tutti i possibili percorsi per andare dal punto A al punto B,
la luce sceglie quello che comporta il minor tempo.

Dedurre da tale principio le leggi della riflessione e rifrazione della luce.

RISOLUZIONE. Incominciamo con la legge della riflessione. Supponiamo che un raggio di luce debba andare dal punto A al punto B di uno stesso mezzo trasparente, incidendo in un punto I della superficie riflettente. Considerato che la luce si muove nello stesso mezzo, la sua velocità di propagazione non muta e il tempo di percorrenza della spezzata AIB è minimo se è minimo il percorso AIB. Si tratta quindi di determinare questo minimo percorso, tenendo comunque presente che nei tratti AI e IB la luce si propaga in linea retta. Ora, questo problema non è altro che il "problema di Erone", del quale ci siamo già occupati nel corso del primo biennio. Vogliamo riproporne ugualmente la risoluzione.

Costruito il punto A', simmetrico di A rispetto alla retta s (sezione del piano in cui si muove il raggio luminoso con la superficie piana riflettente - Fig. 11), e congiunto A' con B, risulta $A'B<A'P+PB$; di conseguenza, essendo $A'Q=AQ$ e $A'P=AP$, se P è un qualsiasi punto di s, distinto da Q, risulta: $AQ+QB<AP+PB$. Dunque Q è proprio il punto I in cui il raggio luminoso passante per A deve incidere s affinché esso passi per B. È facile spiegare che, considerata la perpendicolare QN ad s, risulta: $A\hat{Q}N=N\hat{Q}B$: questi due angoli sono detti rispettivamente *angolo di incidenza* e *angolo di riflessione*. È allora questa la legge della riflessione della luce:

Un raggio luminoso incidendo su una superficie riflettente con un angolo d'incidenza i, si riflette con un angolo di riflessione r tale che i=r.

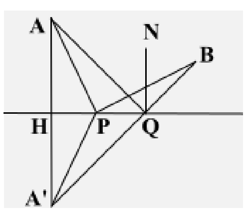


FIG. 11

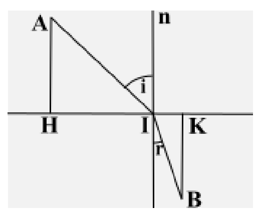


FIG. 12

Passiamo alla legge della rifrazione. Supponiamo che un raggio di luce debba andare dal punto A situato in un mezzo trasparente al punto B situato in un altro mezzo trasparente, separato dal primo dalla superficie s. Sia poi I il punto in cui il raggio incide la superficie di separazione dei due mezzi, formando l'*angolo di incidenza* i e l'*angolo di rifrazione* r (Fig. 12). Il tempo t impiegato dalla luce, che nei due mezzi si propaga in linea retta, per percorrere la spezzata AIB è:

$$t=\frac{\overline{AI}}{v_1}+\frac{\overline{IB}}{v_2}$$

essendo v_1 e v_2 le velocità di propagazione della luce nel primo e nel secondo mezzo rispettivamente. È chiaro che, una volta fissati i due punti A e B, anche il segmento HK è fissato, come sono fissati i segmenti AH e BK. Indichiamo per comodità con a, h, k le lunghezze dei segmenti HK, AH, BH nell'ordine. Ignorando, al momento, in quale punto I il raggio luminoso deve incidere la superficie di separazione, poniamo $\overline{HI}$=x, per cui: $\overline{IK}$=a−x. Si ha allora:

$$\overline{AI}=\sqrt{\overline{AH}^2+\overline{HI}^2}=\sqrt{h^2+x^2}\,,\quad \overline{IB}=\sqrt{\overline{BK}^2+\overline{IK}^2}=\sqrt{k^2+(a-x)^2}\,.$$

Di conseguenza il tempo t è la seguente funzione di x:

$$t(x)=\frac{\sqrt{h^2+x^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{k^2+(a-x)^2}}{v_2}\,,\ \text{ con }\ 0<x<a\,.$$

Si tratta di calcolare sotto quale condizione questa funzione ammette minimo. Calcoliamone la derivata:

$$t'(x)=\frac{1}{v_1}\cdot\frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}}-\frac{1}{v_2}\cdot\frac{a-x}{\sqrt{k^2+(a-x)^2}}\,;$$

per cui t’(x)=0 per:

$$\frac{1}{v_1}\cdot\frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}}=\frac{1}{v_2}\cdot\frac{a-x}{\sqrt{k^2+(a-x)^2}}\,.$$

D’altro canto:

$$\frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}}=\frac{\overline{HI}}{\overline{AI}}=\sin i\quad \text{ e }\quad \frac{a-x}{\sqrt{k^2+(a-x)^2}}=\frac{\overline{IK}}{\overline{IB}}=\sin r\,.$$

per cui: t’(x)=0 per:

$$\frac{\sin i}{v_1}=\frac{\sin r}{v_2}\quad \text{o anche}:\quad \frac{\sin i}{\sin r}=\frac{v_1}{v_2}\,.$$

Siccome poi, calcolando la derivata seconda di t(x), a conti fatti si trova:

$$t''(x)=\frac{1}{v_1}\cdot\frac{h^2}{\sqrt{(h^2+x^2)^3}}+\frac{1}{v_2}\cdot\frac{k^2}{\sqrt{(k^2+(a-x)^2)^3}}\,,$$

sicché t”(x)>0 per ogni x∈]0,a[, la condizione su trovata è quella per cui t(x) è minimo. È allora questa la legge della rifrazione della luce:

Un raggio luminoso, incidendo su una superficie di separazione di due mezzi con un angolo d’incidenza i, passa nel secondo mezzo con un angolo di rifrazione r tale che:

$$\boldsymbol{\frac{\sin i}{\sin r}=\frac{v_1}{v_2}}\,.$$

NOTA BENE. La legge della riflessione potrebbe essere dimostrata con un procedimento simile a questo seguito per la dimostrazione della legge della rifrazione. Tale dimostrazione può essere un buon esercizio per gli studenti.

16. ® In un piano cartesiano ortogonale (Oxy) è assegnata la curva K di equazione:

$$y=x^2\left(1-\frac{x}{8}\right).$$

1. A) Dopo aver controllato che passa per O, trovare l’ulteriore punto A che essa ha in comune con l’asse x e disegnarne l’andamento.
2. A) Calcolare quanti punti, aventi entrambe le coordinate intere, si trovano all’interno della regione piana (escluso cioè il contorno) delimitata dall’asse x e dalla curva K.
   B) Fra i triangoli rettangoli aventi il vertice dell’angolo retto sull'asse x, un secondo vertice in O e il terzo vertice sull’arco OA di K, determinare quello di area massima.
3. A) Calcolare la probabilità che, scegliendo a caso uno dei punti di cui al quesito 2A), esso si trovi all’interno del triangolo suddetto o sul suo contorno.

[**R.** ...; 2A) 37; 2B) max area=27; 3A) ≈72,97%]

17. Si consideri la funzione:

$$f(x) = (1 - x) + 2(1 - x)^2 + 3(1 - x)^3.$$

Dimostrare che non ammette massimo né minimo su ℝ.

18. Un filo metallico di lunghezza L viene utilizzato per delimitare un'aiuola rettangolare, un lato della quale è però costituito dalla base della parete di un edificio. Quali sono le dimensioni dell'aiuola di area massima? Quanto vale questo massimo? [**R.** dimensioni: L/4, L/2; …]

19. Un filo metallico di lunghezza L è utilizzato per delimitare un'aiuola a forma di settore circolare.
a) Qual è l'ampiezza, misurata in gradi sessagesimali ed approssimata per eccesso ad un secondo, dell'angolo al centro del settore di area massima? b) Quanto misura il raggio del settore se la sua area massima è 100 m²?

[**R.** a) Conviene indicare con x radianti l'angolo al centro del settore e con y il suo raggio, per cui l'area A del settore è $A=\frac{1}{2}xy^2$ con $xy+2y=L$, essendo xy la lunghezza dell'arco. Imponendo che A sia massima si trova x = 2 rad.= 114°35'30"; b) 10 m]

20. È noto che lo sviluppo piano di un cono circolare retto è un settore circolare. Reciprocamente, con un settore circolare si può costruire un cono circolare retto. Tra i settori circolari, ottenuti da un medesimo cerchio, determinare l'ampiezza di quello che genera il cono di massimo volume, espressa in gradi sessagesimali e approssimata per eccesso a meno di 1°.

[**R.** Si suggerisce di indicare con R il raggio del settore, ossia l'apotema del cono, e con x il raggio di base del cono. L'ampiezza cercata è 294°]

21. La funzione f(x) è derivabile in ogni x reale e si sa che $f(x)\to 0$ sia per $x\to -\infty$ sia per $x\to +\infty$. Inoltre la sua derivata si annulla solamente per $x=-3$ e per $x=3$ e risulta $f(-3)=-1$ ed $f(3)=2$. Chiamato G il grafico della funzione, spiegare in modo esauriente quali delle seguenti eventualità sono certe, quali possibili e quali impossibili.

[A] G presenta un centro di simmetria.
[B] G interseca una ed una sola volta l'asse x.
[C] G interseca una ed una sola volta l'asse y.
[D] G presenta un massimo assoluto ed un minimo assoluto.
[E] G presenta almeno un asintoto verticale.
[F] G presenta esattamente tre punti di flesso.

22. Fra i triangoli isosceli circoscritti ad una data circonferenza determinare quello di area minima.

23. Fra i triangoli isosceli di perimetro assegnato 2p, determinare quello di area massima.

$\left[\begin{array}{l}\textbf{R.}\ \text{Indicata con x la misura di uno dei lati uguali, con } 0<x<p,\ \ldots \\ \text{si tratta di rendere massima la funzione } f(x)=2p(p-x)^2\left(x-\frac{p}{2}\right)\end{array}\right]$

24. È assegnata la funzione $y=20-x-x^2$, con $x>0$ e $y>0$. Una volta costruite le funzioni:

$$f(x) = y' \cdot \frac{x}{y} \quad \text{e} \quad g(x) = xy,$$

si dimostri che la funzione g(x) è massima per il valore di x per il quale $f(x)=-1$.

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE.

DOMANDE.

1. Se f(x) è una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato [a,b] e se esiste $c\in[a,b]$ tale che $f(c)=0$ allora $f(a)f(b)<0$. È vero o falso?

2. Sia f(x) una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato [a,b]: si sa che la funzione ammette minimo assoluto m e massimo assoluto M in [a,b]. È vero che l'immagine della funzione coincide con l'intervallo chiuso e limitato [m,M]?
3. È vero che fra i rettangoli il quadrato ha area massima e perimetro minimo?
4. È vero che la funzione $f(x) = 4a^2 + \sqrt{(x-a)(2a-x)^3}$ è massima nell'intervallo [a,2a] per il valore di x per cui risulta $x-a=\frac{2a-x}{3}$?
5. Fra i triangoli di uguale perimetro ce n'è uno di area massima? Ce n'è uno di area minima?
6. Fra i parallelogrammi, i cui lati mantengono le stesse lunghezze, ce n'è uno di area massima? Ce n'è uno di area minima?
7. Dimostrare, utilizzando le proprietà elementari, che fra i parallelepipedi di uguale area totale il cubo ha volume massimo.

RISPOSTE.

1. Falso. Basta considerare la funzione $f(x)=x^2-1$. Nell'intervallo chiuso e limitato [−2,2] è evidentemente continua ed inoltre nel punto 1 di tale intervallo risulta $f(1)=0$. Tuttavia $f(-2)=3$ ed $f(2)=3$, per cui $f(-2)f(2)>0$.
2. Sì, è vero. Lo assicura il teorema di Weierstrass.
3. La domanda non ha senso. In realtà il quadrato ha area massima, non fra i rettangoli, ma fra i rettangoli di uguale perimetro ed ha perimetro minimo, non fra i rettangoli, ma fra i rettangoli di uguale area.
4. È vero. In effetti la funzione assegnata è massima quando la funzione $g(x)=(x-a)(2a-x)^3$ è massima. D'altro canto, nell'intervallo [a,2a] i fattori $x-a$ e $2a-x$ sono entrambi positivi ed inoltre risulta $(x-a)+(2a-x)=a$, cioè costante. Pertanto, per una nota proprietà, g(x), e dunque anche f(x), risulta massima quando $x-a=\frac{2a-x}{3}$, cioè per $x=\frac{5}{4}a$.
5. Ce n'è uno di area massima: il triangolo equilatero. Non ce n'è uno di area minima, dal momento che l'estremo inferiore delle aree dei triangoli di uguale perimetro è 0 e si ha quando uno dei lati del triangolo degenera nel segmento nullo, per cui in realtà il triangolo stesso degenera in un segmento.
6. Ce n'è uno di area massima: il rettangolo. Non ce n'è uno di area minima, dal momento che l'estremo inferiore delle aree di tali parallelogrammi si ha quando i lati del parallelogramma appartengono alla stessa retta, per cui in realtà il parallelogramma degenera in un segmento.
7. Indicate con x, y, z le dimensioni di un parallelepipedo rettangolo, la sua area totale è: $A=2(xy+yz+zx)$ ed il suo volume è $V=xyz$. Pertanto $V^2=(xyz)(xyz)=(xy)(yz)(zx)$. Se l'area totale del parallelepipedo è costante, significa che è costante la somma delle variabili xy, yz, zx e pertanto il loro prodotto, vale a dire V^2 (e quindi anche V) è massimo quando tali variabili sono uguali, il che accade per $x=y=z$, vale a dire quando il parallelepipedo è un cubo.