

Prerequisiti:

- Saper risolvere equazioni e sistemi di equazioni
- Saper studiare una funzione reale di variabile reale

Questa unità è rivolta all'Istituto Tecnico, settore Economico, ma anche all'indirizzo Trasporti e Logistica del settore Tecnologico, tutto nel 2° biennio.

Riguarda pure la 5ª classe del Liceo delle Scienze umane, opzione Economico-sociale.

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità gli allievi devono essere in grado di:

- *definire i concetti di costo totale, costo medio e costo marginale*
- *definire i concetti di ricavo e profitto*
- *risolvere, anche con l'uso di un apposito software matematico, semplici problemi relativi a costi, ricavi, profitti*
- *definire e calcolare l'elasticità della domanda e dell'offerta*
- *valutare come l'elasticità della domanda influisce su spesa (del consumatore) o ricavo (del produttore/venditore)*

70.1 Costi, Ricavi, Profitti.

70.2 Domanda e offerta.

70.3 Elasticità della domanda.

70.4 Elasticità dell'offerta.

70.5 Influenza dell'elasticità della domanda.

Verifiche.

Una breve sintesi per domande e risposte.

Complementi: Domanda e offerta in più mercati.

Matematica in Economia

Unità 70

70.1 COSTI, RICAVI, PROFITTI

70.1.1 Nella produzione di un certo bene di consumo l'azienda produttrice compie delle spese, dovute a vari fattori, che si riassumono nella voce **costo totale** (lo indichiamo con C_t).

È evidente che esso è una funzione della quantità x di merce prodotta⁽¹⁾. Ossia:

$$C_t = C_t(x),$$

ovviamente con $x > 0$.

Il rapporto fra il costo totale e la quantità di merce prodotta si chiama **costo medio** (o **costo unitario**).

Se è indicato con C_u risulta dunque:

$$[1] \quad C_u = \frac{C_t(x)}{x}.$$

Di norma (perlomeno sulla base di esperienze acquisite) il grafico del costo medio – disegnato ovviamente per $x > 0$ – ad un certo punto (di solito fin dall'inizio) comincia a decrescere e poi prende a crescere.

In particolare questo può essere verificato per la funzione $y = \frac{C_t(x)}{x}$, dove:

$$C_t(x) = x^2 - 12x + 56.$$

Ti invitiamo a disegnare su uno stesso piano i grafici del costo medio e del costo totale.

Ti proponiamo di fare la stessa cosa con riferimento alla seguente funzione $C_t(x)$:

$$C_t(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 18x + 120.$$

Il punto F del grafico del costo medio, nel quale detto costo raggiunge il *valore minimo*, è detto **punto di fuga**. Il nome dipende dal fatto che, se il prezzo di vendita per unità di quantità di merce è inferiore al valore che il costo $C_u(x)$ assume in x_F , allora è proprio il caso che l'impresa abbandoni il mercato, per l'appunto fugga da esso. Il valore $C_u(x_F)$ si chiama **prezzo critico**.

Per le due situazioni proposte sopra, qual è il prezzo critico (supposto calcolato in euro per unità di merce prodotta)?

70.1.2 Il saggio medio d'incremento del costo totale ΔC_t provocato da un piccolo incremento Δx della quantità di merce prodotta, vale a dire il rapporto incrementale:

$$\frac{\Delta C_t}{\Delta x} = \frac{C_t(x + \Delta x) - C_t(x)}{\Delta x},$$

si chiama **costo marginale** e si indica con C_m . Tenendo presente che il limite di tale rapporto quando $\Delta x \rightarrow 0$, ammesso che esista, altro non è che la derivata di $C_t(x)$, si ha:

$$C_m = C_t'(x).$$

Con riferimento alla funzione $C_t(x) = x^2 - 12x + 56$, qual è la funzione: $C_m = C_m(x)$?

Se disegni sullo stesso piano il grafico delle due funzioni, costo medio e costo marginale, puoi notare un fatto interessante: sei in grado di stabilire di che cosa si tratta?

Tale fatto costituisce in realtà una proprietà generale, codificata dal seguente teorema.

TEOREMA. I grafici del costo medio e del costo marginale s'intersecano nel punto di fuga.

¹ In questa fase preferiamo indicare con x la quantità di merce prodotta, piuttosto che con Q , come di solito fanno gli economisti. Ad ogni modo, se si preferisce indicare tale quantità con Q va bene lo stesso.

DIMOSTRAZIONE. Incominciamo ad osservare che l'ascissa x_F del punto intersezione dei grafici del costo medio e del costo marginale si trova risolvendo l'equazione $C_u(x)=C_m(x)$, ossia l'equazione:

$$\frac{C_t(x)}{x} = C'_t(x), \text{ o anche: } x C'_t(x) - C_t(x) = 0.$$

Del resto l'ascissa del punto di fuga si trova risolvendo l'equazione $C'_t(x)=0$. Ora, tenendo presente la [1] e derivando rispetto ad x , si trova:

$$C'_u(x) = \frac{x C'_t(x) - C_t(x)}{x^2}.$$

Per cui $C'_t(x)=0$ quando $x C'_t(x) - C_t(x)=0$.

Quindi, effettivamente l'ascissa del punto di fuga coincide con l'ascissa del punto in cui si intersecano i grafici delle funzioni costo medio e costo marginale. Di conseguenza anche i punti coincidono. [c.v.d.]

Forniamo un esempio, che riassume tutte le cose dette riguardo alle funzioni costo totale, costo medio e costo marginale. Lo facciamo con riferimento alla seguente funzione:

$$y=C_t(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{5}{4}x^2-3x+50,$$

dove x esprime le unità di quantità di merce prodotta e $C_t(x)$ il costo totale, espresso in euro. Dopo aver desunto che il costo medio ed il costo marginale sono dati rispettivamente dalle seguenti funzioni:

$$y=C_u(x)=\frac{1}{6}x^2-\frac{5}{4}x-3+\frac{50}{x} \text{ e } y=C_m(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x-3,$$

possiamo fornire la rappresentazione delle tre funzioni sul medesimo piano (Fig. 1).

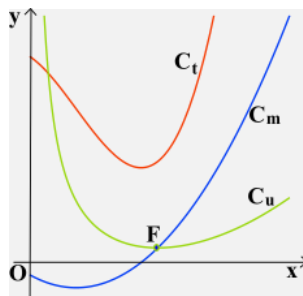


FIG. 1

Oltre al fatto che si ha $C_u(x)=C_m(x)$ per $x=x_F$, studiando il segno di $C'_u(x)$ (considerato ovviamente per $x>0$) si può desumere che risulta:

$$C_u(x)>C_m(x) \text{ per } x<x_F \text{ e } C_u(x)<C_m(x) \text{ per } x>x_F.$$

Ti proponiamo adesso il seguente esercizio.

ESERCIZIO. Con riferimento alla seguente funzione:

$$\text{a) } C_t=4x^2-8x+8, \quad \text{b) } C_t=\frac{3}{4}x^2+\frac{13}{2}x+22,$$

trovare il costo medio C_u ed il costo marginale C_m e rappresentare le tre funzioni sullo stesso piano.

Controllare che siano verificate le stesse cose dette sopra riguardo al punto di fuga.

70.1.3 Le nozioni di grandezza “totale”, “media” e “marginale” possono essere estese pari pari ad altre grandezze economiche, in particolare al **ricavo** dell'azienda, cioè al denaro che l'azienda incassa in seguito alla vendita del prodotto (e che si ottiene moltiplicando la quantità venduta per il costo di una

unità del prodotto), e al **profitto**, che è la differenza fra il ricavo totale $R_t(x)$ e il costo totale $C_t(x)$, vale a dire il guadagno netto $G(x)$, cioè: $G(x) = R_t(x) - C_t(x)$.

Come applicazione delle regole dell'analisi, ti proponiamo la dimostrazione della seguente proprietà:

**Il prezzo che rende massimo il profitto è tale
da rendere uguali il costo marginale e il ricavo marginale**

e di verificarla nel caso in cui il costo totale C_t e il ricavo totale R_t sono espresse dalle seguenti funzioni:

$$C_t = x^2 - 3x + 5, \quad R_t = 25 + 2x - 3x^2.$$

70.1.4 ESERCIZIO. Un'azienda produce giornalmente un certo numero di articoli sostenendo una spesa fissa di € 50. Dopo la produzione del primo articolo, che comporta una spesa di € 12, ogni altro articolo implica una spesa aggiuntiva di € 0,7 rispetto al precedente. Determinare la funzione che esprime il costo medio. Determinare quindi il numero di articoli che conviene produrre per ridurre al minimo il costo medio.

RISOLUZIONE. Il costo totale C_t per produrre n articoli è formato dalla somma di $n+1$ addendi (espressi in euro):

50 come spesa fissa;

12 per la produzione del 1° articolo;

12 + 0,7 per quella del 2°;

12 + 0,7 + 0,7 = 12 + 0,7 × 2 per la produzione del 3° articolo;

..... ;

12 + 0,7 (n-1) per la produzione dell'n° articolo.

Quindi: $C_t = 50 + 12(n-1) + 0,7[1+2+3+\dots+(n-1)]$.

Da qui, una volta constatato che: $1+2+3+\dots+(n-1) = \frac{(n-1)n}{2}$, e dopo aver fatto le necessarie semplificazioni, segue:

$$C_t = 38 + \frac{233}{20}n + \frac{7}{20}n^2.$$

Siccome il costo medio è $C_u = \frac{C_t}{n}$, allora si ha:

$$C_u = \frac{38}{n} + \frac{233}{20} + \frac{7}{20}n.$$

È questa la funzione da rendere minima. Ed è evidente che essa risulta minima quando lo è la somma:

$$S = \frac{38}{n} + \frac{7}{20}n.$$

Giacché le due variabili che costituiscono gli addendi di questa somma sono positive per ogni naturale n non nullo e giacché il loro prodotto è una costante ($38 \times \frac{7}{20}$), la somma S è minima quando i suoi addendi sono uguali, vale a dire quando:

$$\frac{38}{n} = \frac{7}{20}n \text{ e perciò } n^2 = 38 \times \frac{20}{7}, \text{ ossia quando } n \approx 10,4.$$

Dal momento che n è un intero dobbiamo scegliere $n=10$ oppure $n=11$. Siccome per $n=10$ risulta $C_u=18,9500$ e per $n=11$ risulta $C_u=18,9545$ dobbiamo concludere che per l'azienda è conveniente produrre 10 articoli al giorno per ridurre al minimo il costo medio di un articolo.

Naturalmente questo non significa che effettivamente l'azienda produrrà 10 articoli al giorno, poiché bisogna tener conto anche di altri fattori, come il volume di vendite e quindi il ricavo e il profitto. L'esercizio è servito solo a chiarire qualche concetto precedente.

70.2 DOMANDA E OFFERTA

70.2.1 Un'altra grandezza importante in economia è la quantità di **domanda** di un certo bene di consumo, che adesso indichiamo con Q , come normalmente fanno gli economisti. Essa è una funzione del prezzo P di vendita di una unità del bene medesimo. Ossia:

$$Q = Q(P).$$

La funzione $Q(P)$ è una funzione decrescente, poiché il suo valore diminuisce al crescere di P e, ovviamente, cresce al diminuire di P . Ciò perché, per legge naturale, ogni volta che il prezzo di un prodotto aumenta, diminuisce la domanda di quel prodotto da parte del consumatore.

In figura 2 è rappresentato il grafico della funzione di domanda:

$$Q = 2 - \frac{4}{3}P,$$

o meglio, considerato che sia P sia Q sono positivi, la parte del grafico situata nel primo quadrante.

Occorre dire che tradizionalmente gli economisti rappresentano Q sull'asse delle ascisse e P su quello delle ordinate. Ciò implica che al posto della funzione $Q=Q(P)$ si considera la sua inversa $P=P(Q)$.

Ma è comunque alla forma $Q=Q(P)$ che noi ci riferiremo nelle pagine che seguono.

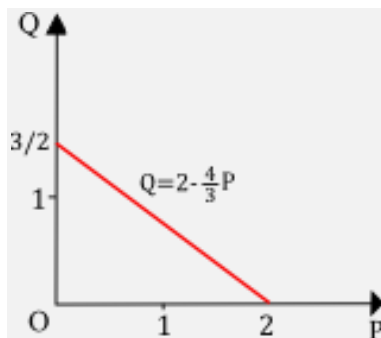


FIG. 2

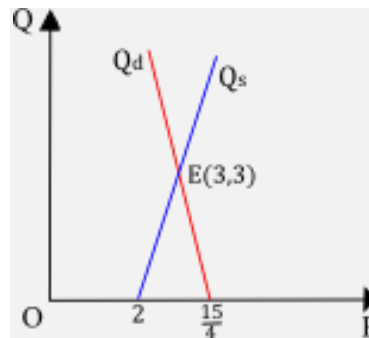


FIG. 3

70.2.2 Oltre alla funzione di domanda di un bene di consumo, si definisce anche la funzione S che esprime la quantità di **offerta** del bene ed è essa pure una funzione del prezzo P del bene medesimo:

$$S = S(P).$$

A differenza della funzione di domanda, la funzione di offerta è solitamente una funzione crescente.

La quantità S di offerta cresce infatti o decresce rispettivamente al crescere o decrescere del prezzo P .

S'intende che la domanda e l'offerta sono, in genere, espresse da funzioni diverse.

A titolo di esempio, le due funzioni potrebbero essere le seguenti:

$$Q = 15 - 4P, \quad S = 3P - 6,$$

dove evidentemente Q ed S sono rispettivamente le quantità di domanda e di offerta, mentre P è il prezzo. Ed ovviamente, ad ogni prezzo P corrispondono un valore di Q e, di norma, un valore diverso di S . Per esempio, al prezzo $P=2,5$ corrispondono una domanda $Q=5$ ed un'offerta $S=1,5$.

Si pone allora il problema di stabilire quale sia la **situazione di equilibrio**. Cioè per quale prezzo del bene di consumo la domanda coincide con l'offerta.

La soluzione è banale: basta porre $Q=S$. Per cui, con riferimento alla situazione precedente:

$$15 - 4P = 3P - 6.$$

Da qui segue: $P=3$, cui corrisponde una quantità di domanda $Q=3$, che è ovviamente uguale alla quantità di offerta S . In un riferimento cartesiano, nel quale in ascisse si prendono i prezzi P ed in ordinate le quantità Q (di domanda o di offerta), la situazione di equilibrio è data dal punto E in cui si intersecano la curva Q_d della domanda e la curva Q_s dell'offerta (Fig. 3).

70.2.3 Soffermiamoci su un esercizio che riassume in qualche misura le cose dette fin qui.

ESERCIZIO. Un'impresa produce una certa merce, la cui domanda e la cui offerta sono regolate dalle seguenti leggi:

$$Q = 78 - 2P, \quad S = 3P - 12,$$

dove P è il prezzo di vendita per unità di quantità di merce, espresso in euro, mentre Q ed S sono rispettivamente le quantità di domanda e di offerta della merce.

Calcolare il prezzo che determina la situazione di equilibrio fra domanda ed offerta.

Il costo totale, misurato in euro, è espresso dalla seguente funzione:

$$C_t = \frac{2}{3}Q^3 - 5Q^2 - 12Q + 120.$$

Determinare la quantità Q di merce che bisogna produrre perché:

a) il costo totale sia minimo; b) il costo medio sia minimo; c) il ricavo totale sia massimo; d) il profitto sia massimo.

RISOLUZIONE. Lasciamo a te la risoluzione del primo quesito (calcolo del prezzo di equilibrio) e ci occupiamo degli altri.

a) Lasciamo ancora a te il compito di trovare il minimo di C_t . Noi ti forniamo solo il risultato:

$$C_t \text{ è minimo per } Q=6; \text{ risulta poi } \min(C_t)=12 \text{ euro.}$$

b) Scriviamo anzitutto la funzione costo medio:

$$C_u = \frac{2}{3}Q^2 - 5Q - 12 + \frac{120}{Q}.$$

Siccome:

$$C'_u = \frac{4}{3}Q - 5 - \frac{120}{Q^2}$$

calcoliamo con approssimazione, mediante un apposito software matematico, l'unica soluzione reale dell'equazione:

$$\frac{4}{3}Q - 5 - \frac{120}{Q^2} = 0.$$

Troviamo $Q \approx 6,14$ ovvero, arrotondando all'intero: $Q \approx 6$. Si giustifica, ricorrendo all'analisi matematica, che per questo valore il costo medio è minimo. Si ha inoltre $\min(C_u) = 2$ euro.

Il valore $Q \approx 6$ è l'ascissa del punto di fuga, mentre la sua ordinata, $C_u \approx 2$ euro, è il prezzo critico.

c) Il ricavo totale R_t è fornito dal prodotto della quantità Q di merce venduta per il prezzo P di una unità della stessa, vale a dire: $R_t = Q P$. Siccome $P = 39 - \frac{Q}{2}$, allora:

$$R_t = 39Q - \frac{Q^2}{2}.$$

Trattandosi di una funzione avente come grafico una parabola con la concavità rivolta verso il basso, il massimo cercato si ha esattamente nel vertice della parabola. Precisamente:

$$\text{il massimo di } R_t \text{ si ha per } Q=39 \text{ e risulta } \max(R_t)=760,5 \text{ euro.}$$

d) Per calcolare il massimo profitto dell'azienda cominciamo con il calcolo del profitto per un generico valore di Q . Si ha: $G(Q) = R_t(Q) - C_t(Q)$; per cui:

$$G(Q) = \left(39Q - \frac{1}{2}Q^2\right) - \left(\frac{2}{3}Q^3 - 5Q^2 - 12Q + 120\right) = -\frac{2}{3}Q^3 + \frac{9}{2}Q^2 + 51Q - 120.$$

Si trova che $G(Q)$ è massimo per $Q \approx 8$ e risulta $\max G(Q) \approx 235$ euro. Ma questo calcolo è lasciato a te per esercizio.

70.3 ELASTICITÀ DELLA DOMANDA

70.3.1 Il modo di variare della domanda rispetto al prezzo non è lo stesso per tutti i beni.

In particolare, ce ne sono di quelli che si caratterizzano per una debole variazione della domanda anche in corrispondenza di una grande variazione del prezzo: si chiamano *beni essenziali* o *di prima necessità* (Fig. 4a).

E ce ne sono di quelli che, al contrario, si caratterizzano per forti variazioni della domanda anche a fronte di lievi variazioni del prezzo: si chiamano *beni voluttuari* o *di lusso* (Fig. 4b).

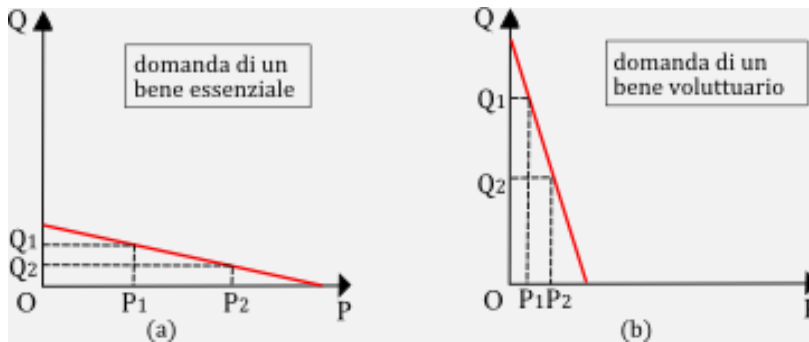


FIG. 4

Il modo di reagire della domanda rispetto alle variazioni di prezzo è misurato da un coefficiente numerico chiamato *elasticità* della domanda rispetto al prezzo. Precisamente:

Si definisce *elasticità e* della domanda rispetto al prezzo il rapporto fra la variazione percentuale della domanda e la corrispondente variazione percentuale del prezzo.

Supponiamo allora che al prezzo P corrisponda la domanda $Q(P)=Q$ ed al prezzo $P+\Delta P$ corrisponda la domanda $Q(P+\Delta P)=Q+\Delta Q$ (Fig. 5); ragion per cui:

- la variazione percentuale della domanda è: $\frac{Q(P+\Delta P) - Q(P)}{Q(P)} = \frac{\Delta Q}{Q}$
- e quella del prezzo è $\frac{(P+\Delta P) - P}{P} = \frac{\Delta P}{P}$.

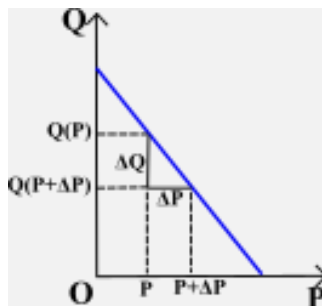


FIG.5

Si ha pertanto: $e(P) = \frac{\Delta Q/Q}{\Delta P/P}$ o anche: $e(P) = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \cdot \frac{P}{Q}$.

Siccome ΔQ e ΔP hanno segni discordi, mentre P e Q sono entrambi positivi, si capisce che è $e(P) < 0$.

Per esempio:

- dire che l'elasticità della domanda è $-1,5$ significa che la domanda aumenta (o diminuisce) dell'1,5% quando il prezzo diminuisce (o aumenta) dell'1%;
- dire che l'elasticità della domanda è $-0,5$ significa che la domanda aumenta (o diminuisce) dello 0,5% quando il prezzo diminuisce (o aumenta) dell'1%.

Risolviamo il seguente esercizio a maggior chiarimento.

ESERCIZIO. L'elasticità della domanda di un certo bene è $-1,5$. In occasione delle feste il produttore di quel bene decide di diminuirne il prezzo del 20%. Calcolare la variazione della domanda di quel bene.

RISOLUZIONE. Sappiamo che è:

$$\frac{\Delta Q/Q}{\Delta P/P} = -1,5.$$

Siccome $\frac{\Delta P}{P} = -20\% = -\frac{1}{5}$, allora: $\frac{\Delta Q}{Q} = -1,5 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{3}{10} = 30\%$.

La domanda aumenta del 30%.

Ora, $\frac{\Delta Q}{\Delta P}$ e $\frac{Q}{P}$, quando ΔP è “molto piccolo”, non sono altro che il *valore marginale* della funzione di domanda ed il *valore medio* della domanda (o *domanda media* o *unitaria*). Pertanto, potendo scrivere:

$$e = \frac{\Delta Q/Q}{\Delta P/P}$$

possiamo concludere con questa proprietà:

L'elasticità della domanda rispetto ad un dato prezzo è il rapporto fra il valore marginale della funzione di domanda per quel prezzo e il suo corrispondente valore medio.

Possiamo constatare inoltre che per variazioni “infinitesime” del prezzo ($\Delta P \rightarrow 0$), nell'ipotesi che la funzione di domanda $Q(P)$ sia derivabile, si ha:

$$\lim_{\Delta P \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta P} = \frac{dQ}{dP}.$$

Questo consente di calcolare rapidamente l'elasticità di una domanda di data funzione in corrispondenza di un determinato prezzo, dal momento che è:

$$e(P) = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q}.$$

Per esempio, se è $Q=3-P^2$ la funzione di domanda, ovviamente con $0 < P < \sqrt{3}$, appurato che $Q'(P) = -2P$, l'elasticità e della domanda in corrispondenza del generico prezzo P è tale che:

$$e(P) = -2P \cdot \frac{P}{3-P^2} = -\frac{2P^2}{3-P^2}.$$

La figura 6 ne fornisce l'andamento, s'intende nell'intervallo che interessa la questione economica, vale a dire per $0 < P < \sqrt{3}$.

E questo mostra come l'elasticità della domanda vari al variare del prezzo P . In particolare, nel caso in esame, per $P=1$ si ha: $e=-1$; mentre per $P < 1$ si ha: $e > -1$; e per $P > 1$ si ha $e < -1$.

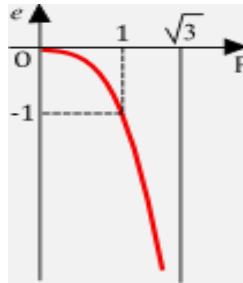


FIG. 6

70.3.2 Abbiamo chiarito sopra che l'elasticità della domanda rispetto al prezzo è di solito negativa. Ciò non di meno, in Economia spesso l'elasticità della domanda è espressa in valore assoluto. Con questa convenzione, a seconda che l'elasticità della domanda risulti (appunto in valore assoluto) uguale, maggiore o minore di 1, la domanda assume delle attribuzioni nominali diverse. Precisamente essa si dice:

- *anelastica* (o *stabile*) se $|e| = 1$;
- *elastica* se $|e| > 1$;
- *non elastica* (o *rigida*) se $|e| < 1$.

Ritornando all'esempio precedente, in cui la funzione di domanda è $Q=3-P^2$, con $0 < P < \sqrt{3}$, possiamo allora concludere che la domanda è:

stabile per $P=1$; elastica per $P>1$; rigida per $P<1$.

- In una domanda *stabile* la variazione percentuale della domanda è uguale alla variazione percentuale del prezzo corrispondente.
- In una domanda *elastica* la variazione percentuale della domanda è maggiore della variazione percentuale del prezzo corrispondente.

In particolare, se l'elasticità tende ad infinito, la domanda è *perfettamente elastica*: un piccolissimo aumento di prezzo provoca un crollo della domanda ed una impercettibile diminuzione di prezzo provoca un balzo enorme della domanda.

- In una domanda *rigida* la variazione percentuale della domanda è minore della variazione percentuale del prezzo corrispondente.

In particolare, se l'elasticità tende a zero, la domanda è *perfettamente rigida*: la variazione della domanda (aumento o diminuzione che sia) non è assolutamente influenzata dal prezzo.

Ti proponiamo un paio di esercizi.

- ESERCIZIO 1. Sia la funzione di domanda:

$$Q = a - b P,$$

dove a, b sono numeri reali positivi assegnati. Rappresentala in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali, in cui i prezzi P si rappresentano sull'asse delle ascisse e le quantità Q di domanda su quello delle ordinate. Indica con A e B le intersezioni del grafico rispettivamente con l'asse P e con l'asse Q e indica inoltre con M il punto medio del segmento AB . Dimostra che la domanda è:

- stabile nel punto M ;
- elastica in ogni punto del segmento $]AM[$ e perfettamente elastica in A ;
- rigida in ogni punto del segmento $]BM[$ e perfettamente rigida in B .

La figura 7 riassume le possibilità descritte.

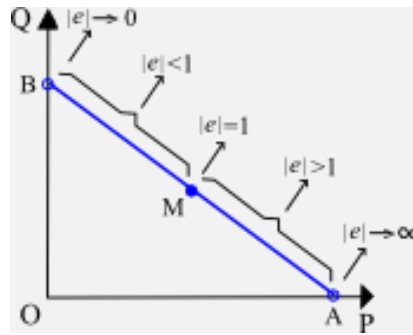


FIG. 7

• **ESERCIZIO 2.** In figura 8 sono rappresentate 5 funzioni di domanda per ciascuna delle modalità descritte. Per ognuna delle domande rappresentate, l'elasticità è costante rispetto a P. Verifica che è così e che effettivamente le relative elasticità siano quelle segnalate nei rispettivi grafici.

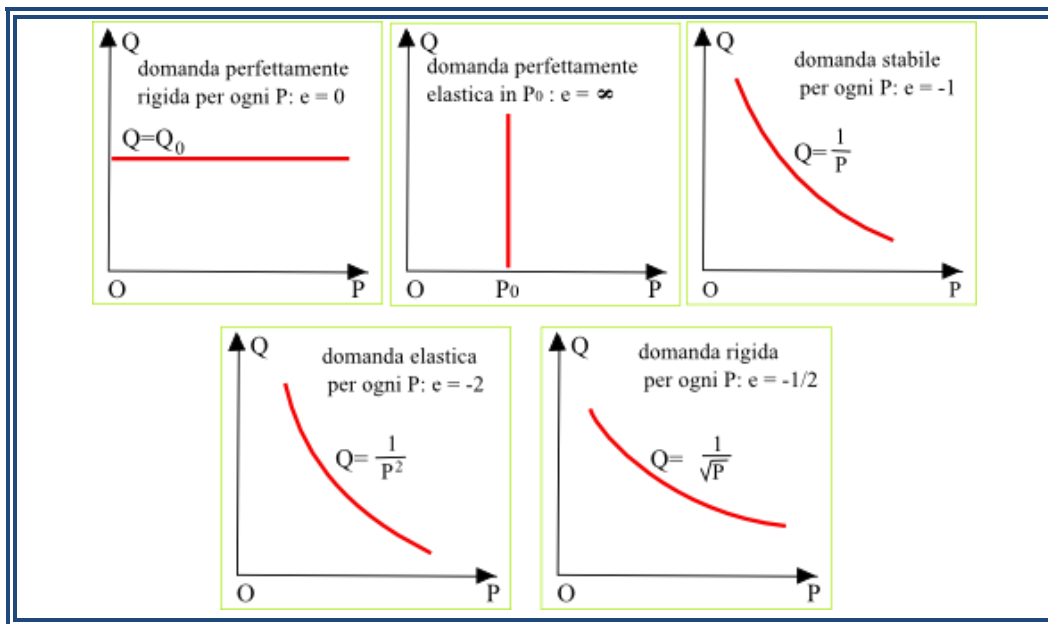


FIG. 8

70.3.3 Quando la funzione di domanda $Q=Q(P)$ è una funzione lineare, come nel precedente esercizio 1, le conclusioni sintetizzate in figura 6 possono essere spiegate anche con considerazioni prettamente geometriche.

A tal riguardo, la funzione di domanda $Q=Q(P)$ sia rappresentata dal segmento AB (Fig. 9).

Sia allora C un suo qualsiasi punto. L'elasticità della domanda in C è data dalla pendenza m della retta AB moltiplicata per il rapporto $\overline{OD}/\overline{DC}$. Siccome $m = \tan \alpha = -\tan \widehat{AC} = -\overline{DC}/\overline{DA}$ allora, nel generico punto C, in corrispondenza del prezzo P:

$$e(P) = -\frac{\overline{DC}}{\overline{DA}} \cdot \frac{\overline{OD}}{\overline{DC}} = -\frac{\overline{OD}}{\overline{DA}} \quad \text{e di conseguenza: } |e(P)| = \frac{\overline{OD}}{\overline{DA}}.$$

Le conclusioni sintetizzate in figura 6 sono a questo punto più che evidenti. Compresse quelle relative ai valori dell'elasticità negli estremi del segmento AB. Quando infatti $C \rightarrow A$, $DA \rightarrow 0$ e $OD \rightarrow DA$, per

cui $|e| \rightarrow \infty$. Quando invece $C \rightarrow B$, $DA \rightarrow OA$ e $OD \rightarrow 0$, per cui $|e| \rightarrow 0$.

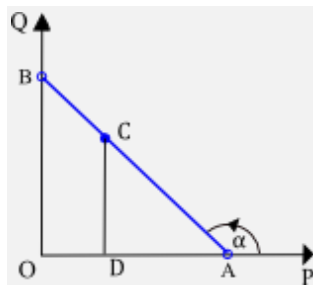


FIG. 9

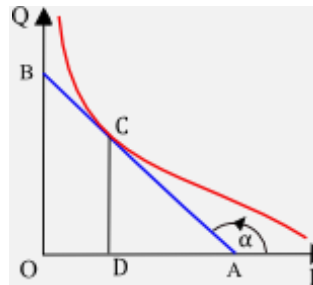


FIG. 10

In realtà l'elasticità della domanda può essere valutata con considerazioni geometriche anche nel caso in cui la funzione $Q=Q(P)$ non è lineare. Basta ricordare che la derivata di Q rispetto a P rappresenta la pendenza della retta tangente al grafico della funzione nel punto P . Precisamente, con riferimento alla funzione di domanda $Q=Q(P)$, non lineare (Fig. 10), ragionando come nel caso precedente si trova anche adesso che:

$$|e(P)| = \frac{\overline{OD}}{\overline{DA}}.$$

Utilizzando questa relazione si potrebbe valutare se $|e(P)|$ è maggiore, minore o uguale ad 1, ma è comunque preferibile la via analitica.

ESERCIZIO (da risolvere). Determinare per quali valori del prezzo P è stabile, elastica o rigida la domanda espressa dalla seguente legge:

a) $Q = 2 - 3P$; b) $Q = 9 - \frac{3}{4}P^2$.

Con riferimento alla seconda delle due leggi, trovare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione nel punto A in cui la domanda è elastica e verificare che il segmento avente per estremi l'origine del sistema di riferimento e il punto in cui la suddetta tangente interseca l'asse P ha come punto medio il punto avente la stessa ascissa di A .

S'intende che, se la funzione di domanda è rappresentata in un sistema di riferimento senza che se ne conosca l'equazione, può essere preferibile valutare la sua elasticità nei vari punti utilizzandone il significato geometrico. A questo riguardo occorre quadrettare opportunamente il grafico ed accontentarsi, se necessario, di una valutazione approssimata.

Per esempio, con riferimento alla funzione di domanda rappresentata in figura (Fig. 11), dove ad ogni scacchetto corrispondono due unità, si può concludere (anche se non molto agevolmente) che la domanda è stabile per $P=11$ (dove $Q=10$), mentre è elastica per $P>11$ (con $Q<10$) e rigida per $P<11$ (con $Q>10$).

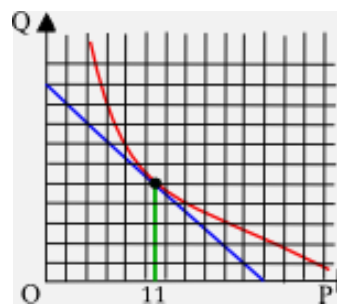


FIG. 11

70.4 ELASTICITÀ DELL'OFFERTA

70.4.1 Per la funzione $S=S(P)$ si definisce l'*elasticità* dell'offerta rispetto al prezzo con le medesime modalità descritte per l'elasticità della domanda. Pertanto, in corrispondenza del generico prezzo P , l'elasticità $e(P)$ è tale che:

$$e(P) = \frac{dS}{dP} \cdot \frac{P}{S}.$$

A differenza dell'elasticità della domanda, che solitamente è negativa, l'elasticità dell'offerta è invece positiva. Ciò perché di norma la funzione di offerta è crescente. Valgono comunque le attribuzioni di offerta *anelastica* (o *stabile*) quando $e=1$, *elastica* quando $e>1$ (in particolare: *perfettamente elastica* se $e \rightarrow \infty$), *rigida* (o *non elastica*) quando $0 < e < 1$ (in particolare: *perfettamente rigida* se $e \rightarrow 0$).

ESERCIZIO. In figura 12 sono rappresentate 5 funzioni di offerta per ciascuna delle modalità descritte. Per ognuna delle offerte rappresentate, l'elasticità è costante rispetto al prezzo. Verifica che è così e che effettivamente le relative elasticità siano quelle segnalate nei rispettivi grafici.

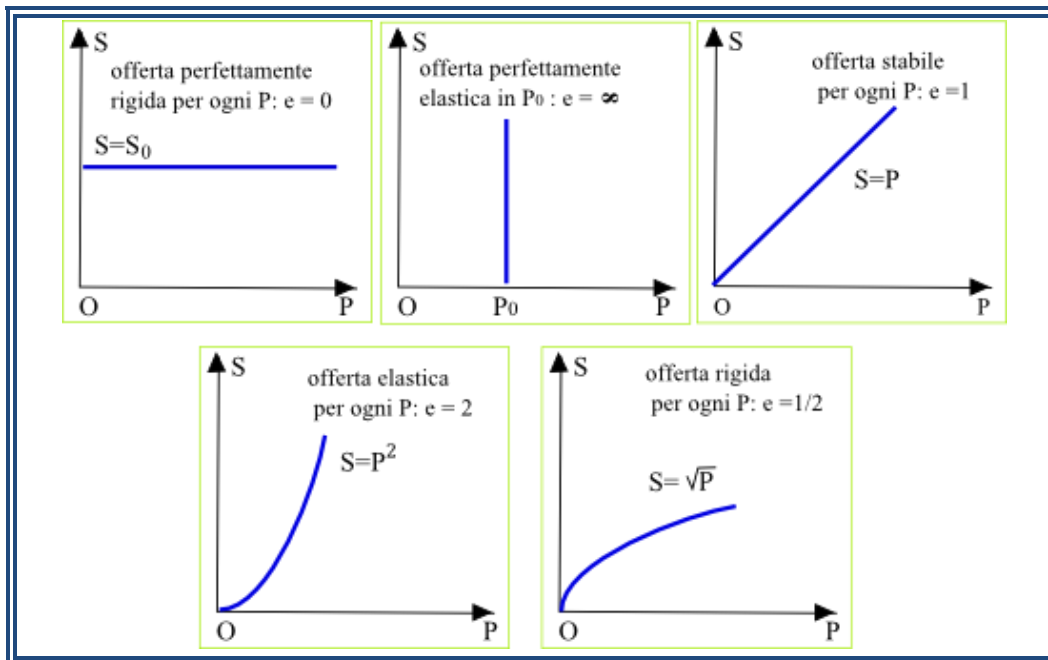


FIG. 12

70.4.2 Anche per la valutazione dell'elasticità dell'offerta si può ricorrere al suo significato geometrico. Vediamo in che modo.

Supponiamo dapprima che la funzione di offerta $S=S(P)$ sia lineare (Fig. 13). Sia allora A un qualsiasi punto del suo grafico. L'elasticità dell'offerta in A è data dalla pendenza m della retta moltiplicata per il rapporto $\overline{OB}/\overline{BA}$. Siccome $m = \tan \alpha = \overline{DA}/\overline{CD}$ e siccome $CD=OB$ allora, nel generico punto A , in corrispondenza del prezzo P , risulta:

$$e(P) = \frac{\overline{DA}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{OB}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{BA}}.$$

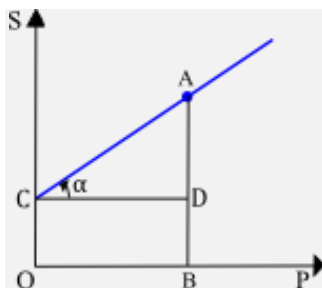


FIG. 13

Si possono trarre alcune conclusioni, a seconda della posizione del punto C in cui la retta, grafico della funzione di offerta $S=S(P)$, interseca l'asse delle ordinate. In particolare:

- se $S_C > 0$ (Fig. 14a) allora $0 < e < 1$: offerta rigida;
- se $S_C = 0$ (Fig. 14b) allora $e = 1$: offerta stabile;
- se $S_C < 0$ (Fig. 14c) allora $e > 1$: offerta elastica.

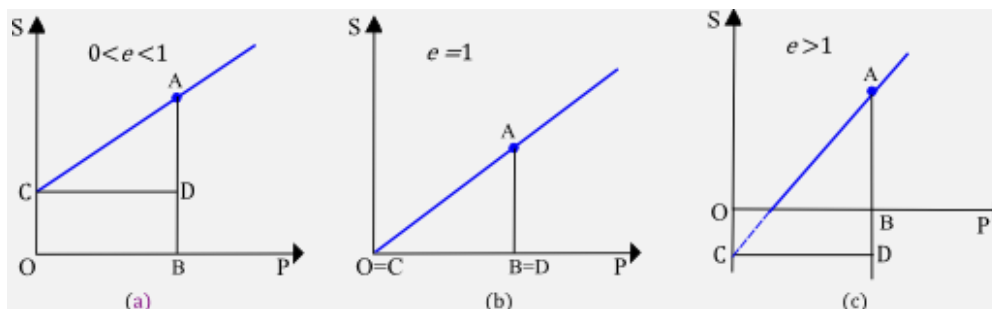


FIG. 14

Occupiamoci adesso del caso in cui la funzione di offerta $S=S(P)$ non è lineare (Fig. 15). Ricordando il significato geometrico della derivata e ragionando come nel caso precedente, si trova:

$$e(P) = \frac{\overline{DA}}{\overline{BA}}$$

Sarebbe possibile, utilizzando questa relazione, valutare se $e(P)$ è maggiore, minore o uguale ad 1. È preferibile comunque il ricorso alla via analitica. Vediamo un esempio.

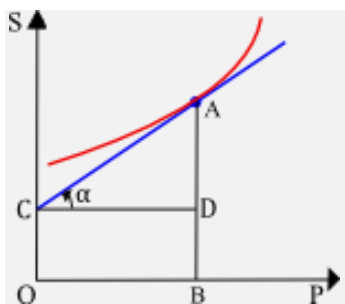


FIG. 15

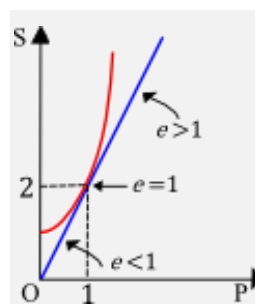


FIG. 16

ESERCIZIO. Posto che la funzione di offerta sia la seguente: $S=P^2+1$, trovare per quali valori di P e di S l'offerta è stabile, elastica o rigida.

RISOLUZIONE. Calcoliamo anzitutto l'elasticità dell'offerta in corrispondenza del generico prezzo P:

$$e = \frac{dS}{dP} \cdot \frac{P}{S} = 2P \cdot \frac{P}{P^2 + 1} = \frac{2P^2}{P^2 + 1}.$$

Si trova facilmente (Fig. 16) che:

- $e=1$ per $P=1$ (offerta stabile) e di conseguenza per $S=2$;
- $0 < e < 1$ per $P < 1$ (offerta rigida) e di conseguenza per $S < 2$;
- $e > 1$ per $P > 1$ (offerta elastica) e di conseguenza per $S > 2$.

70.5 INFLUENZA DELL'ELASTICITÀ DELLA DOMANDA

70.5.1 Non ci vuol molto a capire che l'elasticità della domanda rispetto al prezzo ha una qualche influenza sia sulla spesa che affronta il consumatore per l'acquisto di un bene sia sul ricavo dell'impresa che produce il bene richiesto.

Ma come avviene tale influenza?

È l'interrogativo al quale proveremo a fornire una risposta in questo paragrafo.

70.5.2 Incominciamo con l'occuparci della spesa del consumatore, osservando anzitutto che:

La spesa W che affronta il consumatore per l'acquisto di una data merce si ottiene moltiplicando la quantità Q di merce acquistata per il prezzo P di acquisto di una unità della quantità di merce. Ossia: $W=QP$.

Graficamente, se $Q=Q(P)$ è la funzione di domanda (Fig. 17), la spesa W del consumatore per l'acquisto della quantità Q al prezzo P è data dall'area del rettangolo $OBAC$.

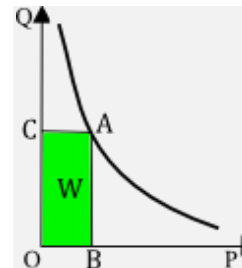


FIG. 17

Ora, se P aumenta sappiamo che Q diminuisce. Ma cosa succede alla spesa? Aumenta, diminuisce, rimane invariata?

La risposta può essere data ricorrendo all'interpretazione geometrica.

Bisogna distinguere tre situazioni, a seconda che l'elasticità della domanda rispetto al prezzo sia elastica, rigida o stabile.

a) Se la domanda è elastica ($|e| > 1$ – Fig. 18), un aumento del prezzo della merce provoca in misura maggiore (più che direttamente proporzionale) una diminuzione della quantità di merce domandata e pertanto una diminuzione della spesa, nel senso che il consumatore è indotto a spendere di meno. La cosa è resa evidente dal fatto che l'area del rettangolo $OB'A'C'$ è minore di quella del rettangolo $OBAC$.

Ovviamente, in questo caso, una diminuzione del prezzo provoca un aumento della spesa.

Per esempio, se la funzione di domanda è $Q=1/P^2$ (com'è di fatto quella rappresentata in figura 18), allora:

$$\text{Area}(OBAC) = \frac{1}{P^2} \cdot P = \frac{1}{P} \quad \text{e} \quad \text{Area}(OB'A'C') = \frac{1}{(P + \Delta P)^2} \cdot (P + \Delta P) = \frac{1}{P + \Delta P}.$$

Pertanto, essendo $\frac{1}{P + \Delta P} < \frac{1}{P}$, risulta $\text{Area}(OB'A'C') < \text{Area}(OBAC)$.

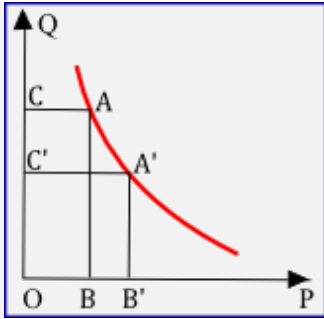


FIG. 18

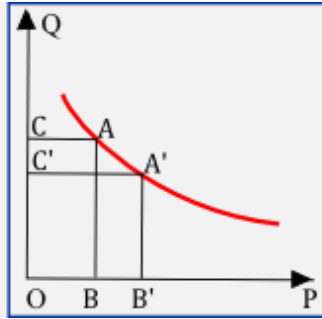


FIG. 19

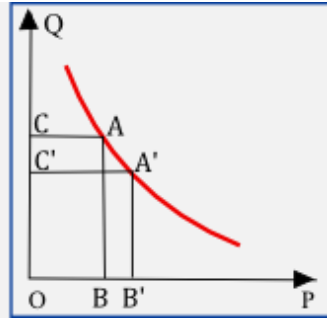


FIG. 20

- b) Se la domanda è rigida ($|e| < 1$ – Fig. 19), un aumento del prezzo della merce provoca in misura minore (meno che direttamente proporzionale) una diminuzione della quantità di merce domandata e pertanto un aumento della spesa, nel senso che il consumatore è indotto a spendere di più.

La cosa è resa evidente dal fatto che l'area del rettangolo $OB'A'C'$ è maggiore di quella del rettangolo $OBAC$.

Ovviamente, in questo caso, una diminuzione del prezzo provoca una diminuzione della spesa.

Per esempio, se la funzione di domanda è $Q=1/\sqrt{P}$ (com'è di fatto quella rappresentata in figura 19), allora:

$$\text{Area}(OBAC) = \frac{1}{\sqrt{P}} \cdot P = \sqrt{P} \quad \text{e} \quad \text{Area}(OB'A'C') = \frac{1}{\sqrt{P+\Delta P}} \cdot (P+\Delta P) = \sqrt{P+\Delta P}.$$

Pertanto, essendo $\sqrt{P+\Delta P} > \sqrt{P}$, risulta $\text{Area}(OB'A'C') > \text{Area}(OBAC)$.

- c) Se la domanda è stabile ($|e|=1$ – Fig. 20), un aumento del prezzo della merce provoca in ugual misura una diminuzione della quantità di merce domandata e pertanto la spesa rimane invariata.

La cosa è resa evidente dal fatto che l'area del rettangolo $OB'A'C'$ è uguale a quella del rettangolo $OBAC$.

Ovviamente, in questo caso, anche una diminuzione del prezzo lascia invariata la spesa.

Per esempio, se la funzione di domanda è $Q=1/P$ (com'è di fatto quella rappresentata in figura 20), allora:

$$\text{Area}(OBAC) = \frac{1}{P} \cdot P = 1 \quad \text{e} \quad \text{Area}(OB'A'C') = \frac{1}{P+\Delta P} \cdot (P+\Delta P) = 1.$$

Pertanto risulta $\text{Area}(OB'A'C') = \text{Area}(OBAC)$.

70.5.3 Il discorso precedente, riguardo ad una domanda stabile, vale se la domanda è stabile in ogni punto della curva di domanda (come accade nel 3° esempio di Fig. 8). Se, al contrario, l'elasticità della domanda varia da punto a punto sulla curva di domanda, nell'eventuale punto in cui essa è stabile la spesa può essere massima o minima o assumere un valore intermedio: dipende dalla funzione di domanda. Ci proponiamo in questo paragrafo di approfondire la questione.

Incominciamo a determinare intanto tutte le funzioni per le quali la domanda è stabile in ogni punto della curva di domanda. Vale a dire le funzioni $Q=Q(P)$ per le quali per ogni $P>0$ risulta:

$$Q'(P) \cdot \frac{P}{Q} = -1, \quad \text{ossia:} \quad \frac{dQ}{dP} = -\frac{Q}{P}, \quad \text{o anche:} \quad \frac{dQ}{Q} = -\frac{dP}{P}.$$

Integrando entrambi i membri dell'ultima equazione, si trova:

$$\int \frac{dQ}{Q} = - \int \frac{dP}{P},$$

da cui, tenendo presente che sia Q sia P sono variabili positive e chiamando k una costante positiva, segue:

$$\ln Q = - \ln P + \ln k, \text{ ossia: } \ln Q = \ln \frac{k}{P}$$

e da qui:

$$Q = \frac{k}{P}.$$

Sono queste tutte e sole le funzioni cercate. L'esempio già considerato (Fig. 8) ne è un caso particolare, quello per cui $k=1$.

Per funzioni di domanda di tipo diverso ci potrebbe essere qualche punto della curva di domanda in cui la funzione è stabile ma potrebbe non esserci alcuno di tali punti. Per esempio, se la domanda è in ogni punto elastica ($|e|>1$ in ogni punto) o rigida ($|e|<1$ in ogni punto), certamente non esiste alcun punto della curva di domanda in cui la domanda è stabile, ossia tale che risulti $|e|=1$.

Occupiamoci comunque delle funzioni di domanda in cui esiste qualche punto in cui la domanda è stabile.

Dimostriamo allora la seguente proprietà.

PROPRIETÀ. Considerata una funzione di domanda $Q=Q(P)$, il grafico della spesa $W=QP$ ha tangente parallela all'asse P (tangente orizzontale) nel punto P in cui:

$$Q'(P) \cdot \frac{P}{Q} = -1,$$

vale a dire nel punto in cui la domanda è stabile.

DIMOSTRAZIONE. Dalla relazione $W=QP$, tenendo presente che Q è funzione di P, segue:

$$W' = Q'(P) \cdot P + Q \text{ e perciò: } W' = 0 \text{ per } Q'(P) \cdot P + Q = 0 \text{ da cui segue: } Q'(P) \cdot \frac{P}{Q} = -1.$$

[c.v.d.]

Ora, però, sapere che in tale punto P la tangente al grafico della funzione W è orizzontale, non è sufficiente per concludere che in tale punto P la funzione W assume un valore massimo o minimo o intermedio: può assumere uno qualunque di tali valori. Dipende dalla funzione di domanda, come mostrano i seguenti esempi, che lo stesso lettore può approfondire dimostrando ciò che vi si afferma.

- La domanda espressa dalla funzione:

$$Q = 5 + P - P^2$$

è stabile solo per $P=5/3$ e in tale punto la spesa W è massima assumendo il valore $W(5/3)=175/27$.

- La domanda espressa dalla funzione:

$$Q = e^{\frac{1}{P}},$$

dove "e" è il numero di Nepero, è stabile solo per $P=1$ e per tale valore la spesa è minima ed è uguale a $W(1)=e$.

- La domanda espressa dalla funzione:

$$Q = \frac{(1-P)^3 + 1}{P}$$

è stabile solo per $P=1$ ma in tale punto la spesa W non è massima né minima (in effetti il grafico di W ha un flesso orizzontale in tale punto). Si ha comunque $W(1)=1$.

In conclusione, se l'elasticità della domanda varia da punto a punto sulla curva di domanda, in un eventuale punto in cui la domanda è stabile la spesa del consumatore può essere massima in quel punto ma può anche essere minima o assumere un valore intermedio e, pertanto, ogni variazione del prezzo della merce non si sa se provoca una diminuzione della spesa o un aumento. Dipende dalle caratteristiche della funzione di domanda.

Concludiamo proponendo a chi legge il seguente esercizio.

ESERCIZIO. Dimostrare che la spesa è massima nel punto in cui la domanda è stabile, con riferimento alla seguente funzione di domanda:

a) $Q=a-bP$, dove a, b sono parametri positivi; b) $Q=75-P^2$.

70.5.4 Due casi particolari sono quelli di una domanda perfettamente elastica o perfettamente rigida.

- Se la domanda è perfettamente elastica ($|e|=\infty$ – Fig. 21) il prezzo di acquisto rimane costante e può essere domandata una qualsiasi quantità di merce. La spesa del consumatore varia mantenendosi direttamente proporzionale alla quantità di merce domandata.
- Se la domanda è perfettamente rigida ($|e|=0$ – Fig. 22) la quantità di merce domandata è indipendente dal prezzo di acquisto, che invece varia. Anche la spesa del consumatore varia ed è direttamente proporzionale al prezzo di acquisto.

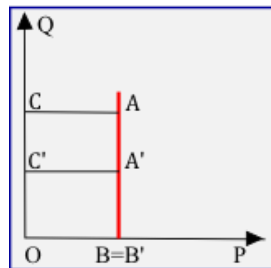


FIG. 21

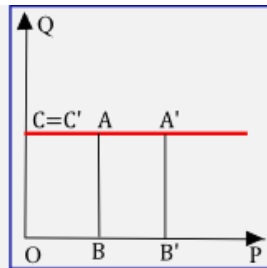


FIG. 22

70.5.5 Riguardo all'influenza dell'elasticità della domanda sul ricavo dell'impresa che produce il bene domandato, bisogna constatare preliminarmente che:

Il ricavo R dell'impresa si ottiene moltiplicando la quantità Q di merce domandata per il prezzo unitario P di vendita. Ossia: $R=QP$.

Ragion per cui le cose vanno esattamente come nel caso della spesa del consumatore. Possiamo limitarci perciò a trarre le conclusioni, che ovviamente sono simili a quelle viste nel caso della spesa:

- Se la domanda è elastica, un aumento del prezzo di vendita comporta una diminuzione del ricavo e, ovviamente, una riduzione del prezzo di vendita comporta un aumento del ricavo.
- Se la domanda è rigida, un aumento del prezzo di vendita comporta un aumento del ricavo e, ovviamente, una riduzione del prezzo di vendita comporta una diminuzione del ricavo.
- Se la domanda è stabile, un aumento del prezzo di vendita o una sua diminuzione lascia invariato il ricavo. (Attenzione: valgono le stesse considerazioni fatte a proposito della spesa.)

- d) Se la domanda è perfettamente elastica, il prezzo di vendita è costante e può essere domandata una qualsiasi quantità di merce. Il ricavo dell'impresa varia mantenendosi direttamente proporzionale alla quantità di merce domandata.
- e) Se la domanda è perfettamente rigida, la quantità di merce domandata è indipendente dal prezzo di vendita, che invece può variare. Anche il ricavo dell'impresa varia ed è direttamente proporzionale al prezzo di vendita della merce.

70.5.6 Soffermiamoci adesso su qualche esercizio, al fine di comprendere meglio come si applicano le nozioni testé apprese.

ESERCIZIO 1. La funzione di domanda di una certa merce è la seguente:

$$Q = 2 + \frac{1}{P^2}.$$

Posto che il prezzo di vendita della merce sia $P=2$, al produttore conviene aumentarlo al fine di ottenere un maggior ricavo? E se il prezzo di vendita fosse $P=0,5$?

RISOLUZIONE. Incominciamo a calcolare l'elasticità della domanda nel generico P :

$$e(P) = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q} = -\frac{2}{P^3} \cdot \frac{P}{2 + \frac{1}{P^2}} = -\frac{2}{2P^2 + 1}.$$

Pertanto:

- $e(2) = -2/9$ e, di conseguenza: $|e(2)| < 1$. La domanda è rigida per $P=2$ e perciò un aumento del prezzo provoca un aumento del ricavo. Al produttore conviene aumentare il prezzo della merce;
- invece $e(0,5) = -4/3$ e di conseguenza: $|e(2)| > 1$. La domanda è elastica per $P=0,5$ e perciò un aumento del prezzo provoca una diminuzione del ricavo. Al produttore non conviene aumentare il prezzo.

ESERCIZIO 2. La funzione di domanda di una certa merce è la seguente:

$$Q = 54 - \frac{1}{2}P^2.$$

Dire per quali valori di P , aumentando P , aumenta la spesa del consumatore per l'acquisto di quella merce e per quali valori diminuisce.

RISOLUZIONE (parziale). Dipende dall'elasticità della domanda. Per i valori di P per i quali la domanda è elastica ($|e| > 1$) la spesa del consumatore diminuisce con l'aumentare del prezzo. Invece per i valori di P per i quali la domanda è rigida ($0 < |e| < 1$) la spesa del consumatore aumenta con l'aumentare del prezzo. Bisogna quindi calcolare, in via preliminare, l'elasticità della domanda e trovare per quali valori di P il suo valore assoluto è maggiore o minore di 1.

Lasciamo a te questo calcolo. Noi ci limitiamo a fornire il risultato, che è il seguente:

$$|e| > 1 \text{ per } P > 6; \quad 0 < |e| < 1 \text{ per } 0 < P < 6.$$

Per $P=6$ la domanda è stabile, per cui ogni variazione del prezzo della merce provoca una diminuzione della spesa del consumatore.

ESERCIZIO 3. La funzione di domanda di una certa merce è la seguente:

$$Q = 300 - kP^2.$$

- a) Trovare per quale valore di k la domanda è elastica per $P=5$.
- b) Dimostrare quindi, per la funzione di domanda così ottenuta, che il ricavo subisce comunque una diminuzione sia se il prezzo aumenta, a partire dal valore $P=5$, sia se diminuisce.
- c) Calcolare che per due valori del prezzo P il ricavo è uguale a 568 e che per uno di tali valori la domanda è stabile mentre per l'altro è rigida.

RISOLUZIONE.

a) Calcoliamo anzitutto l'elasticità della domanda nel generico P:

$$e(P) = -2kP \cdot \frac{P}{300 - kP^2} = -\frac{2kP^2}{300 - kP^2}.$$

Siccome $|e(P)|=1$ per $P=5$, allora deve essere soddisfatta la seguente equazione in k:

$$\frac{2k \cdot 25}{300 - k \cdot 25} = 1, \text{ da cui segue: } k = 4.$$

b) Per il valore di k così trovato, e quindi per la funzione di domanda $Q=300-4P^2$, il ricavo nel generico P è dato dalla seguente espressione:

$$R(P) = QP = (300 - 4P^2)P.$$

Si calcola per quale valore di P il ricavo $R(P)$ è massimo. Ma questo lo lasciamo fare a te. Ovviamente troverai che ciò accade per $P=5$ e che $\max(R(P))=1000$. Ne consegue che sia aumentando il valore di P, a partire da $P=5$, sia diminuendolo, $R(P)$ diminuisce.

c) Bisogna calcolare per quale valore di P risulta: $(300-4P^2)P=568$, vale a dire: $P^3-75P+142=0$. Dopo aver verificato che un valore di P che annulla il primo membro è $P=2$, l'equazione si può mettere nella seguente forma: $(P-2)(P^2+2P-71)=0$. Risolvendo e accettando le sole radici che cadono nell'intervallo $0 < P < 5\sqrt{3}$, si trovano le due soluzioni $P=2$ e $P=6\sqrt{2}-1 \approx 7,48$. Nel primo di tali valori si ha: $e(P) \approx -0,11$ (domanda rigida), nel secondo si ha: $e(6\sqrt{2}-1) \approx -5,90$ (domanda elastica).

VERIFICHE

1. Il costo totale $C_t(x)$, espresso in migliaia di euro, varia al variare della quantità x di merce secondo la seguente legge:

$$C_t(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + 3, \text{ con } x > 0.$$

Trovare l'espressione del costo marginale e rappresentare le due funzioni sullo stesso piano cartesiano. Quanto vale il costo totale in corrispondenza del costo marginale nullo? [R. ...; $\approx \text{€ } 2944$]

2. Il costo totale $C_t(x)$, espresso in migliaia di euro, varia al variare della quantità x di merce secondo la seguente legge:

$$C_t(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{7}{8}x^2 - 2x + 10, \text{ con } x > 0.$$

Trovare l'espressione del costo marginale e rappresentare le due funzioni sullo stesso piano cartesiano. Quanto vale il costo totale in corrispondenza del costo marginale nullo? [R. ...; $\approx \text{€ } 4737$]

3. Il costo marginale $C_m(x)$ varia al variare della quantità x di merce secondo la seguente legge:

$$C_m(x) = 2x - 3, \text{ con } x > 0.$$

Trovare l'espressione del costo totale $C_t(x)$ sapendo che $C_t(0)=5$. Rappresentare quindi le due funzioni sullo stesso piano cartesiano.

4. Il costo marginale $C_m(x)$ varia al variare della quantità x di merce secondo la seguente legge:

$$C_t(x) = 2x^2 - \frac{5}{2}x - 2, \text{ con } x > 0.$$

Trovare l'espressione del costo totale $C_t(x)$ sapendo che $C_t(0)=8$. Rappresentare quindi le due funzioni sullo stesso piano cartesiano.

5. Un'azienda produce un articolo con un costo medio di produzione di € 1,2 ed una spesa fissa mensile di € 1800. Sapendo che l'articolo viene venduto a 1,8 euro al pezzo, calcolare quanti pezzi biso-

6. gna produrre e vendere in un mese affinché l'azienda non subisca un deficit. [R. almeno 3000 pezzi]
6. Su un'autovettura predisposta "a benzina" si vuole installare un impianto "a gasolio". La benzina costa 1,785 euro al litro e il gasolio 1,686 euro al litro. Il costo dell'impianto è di € 2400, la tassa annua per il bollo per l'auto a benzina di € 490, quella per l'auto a gasolio di € 580. La vettura percorre mediamente 12 km con un litro di carburante, quale che esso sia.
Trovare qual è il minimo numero di chilometri che si devono percorrere mediamente in un anno affinché risulti conveniente l'installazione dell'impianto a gasolio, posto che, dopo l'installazione, si prevede che si possano percorrere complessivamente 150000 km.
7. Un allevatore di bestiame vuole preparare del mangime per gli animali mescolando due sostanze – A, B – in modo che la quantità di A sia uguale al reciproco della metà di B. Calcolare quale combinazione determina il minimo costo per l'allevatore sapendo che la sostanza A costa 0,30 €/kg e la sostanza B costa 0,42 €/kg e sapendo inoltre che gli servono almeno 2 kg di miscela.
[R. $\approx 1,67$ kg di A, $\approx 1,20$ kg di B; $\min C_t \approx \text{€ } 1,00$]

8. Le funzioni:

$$y = \frac{5}{4}x^2 - \frac{79}{4}x - 24 + \frac{10}{x} \quad \text{e} \quad x = 20 - \frac{P}{2},$$

dove x è espresso in quintali ed y, P in euro per quintale, rappresentano rispettivamente il costo medio e la domanda di un certo prodotto. Determinare la quantità di prodotto che:

- a) massimizza il ricavo totale; b) minimizza il costo marginale; c) massimizza il profitto.

Trovare inoltre i corrispettivi prezzi di vendita della merce.

[R. a) 10 q, 20 €/q; $\approx 5,27$ q, $\approx 29,47$ €/q; $\approx 11,02$ q, 17,97 €/q]

9. Una fabbrica produce certi articoli che vende al prezzo unitario di € 50. Il costo medio di un articolo per acquisto di materia prima è di € 10, ma ogni mese (= 25 giorni lavorativi) la fabbrica deve sostenere una spesa fissa aggiuntiva di € 16000. La produzione giornaliera non può superare le 50 unità. Stabilire quale produzione giornaliera procura all'azienda:

- a) il massimo profitto; b) una perdita.

[R. 1) 50 articoli; 2) meno di 16 articoli]

10. Una fabbrica produce certa merce che vende a 25 euro al quintale. Il costo medio di un quintale, per l'acquisto della materia prima e per le spese di lavorazione, ammonta a € 17, ma ogni mese (= 25 giorni lavorativi) la fabbrica deve sostenere una spesa fissa aggiuntiva di € 4000.

Stabilire quale produzione media giornaliera procura alla fabbrica:

- a) il massimo profitto; b) una perdita,

sapendo che la produzione giornaliera non può superare i 50 q.

[R. 1) 50 q; 2) meno di 20 q]

11. Un'azienda produce giornalmente della merce sostenendo una spesa fissa di € 30. Ciascuno dei primi due quintali di merce costa € 7 all'azienda, mentre ogni quintale successivo comporta una spesa aggiuntiva di € 0,2 rispetto al precedente.

Determinare quanti quintali di merce conviene produrre per ridurre al minimo il costo medio giornaliero e qual è, per questa produzione, il costo totale giornaliero. [R. $\approx 17,38$ q; $\approx \text{€ } 176,85$]

12. Con riferimento all'esercizio precedente, si supponga che la richiesta di un numero x di quintali della merce prodotta sia regolata dalla legge $x=50-4P$, dove P è il prezzo di vendita in euro/quintale. Determinare quanti quintali di merce deve produrre l'azienda affinché realizzi il massimo profitto e quant'è questo profitto e il prezzo di vendita.

Amnesso poi che l'offerta sia regolata dalla legge $y=3P-13$, calcolare il prezzo della merce che determina la situazione di equilibrio fra domanda ed offerta.

13. Un'azienda produce degli articoli con un costo medio di € 400 per l'acquisto della materia prima e per la manodopera; sopporta inoltre una spesa fissa settimanale di € 90.000. La domanda degli articoli è regolata dalla seguente legge: $n = 680 - 0,4P$ dove n è il numero degli articoli richiesti e P è il prezzo di un articolo espresso in migliaia di euro. Nell'arco di una settimana l'azienda non può produrre più di 500 pezzi. Trovare quale produzione procura all'azienda il maggior guadagno e quale la manda in deficit. [R. $n=260$; $n < 83$ oppure $n > 437$]
14. Gli articoli venduti da un'azienda hanno un costo medio (in migliaia di euro) espresso dalla seguente formula:

$$C_u = \frac{3}{2}n^2 - 15n + 26 + \frac{108}{n},$$

dove n è il numero di articoli venduti. La legge che regola la domanda di quell'articolo è la seguente:

$$3P + 10n = 120,$$

dove il prezzo P è espresso in migliaia di euro per articolo. Calcolare:

- il prezzo critico;
- il minimo costo totale sopportato dall'azienda e il relativo prezzo unitario di vendita;
- il massimo profitto che l'azienda può realizzare e il corrispondente prezzo unitario di vendita.

[R. a) € 8000; \approx € 46605, \approx 21191 €/articolo; \approx € 73071, \approx 20905 €/articolo]

15. Per la fabbricazione di un certo articolo un imprenditore deve affrontare:
- una spesa di € 2500 per ogni articolo prodotto, per acquisto di materia prima e lavorazione;
 - una spesa fissa settimanale di € 1.050.000.
- Determinare quale prezzo fisserà l'imprenditore per ottenere il massimo profitto, sapendo che la domanda del prodotto è regolata dalla seguente legge:

$$n = 25 - \frac{3}{10}P,$$

dove P è il prezzo di vendita dell'articolo espresso in migliaia di euro ed n rappresenta il numero di articoli venduti. [R. \approx 42915 €/articolo]

16. Sono stati rilevati i dati registrati nella tabella sottostante relativamente alla domanda ed all'offerta di un certo bene di consumo.

Prezzo P (€)	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Quantità Q_d di domanda	230	215	190	185	178	165	155	140	130	120
Quantità Q_s di offerta	150	155	156	165	174	185	200	205	210	220

- Rappresentare i dati sperimentali su uno stesso piano cartesiano (si suggerisce di usare colori diversi per i valori di Q_d e quelli di Q_s).
- Dalla rappresentazione grafica si evince che i dati sperimentali non si discostano molto da un andamento lineare sia per la funzione di domanda sia per la funzione di offerta. Accettata questa ipotesi, la funzione di domanda è del tipo $Q_d = aP + b$ e quella di offerta è del tipo $Q_s = rP + s$. Determinare tali funzioni e calcolare il prezzo di equilibrio.
- Compilare una tabella che fornisca i valori della funzione di domanda e di quella di offerta per gli stessi valori dei prezzi elencati nella tabella assegnata, in base al modello teorico ottenuto e confrontare tali valori con quelli effettivi. Qual è la differenza massima (in valore assoluto) per la domanda? Quale per l'offerta?

[R. Niente da fare: il ricavo diminuirebbe comunque. Perché?]

27. La funzione di domanda di una certa merce è la seguente:

$$Q = 96 - 2P^2.$$

Il commerciante vende la merce a 4 €/kg ma vorrebbe aumentare il suo ricavo. Gli conviene aumentare o diminuire il prezzo?

[R. Niente da fare: il ricavo diminuirebbe comunque. Perché?]

28. La funzione di domanda di una certa merce è la seguente:

$$Q = 340 - \frac{3}{2}P^2,$$

dove Q è espressa in chilogrammi e P in euro su chilogrammi.

- Calcolare l'elasticità della domanda in corrispondenza del prezzo $P=12$ €/kg.
- Il venditore decide di aumentare il prezzo unitario di vendita del 5%. Calcolare la variazione percentuale del suo ricavo.

[R. a) ... ; b) Il ricavo diminuisce del 13,7%.]

29. La funzione di domanda di una certa merce è la seguente:

$$Q = 30 - 4P - \frac{1}{10}P^2.$$

- Trovare per quali valori di P la domanda è stabile, elastica o rigida.
 - Verificare che nel punto in cui la domanda è stabile il ricavo del venditore è massimo.
 - Verificare che, oltre che per $P=5$, il ricavo è uguale a 37,5 per un altro valore di P: trovarlo. Stabilire inoltre di che tipo è la domanda in questi due valori, vale a dire se è stabile, elastica o rigida.
 - Il venditore decide di aumentare del 10% il prezzo di vendita, che attualmente è $P=2$. Qual è la variazione percentuale del suo ricavo?
30. È data la funzione $y=20-x-x^2$, con $x>0$ e $y>0$. Una volta costruite le funzioni:

$$f(x) = y' \cdot \frac{x}{y} \quad \text{e} \quad g(x) = xy,$$

si dimostri che la funzione $g(x)$ è massima per il valore di x per il quale $f(x)=-1$.

Qual è il significato economico di questo fatto?

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

DOMANDE

- Come si definisce il costo totale? Cos'è il costo unitario?
- In economia cosa s'intende per "punto di fuga"? E per "prezzo critico"?
- Cos'è, concettualmente, il costo marginale? Come si ottiene?
- Il ricavo e il profitto di un'azienda produttrice di una data merce sono la stessa cosa?
- Una ditta di trasporti chiede 50 euro per quintale fino a 10 q e 30 euro per quintale oltre i 10. Quale funzione esprime il costo del trasporto per mezzo del numero n di quintali trasportati?
- Cos'è un bene voluttuario? Cosa un bene essenziale?
- Quando la domanda di un certo prodotto si dice elastica?
- È vero che una domanda è anelastica se non è elastica?
- È vero che l'elasticità della domanda è misurata in euro?

10. Al prezzo P_1 corrisponde la domanda Q_1 , mentre al prezzo P_2 corrisponde la domanda Q_2 . L'elasticità della domanda rispetto al prezzo è la stessa nel passaggio da P_1 a P_2 e nel passaggio da P_2 a P_1 ?
11. In un mercato in cui la domanda di una certa merce è elastica, al produttore conviene diminuire il prezzo della merce al fine di ottenere un ricavo maggiore?

RISPOSTE.

- 1 Il costo totale è l'insieme delle spese che compie un'azienda per produrre un determinato articolo. Il costo unitario, detto anche costo medio, è il rapporto fra il costo totale per produrre x articoli ed il numero x degli articoli prodotti. Oppure, riferito ad altra situazione, il rapporto fra il costo totale per produrre una certa quantità x di merce e la medesima quantità x prodotta.
- 2 Il punto di fuga è il punto in cui il grafico del costo medio ha il minimo assoluto. Se il costo di una unità del prodotto è inferiore al valore che il costo medio assume nell'ascissa del punto di fuga, è opportuno che l'azienda lasci il mercato. Il prezzo critico non è altro che il valore del costo medio nel punto di fuga.
- 3 Il costo marginale è il rapporto tra la variazione del costo totale e la (piccola) quantità addizionale di merce che determina quella variazione. Se $f(x)$ rappresenta la funzione "costo totale", il costo marginale è rappresentato dalla funzione $f'(x)$.
- 4 No. Il ricavo (totale) è costituito dal denaro che l'azienda incassa in seguito alla vendita della merce prodotta, mentre il profitto (o guadagno) è la differenza fra il ricavo (totale) e il costo totale.
- 5 La funzione richiesta è una funzione lineare a tratti: $C(n) = \begin{cases} 50n & \text{se } 0 < n \leq 10 \\ 30n + 200 & \text{se } n > 10 \end{cases}$
- 6 Un bene si dice voluttuario quando anche a fronte di lievi aumenti (o diminuzioni) di prezzo si hanno forti diminuzioni (o aumenti) della domanda. E si dice essenziale quando si caratterizza per una debole diminuzione (o aumento) della domanda anche a fronte di sensibili aumenti (o diminuzioni) di prezzo. Un bene voluttuario si dice anche bene di lusso, un bene essenziale si dice anche bene di prima necessità.
- 7 La domanda si dice elastica se l'elasticità ha valore assoluto maggiore di 1, dove per "elasticità" della domanda (rispetto al prezzo) s'intende il rapporto fra la variazione percentuale della domanda e la variazione percentuale del prezzo.
- 8 Non è proprio così. In effetti, una domanda si dice anelastica (o stabile) se la sua elasticità ha valore assoluto uguale ad 1, si dice non elastica (o rigida) se l'elasticità ha valore assoluto minore di 1.
- 9 È falso. L'elasticità della domanda è infatti un numero puro, cioè è un numero privo di "etichetta".
- 10 No, non è la stessa. Ciò perché, pur rimanendo costante il rapporto $|\Delta Q/\Delta P|$, nel primo caso bisogna moltiplicare questo rapporto per P_1/Q_1 al fine di ottenere l'elasticità della domanda in P_1 , mentre nel secondo bisogna moltiplicarlo per P_2/Q_2 al fine di ottenere l'elasticità della domanda in P_2 . Ed evidentemente i due rapporti P_1/Q_1 e P_2/Q_2 non sono uguali.
- 11 Se la domanda è elastica, una diminuzione del prezzo provoca un aumento del ricavo. Al produttore conviene diminuire il prezzo della merce.

COMPLEMENTI: DOMANDA E OFFERTA IN PIÙ MERCATI.

Le nozioni di microeconomia esposte in questa unità servono a dare un'idea dell'argomento, ma certamente non lo esauriscono.

Per esempio, parlando della funzione di domanda, abbiamo più volte precisato che si tratta di una funzione decrescente, per la quale ad aumenti del prezzo della merce corrispondono riduzioni della domanda e, ov-

viamente, ad abbassamenti del prezzo corrispondono aumenti della domanda.

Esistono tuttavia beni per i quali un aumento del prezzo comporta un innalzamento della domanda e ad una diminuzione del prezzo corrisponde un abbassamento della domanda: si tratta di beni piuttosto rari e sono noti come *beni di Giffen*⁽²⁾. Non ce ne occuperemo.

Un altro esempio. Fin qui abbiamo preso in considerazione domanda e offerta relative ad un solo mercato, vale a dire ad un mercato in cui si scambia una sola merce. È chiaramente una situazione puramente teorica. In effetti un'analisi più realistica dovrebbe riguardare più mercati. Vi facciamo un breve cenno, anche se fermeremo la nostra attenzione solamente su due mercati (luce / gas; lavoro maschile / lavoro femminile; ovini / suini; ovini / bovini; eccetera). In tal caso i prezzi dei due beni in vendita, P_1 e P_2 , influenzano sia la domanda Q_1 nel primo mercato sia la domanda Q_2 nel secondo.

Per esempio, le due funzioni di domanda potrebbero essere le seguenti:

$$Q_1 = 69 - 6P_1 + 3P_2 \quad \text{e} \quad Q_2 = 87 + 4P_1 - 12P_2.$$

E si capisce facilmente che sia Q_1 sia Q_2 variano al variare di P_1 e/o di P_2 . In particolare:

- per $P_1=4$ e $P_2=3$ si ottiene $Q_1=54$ e $Q_2=67$;
- per $P_1=3$ e $P_2=4$ si ottiene $Q_1=63$ e $Q_2=51$.

Per parte loro, le offerte S_1 ed S_2 nei due mercati continuano a dipendere solamente dal prezzo della merce del relativo mercato.

Naturalmente anche nell'analisi di domanda e offerta in due mercati si pone il problema di trovare la *situazione di equilibrio*, vale a dire per quali valori di P_1 e P_2 risulta $Q_1=S_1$ e $Q_2=S_2$.

Per esempio, supponiamo che le funzioni di domanda nei due mercati siano quelle considerate sopra, mentre le funzioni di offerta sono le seguenti:

$$S_1 = 12P_1 + 6 \quad \text{e} \quad S_2 = 25P_2 - 8.$$

Ebbene, affinché si verifichi una situazione di equilibrio, ossia affinché risulti $Q_1=S_1$ e $Q_2=S_2$, devono essere soddisfatte simultaneamente le due seguenti equazioni nelle incognite P_1 e P_2 :

$$69 - 6P_1 + 3P_2 = 12P_1 + 6, \quad 87 + 4P_1 - 12P_2 = 25P_2 - 8.$$

Risolvendo il sistema delle due equazioni, a conti fatti si trova: $P_1=4$, $P_2=3$ e, di conseguenza: $Q_1=S_1=54$, $Q_2=S_2=67$.

Ti proponiamo, per concludere, la risoluzione di un esercizio.

ESERCIZIO. Trovare la situazione di equilibrio per i seguenti mercati:

a) $Q_1 = 432 - 18P_1 + 6P_2$, $S_1 = 25P_1 + 6$; $Q_2 = 138 + 4P_1 - 8P_2$, $S_2 = 4P_2 + 6$.

[R. $P_1=12$, $P_2=15$; ...]

b) $Q_1 = 74 - 2P_1 + \frac{1}{2}P_2$, $S_1 = 5P_1 - 5$; $Q_2 = 89 + \frac{4}{3}P_1 - 2P_2$, $S_2 = 8P_2 + 5$.

[R. $P_1=12$, $P_2=10$; ...]

² **Giffen**, Robert, economista scozzese, 1837-1910.