

Prerequisiti:

- Calcolare limiti e derivate di funzioni
- Studiare una funzione

Questa unità è indirizzata a tutte le scuole superiori. Gli Istituti Tecnici e gli Istituti Professionali se ne occuperanno nel 2° biennio, i Licei nella 5ª classe

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:

- *enunciare e applicare la regola di Archimede per il calcolo dell'area di un segmento parabolico*
- *delineare un profilo storico del problema delle aree*
- *fornire la definizione di sottografico di una funzione*
- *dimostrare la formula dei trapezi per il calcolo approssimato dell'area sottesa da un grafico*
- *calcolare i valori approssimati di aree sottese da grafici con l'uso di apposito software matematico*
- *enunciare e applicare in casi elementari il teorema fondamentale per il calcolo dell'area sottesa da un grafico*
- *risolvere semplici problemi*

71.1 Segmento parabolico e regola di Archimede.

71.2 Il problema delle aree: un profilo storico.

71.3 Il problema delle aree: calcolo di un'area.

Verifiche.

Una breve sintesi per domande e risposte.

Lettura.

**Sottografico
di una funzione**

Unità 71

71.1 SEGMENTO PARABOLICO E REGOLA DI ARCHIMEDE

71.1.1 Riprendiamo un argomento che abbiamo sfiorato in passato per un approfondimento ⁽¹⁾. Consideriamo una parabola di vertice V ed asse a e conduciamo una corda AB perpendicolare ad a in H (Fig. 1). La regione di piano delimitata dalla parabola e dalla corda AB si chiama **segmento parabolico** di *base* AB ed *altezza* VH.

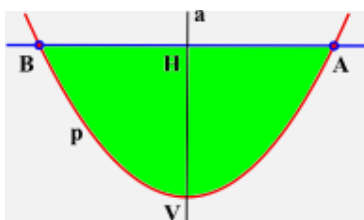


FIG. 1

Archimede, nell'opera *Spirali*, dimostrò una regola per calcolarne l'area.

REGOLA DI ARCHIMEDE. L'area S del segmento parabolico di base AB ed altezza VH è data dalla seguente formula:

$$S = \frac{2}{3} \overline{AB} \cdot \overline{VH}.$$

Della dimostrazione di questa regola, o perlomeno di una equivalente, parla anche Galileo Galilei nell'opera *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* (Giornata Seconda): «Bella e ingegnosa dimostrazione, e tanto più, quanto ella ci dà la quadratura della parabola, mostrandola essere sesquiterza ⁽²⁾ del triangolo inscrittogli, provando quello che Archimede con due tra di loro diversissimi, ma amendue ammirabili, progressi di molte proposizioni dimostrò; come anco fu dimostrata ultimamente da Luca Valerio ⁽³⁾, altro Archimede secondo dell'età nostra, la qual dimostrazione è registrata nel libro che egli scrisse del centro della gravità de i solidi».

71.1.2 Anche noi vogliamo fornire una dimostrazione della regola, ma con un procedimento diverso da quello proposto da Archimede. Per questo ci serve saper calcolare il limite della successione di termine generale:

$$a_n = \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3}.$$

È quello che andiamo a fare in via preliminare. Intanto diciamo che si può dimostrare la seguente formula ⁽⁴⁾ (ad esempio, utilizzando il principio d'induzione, ma anche con una dimostrazione diretta ⁽⁵⁾):

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

¹ Cfr.: Unità 41: Parabola, N° 41.5.

² Sesquiterza è pari a 4/3.

³ **Luca Valerio** (1553-1618), matematico italiano. L'opera cui si riferisce Galilei ha per titolo *De centro gravitatis solidorum libri tres* (1604)

⁴ In realtà, anche questa formula, quantunque non nella forma simbolica da noi proposta e limitata a qualche caso numerico particolare, fu dimostrata da Archimede nell'opera *Spirali* con ragionamenti geometrici, ma era già nota ai Babilonesi. È possibile che anche Democrito di Abdera (V sec. a.C.) la conoscesse.

⁵ Si veda al riguardo: Unità 60: Successioni ricorsive, N° 60.2.3 – esempio 4.

Per cui risulta:

$$\frac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}.$$

A questo punto si calcola facilmente che:

$$\lim \frac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^3} = \frac{1}{3}.$$

71.1.3 La conoscenza di questo limite permette di fornire una dimostrazione della regola di Archimede. Riferiamo, al riguardo, il piano della parabola p ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) in modo che l'origine O coincida col vertice V e l'asse y coincida con l'asse di simmetria della parabola e stabiliamo l'orientamento in modo che p sia situata nel semipiano $y \geq 0$ (Fig. 2).

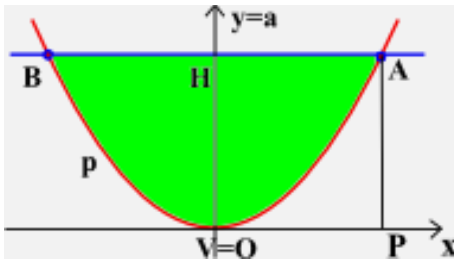


FIG. 2

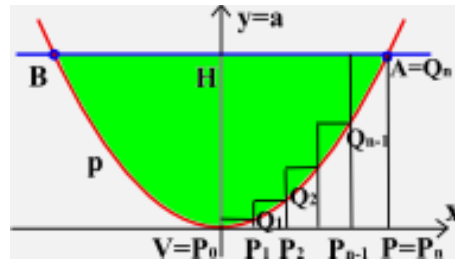


FIG. 3

L'equazione della parabola è allora del tipo $y=ax^2$, con $a>0$. Anzi, siccome per $x=\overline{AH}$ risulta $y=\overline{VH}$, si trova:

$$a = \frac{\overline{VH}}{\overline{AH}^2}.$$

Perciò la parabola ha equazione:

$$y = \frac{\overline{VH}}{\overline{AH}^2} x^2.$$

Ora, per evidenti ragioni di simmetria, l'area S del segmento parabolico è il doppio dell'area del triangolo mistilineo delimitato dall'arco VA di parabola e dai segmenti di retta VH ed AH . D'altronde l'area di questo triangolo mistilineo è uguale a quella del rettangolo $VPAH$ diminuita dell'area S' del triangolo mistilineo delimitato dall'arco VA di parabola e dai segmenti di retta VP e PA . Di modo che: $S=2(\overline{AH} \cdot \overline{VH} - S')$. Non resta allora che calcolare S' . A questo proposito suddividiamo il segmento VP (Fig. 3) in n parti uguali mediante i punti di divisione: $V=P_0, P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n=P$.

Chiamati $Q_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-1}, Q_n$ i punti in cui le parallele all'asse y condotte ordinatamente per $P_0, P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n$ intersecano la parabola, consideriamo quest'area:

$$S_n = \overline{P_0P_1} \cdot \overline{P_1Q_1} + \overline{P_1P_2} \cdot \overline{P_2Q_2} + \dots + \overline{P_{n-1}P_n} \cdot \overline{P_nQ_n}$$

vale a dire la somma di n rettangoli aventi basi di lunghezza uguale ad $\frac{\overline{AH}}{n}$ ed altezze nell'ordine:

$$\overline{P_1Q_1} = \frac{\overline{VH}}{\overline{AH}^2} \cdot \overline{P_0P_1} = \frac{\overline{VH}}{\overline{AH}^2} \left(\frac{\overline{AH}}{n} \right)^2 = \overline{VH} \cdot \frac{1^2}{n^2},$$

$$\overline{P_2Q_2} = \frac{\overline{VH}}{\overline{AH}^2} \cdot \overline{P_0P_2} = \frac{\overline{VH}}{\overline{AH}^2} \left(2 \frac{\overline{AH}}{n} \right)^2 = \overline{VH} \cdot \frac{2^2}{n^2},$$

$$\dots\dots\dots ;$$

$$\overline{P_n Q_n} = \frac{\overline{VH}}{\overline{AH}^2} \cdot \overline{P_0 P_n} = \frac{\overline{VH}}{\overline{AH}^2} \left(n \frac{\overline{AH}}{n} \right)^2 = \overline{VH} \cdot \frac{n^2}{n^2} .$$

$$\text{Pertanto: } S_n = \frac{\overline{AH}}{n} \cdot \overline{VH} \left(\frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \dots + \frac{n^2}{n^2} \right), \text{ ossia: } S_n = \overline{AH} \cdot \overline{VH} \left(\frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3} \right).$$

Il limite di S_n (quando $n \rightarrow +\infty$) è l'area S' . Dunque, tenendo presente il limite calcolato in 71.1.2:

$$S' = \overline{AH} \cdot \overline{VH} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3} = \frac{1}{3} \overline{AH} \cdot \overline{VH} .$$

Di conseguenza:

$$S = 2 \left(\overline{AH} \cdot \overline{VH} - \frac{1}{3} \overline{AH} \cdot \overline{VH} \right) = 2 \cdot \frac{2}{3} \overline{AH} \cdot \overline{VH} .$$

E poiché $2AH=AB$, segue la formula di Archimede.

71.2 IL PROBLEMA DELLE AREE: UN PROFILO STORICO

71.2.1 La ricerca di una formula per il calcolo dell'area di un segmento parabolico è un caso particolare di un problema più generale noto come **problema delle aree**. Con questa denominazione ci si riferisce alla misura di una superficie con contorno curvilineo o mistilineo (cioè in parte curvilineo e in parte rettilineo). Infatti, la misura di una superficie a contorno rettilineo non presenta eccessive difficoltà, potendosi la superficie ripartire in un opportuno numero di triangoli. Questo problema nell'antichità ebbe come massimo studioso lo scienziato siracusano **Archimede** (287 circa - 212 a.C.). Egli, applicando un metodo elaborato da **Eudosso** di Cnido (circa 408 - 355 a.C.) e che dal XVII secolo in poi sarebbe stato chiamato **metodo di esaustione**⁽⁶⁾, dimostrò molte formule di aree di superfici a contorno curvilineo (come il cerchio e l'ellisse) o mistilineo (come il segmento parabolico). Il metodo di esaustione fu introdotto da Eudosso allo scopo di evitare nelle dimostrazioni l'uso diretto dell'infinito e dell'infinitamente piccolo: uso che non era accettato nei ragionamenti matematici. Tale metodo è basato su una riduzione all'assurdo. Cerchiamo di capirne l'essenza.

IL METODO DI ESAUSTIONE.

Si debba dimostrare che due grandezze omogenee A e B sono uguali.

Ragionando per assurdo, si suppone $A > B$. Sia poi possibile costruire in qualche modo una successione di grandezze G_1, G_2, G_3, \dots omogenee ad A e B tale che:

- la successione sia infinita;
- tutti i suoi termini siano minori di A e di B;
- esista una grandezza G della successione in modo che si abbia $A - G < \varepsilon$, comunque piccola sia scelta la grandezza ε omogenea a quelle in esame.

Allora, posto $A - B = \varepsilon$, per la terza delle precedenti condizioni esiste una grandezza G della successione tale che $A - G < \varepsilon$; per questo $A - G < A - B$, da cui $G > B$. Perciò $A > G > B$, contro la seconda delle tre condizioni suddette. Quindi non può essere $A > B$.

⁶ Il matematico fiammingo **Grégoire de Saint-Vincent** (1584-1667) usò per la prima volta la denominazione "metodo di esaustione" nel 1647 in un'opera sulla quadratura del cerchio e delle sezioni coniche. Esattamente l'opera, in due volumi, ha per titolo *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum conic.*

Analogamente si esclude che possa essere $B > A$. Resta l'unica possibilità $A = B$.

Euclide utilizza il metodo di esaustione negli *Elementi*, per dimostrare la proposizione 2 del libro XII:

I cerchi stanno fra loro come i quadrati dei diametri.

La proposizione che la precede (prop. 1) recita:

Poligoni simili inscritti in cerchi stanno fra loro come i quadrati dei diametri.

Da questa proposizione Euclide avrebbe potuto ricavare immediatamente la proposizione 2: bastava considerare i cerchi come poligoni di infiniti lati infinitamente piccoli. Ma così avrebbe fatto un uso diretto proprio dell'infinito e dell'infinitamente piccolo e questo non lo poteva fare: la scienza ufficiale glielo proibiva. Ricorse allora al metodo di esaustione.

Era la prima volta che lo faceva, ma altre ce ne sarebbero state nello stesso libro XII e riguardano, tra l'altro, i volumi di piramide (prop. 7), cono (prop. 10) e sfera (prop. 18).

Vediamo in modo molto stringato, giusto per dare un'idea, come Euclide dimostra la prop. XII, 2 ricorrendo per l'appunto al metodo di esaustione.

Siano allora i cerchi C e C' di diametri d e d' . Si deve dimostrare che:

$$C : C' = d^2 : d'^2.$$

Se questa proporzione non fosse vera allora esisterebbe un'area S maggiore o minore di C' tale che:

$$d^2 : d'^2 = C : S.$$

Euclide, attraverso la costruzione di poligoni idonei, ottenuti raddoppiando via via il numero dei lati del quadrato inscritto nel cerchio, dimostra che non può essere $S > C'$ né $C' > S$. Deve essere perciò $S = C'$.

Come si può constatare, il metodo di esaustione ha un limite: per dimostrare un certo risultato occorre già conoscerlo. Cosa che ammette lo stesso Archimede, come andiamo subito ad evidenziare.⁽⁷⁾

71.2.2 Archimede, come detto, conosceva ed applicava il metodo di esaustione sistematicamente ma faceva precedere la dimostrazione dalla ricerca del risultato basata su un metodo meccanico di sua invenzione. Occorre precisare che la scoperta del "metodo" di Archimede è relativamente recente, giacché avvenuta solo nel 1906, quando il filologo danese Johan Ludvig Heiberg (1854-1928) ritrovò in un palinsesto della biblioteca del Metochion di Costantinopoli un testo matematico del celebre Siracusano, contenente alcune opere o parti di opere che sono presenti anche in manoscritti precedenti e che perciò erano già conosciute. Ma il manoscritto scoperto da Heiberg contiene anche l'unico esemplare del *Metodo*, scritto sotto forma di "lettera ad Eratostene"⁽⁸⁾. In tale lettera, che fa da premessa all'opera vera e propria, si legge:⁽⁹⁾

«[...] decisi di scriverti e di esporti [...] le caratteristiche di un certo metodo, mediante il quale ti sarà data la possibilità di considerare questioni matematiche per mezzo della meccanica. E sono persuaso

⁷ Ci corre l'obbligo di precisare che alcuni autori chiamano "metodo di esaustione" un procedimento del tutto analogo a quello descritto in 71.1.3 per calcolare l'area del segmento parabolico. Metodo che effettivamente consente di "scoprire" risultati. Se non si corresse il rischio di creare un po' di confusione, non avremmo nulla da eccepire al riguardo, a condizione però che sia chiaro che questo non è il metodo creato da Eudosso, che non permette invece di scoprire alcun risultato ma solo di dimostrare che una congettura è vera con una riduzione all'assurdo. Ma una congettura deve esserci, altrimenti il metodo è inefficace.

⁸ **Eratostene** di Cirene, matematico e astronomo greco, amico di Archimede, 275 ca. - 194 a.C.

⁹ ARCHIMEDE, *Opere* (a cura di A. Frajese), coll. Classici, Torino, UTET, 1974.

che questo [metodo] sia non meno utile anche per la dimostrazione degli stessi teoremi. E infatti alcune delle [proprietà] che a me dapprima si sono presentate per via meccanica sono state più tardi [da me] dimostrate per via geometrica, poiché la ricerca [compiuta] per mezzo di questo metodo non è una [vera] dimostrazione: è poi più facile, avendo già ottenuto con [questo] metodo qualche conoscenza delle cose ricercate, compiere la dimostrazione, piuttosto che ricercare senza alcuna nozione preventiva.»

Archimede, nella stessa lettera ad Eratostene, sembra attribuire l'idea che sta alla base del suo metodo a Democrito di Abdera (circa 460 - 370 a.C.) che, applicandola, avrebbe scoperto ancor prima di Eudosso alcuni importanti risultati, ma «*senza fornire la prova*», a differenza di Eudosso che ne aveva anche dato una rigorosa dimostrazione. Cioè, sembra dire Archimede, il metodo aveva solo valore euristico, buono appunto a scoprire il risultato, che però rimane una congettura finché non sarà dimostrato col rigoroso procedimento di Eudosso.

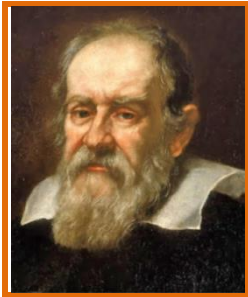
Alla fine di questa unità una "lettura" chiarisce il metodo di Archimede proprio in relazione al calcolo dell'area del segmento parabolico.

71.2.3 Gli studiosi del Rinascimento dunque, pur conoscendo la massima parte dei risultati di Archimede, non ne conoscevano il metodo di analisi, anche se erano consapevoli che egli ne avesse uno. D'altro canto lo stesso Archimede, nella "lettera a Dositeo" ⁽¹⁰⁾ che fa da prefazione all'opera sulla *quadratura della parabola* (opera nota durante il Rinascimento), dichiara di aver trovato il teorema prima per via meccanica e di averlo dimostrato in seguito per via geometrica, senza precisare tuttavia in cosa consista questa *via meccanica*. Ad ogni modo i geometri del Seicento, piuttosto che indovinare il metodo di Archimede, ne ricercarono di nuovi. In quest'opera si distinsero particolarmente **Galileo Galilei** (1564-1642), **Johann Kepler** (1571-1630), **Bonaventura Cavalieri** (1598-1647) ed **Evangelista Torricelli** (1608-1647). Tutti questi studiosi, senza curarsi delle sottigliezze logiche del metodo di esaurimento, affrontarono senza remore e con disinvoltura gli infiniti e gli infinitamente piccoli, gettando le basi per la creazione del calcolo infinitesimale.

- Così Galileo, considerando il tempo (finito) di caduta di un grave come la "somma di infiniti intervalli infinitamente piccoli", durante i quali il moto può essere considerato uniforme, trovò la legge di caduta dei gravi. In linguaggio moderno il ragionamento è il seguente: la legge che dà, in un generico istante t , la velocità v di un grave che cade partendo da fermo è $v=gt$, dove g è l'accelerazione di gravità. Nell'intervallo di tempo $[t, t+\Delta t]$, "sufficientemente piccolo" il grave percorre, con moto che può essere ritenuto uniforme con velocità v , lo spazio $\Delta s = v\Delta t = gt\Delta t$. Se Δt è "infinitamente piccolo", anche Δs è "infinitamente piccolo" e lo spazio s percorso nell'intervallo finito di tempo $[0,t]$ diventa la somma di "infiniti" spazi elementari $gt\Delta t$. Egli trovò così che lo spazio s è dato dalla formula: $s = \frac{1}{2}gt^2$.
- Analogamente operò Kepler per trovare le misure di molte figure curvilinee. La relazione fra l'area del cerchio e la lunghezza della circonferenza e quella tra il volume della sfera e l'area della superficie

¹⁰ **Dositeo** di Pelusio, matematico e astronomo greco, III sec. a.C.

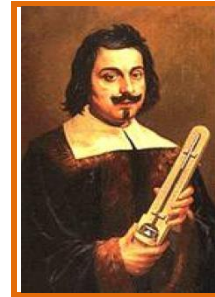
sferica ne sono buoni esempi: è esattamente il suo metodo quello che abbiamo descritto a suo tempo⁽¹¹⁾. Kepler ne tratta nell'opera *Nova Stereometria Doliorum vinariorum* (1615).



Galileo



Cavalieri



Torricelli

- Cavalieri, discepolo di Galileo e studioso dell'opera di Kepler, pensò di organizzare le riflessioni sugli infinitesimi in un trattato noto come la *Geometria degli indivisibili* e pubblicato per la prima volta a Bologna nel 1635. In tale opera egli basa le sue dimostrazioni su considerazioni di carattere infinitesimale del tipo di quelle usate circa 2000 anni prima da Archimede, ma senza sapere di avere avuto un così illustre predecessore. Ne abbiamo fatto più di un cenno in passato, anche se l'argomento a suo tempo fu proposto ai soli studenti dei Licei Scientifici⁽¹²⁾.

La *Geometria degli indivisibili* suscitò all'epoca aspre critiche per le carenze di ordine logico che ne minavano le fondamenta e furono evidenziati molti paradossi che sorgevano dall'applicazione del metodo di Cavalieri. Tuttavia, poiché importanti risultati ai quali permetteva di pervenire erano regolarmente confermati seguendo la rigorosa dimostrazione del metodo di esaustione e poiché aveva un innegabile valore euristico, il metodo degli indivisibili raccolse, seppure per una breve stagione, anche larghi consensi.

- Tra i matematici che utilizzarono sistematicamente il metodo degli indivisibili, pur affiancando le dimostrazioni con altre fatte "alla maniera degli Antichi", vi fu un altro discepolo di Galileo, il giovane Evangelista Torricelli, il quale generalizzò l'idea degli indivisibili di Cavalieri, sviluppando i cosiddetti "indivisibili curvi". Torricelli, consapevole delle critiche che piovevano sul metodo cavalierano, si rese conto che andava presa una precauzione fondamentale per evitare i paradossi⁽¹³⁾: nel passaggio dal rapporto degli indivisibili a quello dei rispettivi continui era necessario che i primi avessero lo stesso "spessore". Così egli, ad esempio in relazione agli indivisibili rettilinei, sostituì le "rette" con "fili", ossia con rette aventi un certo spessore, e fece notare la cosa allo stesso Cavalieri che accettò la correzione. Come precisa lo stesso Torricelli nel "proemio al lettore", che fa da prefazione all'opera *Del solido acuto iperbolico*⁽¹⁴⁾, «Gli Indivisibili curvi [...] nelle figure piane, sono le periferie dei cerchi, [...] le quali hanno il pregio di adattarsi perfettamente alle figure e di avere (per così dire) uno spessore sempre uguale ed uniforme». Con quest'accorgimento, che tuttavia era ben lungi dall'essere rigoro-

¹¹ Per misure cerchio cfr.: Unità 38: Misure di circonferenza e cerchio. Il numero π ; per misure sfera cfr.: Unità 49: Misure dei solidi.

¹² Cfr.: Unità 49: Misure dei solidi.

¹³ Egli stesso fornì 14 esempi in cui l'uso sbagliato degli indivisibili porta a contraddizioni.

¹⁴ EVANGELISTA TORRICELLI, *Opere scelte* (a cura di L. Belloni), coll. Classici, Torino, UTET, 1975.

samente logico, cadevano molti dei paradossi derivanti dall'applicazione del metodo di Cavalieri e nel contempo veniva fatto un passo decisivo verso il futuro calcolo infinitesimale.

71.2.4 Intorno alla metà del Seicento le cose stavano dunque nei seguenti termini riguardo al problema della misura delle superfici piane:

- le superfici a contorno rettilineo non presentavano difficoltà insormontabili;
- i matematici erano in grado di calcolare valori approssimati di ogni area, con la precisione voluta, ma con molto dispendio di tempo per le lungaggini dei calcoli;
- si riusciva a calcolare in modo esatto solo l'area di alcune superfici a contorno curvilineo o mistilineo: il metodo standard era, a parte qualche dettaglio, quello da noi descritto in 71.1.3.

71.3 IL PROBLEMA DELLE AREE: CALCOLO DI UN'AREA

71.3.1 Soffermiamoci sul calcolo del valore approssimato di una data area.

Sia allora $f(x)$ una funzione, che supponiamo continua e provvisoriamente non negativa in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ (Fig. 4). La regione piana T delimitata dal grafico di $f(x)$, dall'asse x e dalle rette $x=a$ e $x=b$ si chiama **trapezoide** (o **rettangoloide**) di base $[a,b]$ relativo alla funzione $f(x)$. Si chiama pure **sottografico** di $f(x)$ sull'intervallo $[a,b]$. In simboli:

$$T = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Ci proponiamo di calcolare un valore approssimato dell'area di T e lo facciamo seguendo il cosiddetto **metodo dei trapezi** (o di **Bézout**⁽¹⁵⁾), anche se esso non è esattamente quello usato nell'epoca alla quale ci riferiamo, vale a dire il Seicento, dal momento che deve farsi risalire alla seconda metà del Settecento. In realtà non è l'unico metodo ma solo quello che ci sembra più opportuno descrivere.

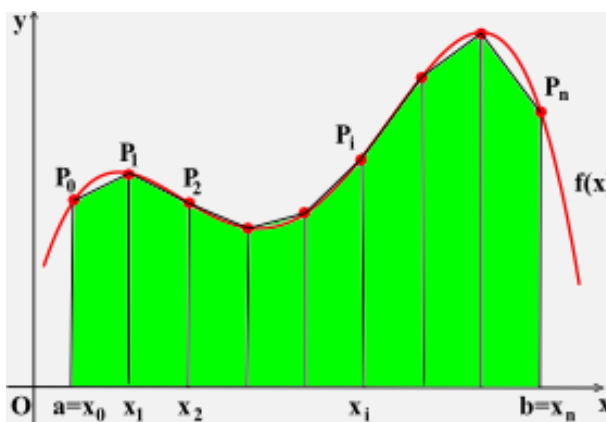


FIG. 4

Dapprima si divide l'intervallo $[a,b]$ in n parti di lunghezza uguale ad $h = \frac{b-a}{n}$; quindi, per i punti di divisione:

$$x_0 = a, \quad x_1 = x_0 + h, \quad x_2 = x_0 + 2h, \quad \dots, \quad x_i = x_0 + ih, \quad \dots, \quad x_n = x_0 + nh = b,$$

si conducono le perpendicolari all'asse x fino ad incontrare il grafico della funzione ordinatamente nei punti $P_0, P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_n$. Costruita la poligonale $P_0P_1P_2\dots P_i\dots P_n$, si vengono a formare n trapezi

¹⁵ **Bézout**, Etienne (1730-1783), matematico francese.

rettangoli aventi tutti altezza uguale ad h e l' i -esimo dei quali ha basi lunghe $f(x_{i-1})$ ed $f(x_i)$, dove $i=1,2,\dots,n$. Il metodo dei trapezi consiste nell'assumere come valore approssimato dell'area $S(T)$ del trapezoide T la somma S_n delle aree di questi n trapezi. Siccome:

$$S_n = \frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}h + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}h + \dots + \frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}h = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2} = \frac{h}{2} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_i)+f(x_{i+1}))$$

allora:

$$S(T) \approx \frac{h}{2} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_i)+f(x_{i+1})) .$$

71.3.2 Questa formula – conosciuta come *formula dei trapezi* – fornisce un'approssimazione di $S(T)$ che è tanto migliore quanto più grande è il numero n delle parti in cui viene suddiviso l'intervallo $[a,b]$.

S'intende che se i calcoli sono fatti "a mano" – come realmente accadeva fino ad alcuni decenni fa – le cose vanno molto per le lunghe, anche per trovare un'approssimazione grossolana.

A titolo di esempio, consideriamo il trapezoide T di base $[0,2]$ relativo alla funzione $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3$. Utilizziamo la formula dei trapezi per calcolare un valore approssimato della sua area.

Per $n=2$ (Fig. 5), per cui $h = \frac{2-0}{2} = 1$, si ha: $x_0=0$, $x_1=1$, $x_2=2$, e in corrispondenza: $f(x_0)=3$, $f(x_1)=2$, $f(x_2)=3$; di conseguenza:

$$S(T) = \frac{h}{2} (f(x_0) + 2f(x_1) + f(x_2)) = \frac{1}{2} (3 + 4 + 3) = 5 .$$

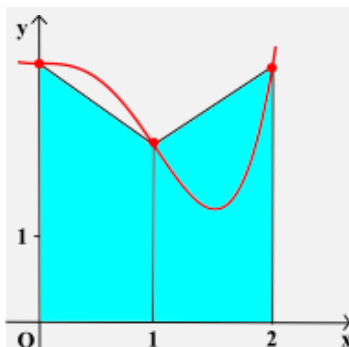


FIG. 5

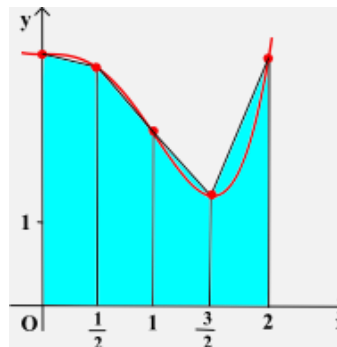


FIG. 6

Per $n=4$ (Fig. 6), per cui $h = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$, si ha $x_0=0$, $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=1$, $x_3=\frac{3}{2}$, $x_4=2$, e in corrispondenza: $f(x_0)=3$, $f(x_1)=\frac{45}{16}$, $f(x_2)=2$, $f(x_3)=\frac{21}{16}$, $f(x_4)=3$; di conseguenza:

$$S(T) = \frac{h}{2} (f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + f(x_4)) = \frac{1}{4} \left(3 + \frac{45}{8} + 4 + \frac{21}{8} + 3 \right) = \frac{73}{16} \approx 4,56 .$$

Per $n=8$, ragionando come sopra si trova $S(T) \approx 4,44$. Lasciamo questo compito a te per esercizio.

Se si dispone di un apposito software matematico e, naturalmente, di un idoneo strumento di calcolo automatico – cosa che oggi è del tutto scontata – non solo si può ottenere il risultato in tempi brevissimi, ma si possono avere approssimazioni con ottime precisioni: tanto per capirci, con valori esatti fino a molti decimali, anche se poi, all'atto pratico, due o tre cifre decimali esatte possono essere più che sufficienti.

Ebbene, con l'uso di un software matematico che implementi un metodo di approssimazione (eventualmente quello dei trapezi, ma non necessariamente), si possono trovare i seguenti risultati:

- L'area del trapezoide T di base [0,2] relativo alla funzione (Fig. 7): $f(x)=x^4-2x^3+3$ è, con valori esatti fino alla quarta cifra decimale: $S(T) \approx 4,4000$.
- L'area del trapezoide T di base [0,3] relativo alla funzione (Fig. 8): $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ è, con valori esatti fino alla quarta cifra decimale: $S(T) \approx 1,2490$.

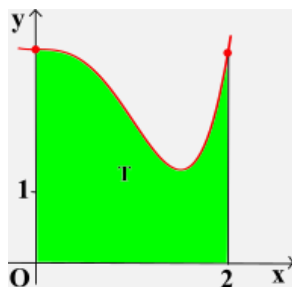


FIG. 7

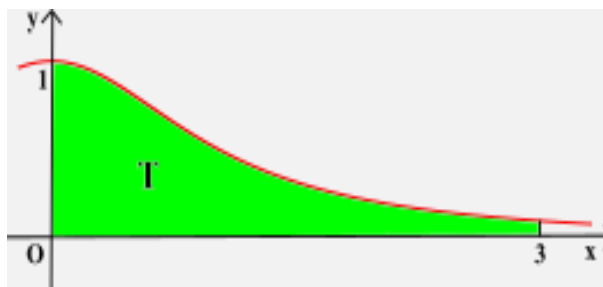


FIG. 8

Ti proponiamo per esercizio di calcolate un valore approssimato dell'area del trapezoide di base [a,b] relativo alla funzione $f(x)$, utilizzando la formula dei trapezi. Successivamente confronta il risultato da te ottenuto con quello che puoi trovare servendoti di un apposito software matematico. Sia:

- a) $f(x)=\frac{1}{x}$, $a=1$, $b=2$; b) $f(x)=\sin x$, $a=0$, $b=\pi$;
 c) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, $a=0$, $b=1$; d) $f(x)=2^x$, $a=0$, $b=1$.

71.3.3 Il procedimento che seguivano i matematici fin quasi alla fine del Seicento comporta notevoli difficoltà operative. Basti ripensare alla dimostrazione della formula di Archimede. Tali difficoltà non consentivano di calcolare il valore esatto dell'area di un qualsiasi trapezoide, ma soltanto di quelle aree di sottografici di funzioni particolarmente semplici. Oppure ci si doveva accontentare di valori approssimati.

Questo fino a che non fu fatta verso la fine del Seicento una geniale scoperta che costituisce un **teorema fondamentale** per il calcolo dell'area di un trapezoide. Il suo enunciato è il seguente:

Considerata una funzione $f(x)$, continua (e provvisoriamente positiva) in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$, per il calcolo dell'area $S(T)$ del trapezoide T di base $[a,b]$ relativo alla funzione $f(x)$, è sufficiente conoscere una funzione $F(x)$, la cui derivata sia $f(x)$, giacché risulta:

$$S(T) = F(b) - F(a).$$

- Per esempio, con riferimento alla stessa funzione:

$$f(x)=x^4-2x^3+3$$

esaminata in 71.3.2, una volta verificato che la funzione:

$$F(x)=\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{2}+3x$$

è tale che $F'(x)=f(x)$, l'area del trapezoide T di base $[0,2]$, relativo alla funzione $f(x)$ è esattamente:

$$S(T)=F(2)-F(0)=\frac{32}{5}-\frac{16}{2}+6=\frac{22}{5}=4,4.$$

- Altro esempio, riferito questa volta alla funzione:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

essa pure esaminata in 71.3.2. Dopo aver constatato che la funzione:

$$F(x) = \operatorname{atan} x$$

è tale che $F'(x) = f(x)$, l'area del trapezoide T di base $[0,3]$, relativo alla funzione $f(x)$ è:

$$S(T) = F(3) - F(0) = \operatorname{atan} 3 - \operatorname{atan} 0 = \operatorname{atan} 3 \approx 1,2490.$$

Rapido ed efficace.

Ti proponiamo adesso un paio di problemi.

1. Nella figura sottostante (Fig. 9) è disegnato il grafico di una funzione $f(x)$ del tipo seguente:

$$f(x) = \frac{ax+b}{(x-c)^2},$$

dove a, b, c sono parametri reali.

Dopo aver determinato tali parametri, trova le coordinate dell'unico flesso presentato dal grafico.

Infine, una volta verificato che una funzione $F(x)$, la cui derivata è $f(x)$, è la seguente funzione:

$$F(x) = \ln(x-1)^4 - \frac{4}{x-1},$$

calcola l'area del trapezoide di base $[2, 3]$ relativo alla funzione in esame.

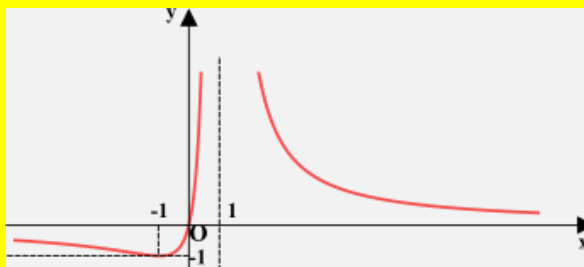


FIG. 9

2. Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) , è assegnata la funzione:

$$f(x) = x^3 - x + 1.$$

a) Dopo aver verificato che una funzione $F(x)$, la cui derivata è $f(x)$, è la funzione seguente:

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + x,$$

calcola l'area del trapezoide T di base $[0,2]$ relativo ad $f(x)$.

b) Trova quindi l'equazione della retta r parallela all'asse x e secante la regione T, la quale, con l'asse x medesimo e con le rette $x=0$ ed $x=2$, individua un rettangolo equivalente al trapezoide T.

c) La retta r si chiama *retta di compensazione*. Essa individua, con le rette $x=0$ ed $x=2$ e con il grafico di $f(x)$, due regioni, una esterna al trapezoide T ed una interna ad esso. Sai dire cosa contraddistingue queste due regioni?

VERIFICHE

Regola di Archimede (nn. 1-13).

1. In un piano cartesiano ortogonale (Oxy) sono assegnati i punti $A(0,1)$, $B(1, -1/2)$, $C(3, -1/2)$.

1. A) Trovare l'equazione della parabola avente l'asse parallelo all'asse y e passante per i punti suddetti.
- B) Trovare le rette tangenti alla parabola nei punti B e C.
- C) Verificare che tali rette s'intersecano in un punto D dell'asse della parabola.
2. A) Calcolare l'area del segmento parabolico individuato dalla parabola e dalla retta BC.
- B) Verificare che l'area del triangolo mistilineo delimitato dall'arco BC della parabola e dai segmenti di retta BD e CD è metà dell'area di detto segmento parabolico.

[R. ... ; 2A) 2/3]

2. In un piano cartesiano ortogonale (Oxy) è assegnata la parabola di equazione $y=5x-x^2$.

1. A) Trovarne le coordinate del vertice e del fuoco.
- B) Trovare le coordinate dei punti A e B ($x_A < x_B$) in cui la parabola è intersecata dalla retta di equazione $y=4$ e le coordinate dei punti C e D ($x_C < x_D$) in cui è intersecata dalla retta $y=-\frac{11}{4}$.
- C) Calcolare l'area del quadrilatero mistilineo ABDC avente per lati i segmenti di retta AB e CD e gli archi di parabola AC e BD.
2. A) Trovare le equazioni della retta tangente alla parabola nel punto A e della retta normale alla parabola nello stesso punto (si dice *normale* alla parabola in un punto la retta perpendicolare alla tangente in quel punto).
- B) Trovare la bisettrice dell'angolo acuto avente il vertice in A e per lati la parallela all'asse della parabola e la congiungente il punto A col fuoco della parabola. (Si può constatare che questa bisettrice coincide con la normale suddetta).

[R. ... ; 1C) 63/2; ...]

3. Il piano sia riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).

1. A) Si disegni in modo approssimato, senza trovarne l'equazione, la parabola p avente l'asse parallelo all'asse y , il vertice nel punto (2,0) e passante per il punto A(0,3).
- B) Chiamato B l'ulteriore punto in cui la parallela all'asse x condotta per A interseca la parabola, si traccino le tangenti a p in A e B e si dica C la loro intersezione.
2. Senza determinare l'equazione della parabola:
 - A) si trovino le coordinate di C;
 - B) si calcolino le aree delle due regioni piane in cui p divide il triangolo ABC.

[R. ... ; 2A) C(2, -3); 2B) 8, 4]

4. In un piano cartesiano ortogonale (Oxy) è assegnata la parabola p di equazione:

$$y = 3x - \frac{x^2}{3}.$$

Condotte le tangenti ad essa per il punto $P\left(\frac{9}{2}, 9\right)$, si chiamino A e B i due punti in cui tali tangenti toccano p. Si calcoli l'area del triangolo mistilineo delimitato dalle rette CA e CB e dalla parabola p.

5. L'ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele è lunga $a\sqrt{2}$, dove a è una lunghezza assegnata. Considerata la parabola avente il vertice nel vertice dell'angolo retto e l'asse perpendicolare all'ipotenusa e passante inoltre per gli altri due vertici del triangolo, calcolare l'area della regione piana compresa tra la parabola ed uno dei cateti del triangolo. [R. $a^2/12$]

6. Il triangolo ABC è isoscele sulla base AB. Questa base e l'altezza relativa ad essa sono lunghe rispettivamente $6a$ e $4a$, essendo a una lunghezza assegnata. Riferito il piano del triangolo ad un conveniente sistema di assi cartesiani (Oxy), trovare l'equazione della parabola avente come asse l'asse

di simmetria del triangolo e tangente in A alla retta AC. Quindi calcolare le aree delle due parti in cui il triangolo è diviso dalla parabola. [R. ... ; $8a^2, 4a^2$]

7. Il trapezio ABCD è isoscele ed è di 60° l'ampiezza di ognuno degli angoli adiacenti alla sua base maggiore AB. Ciascuno dei lati obliqui del trapezio misura 2 m e la base maggiore è lunga il doppio della minore. La parabola p, avente l'asse perpendicolare alle basi del trapezio, ha il vertice in D e passa per A: calcolare le aree delle regioni in cui p divide il trapezio. [R. $\frac{7}{6}\sqrt{3}m^2, \frac{11}{6}\sqrt{3}m^2$]

8. Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la parabola p di equazione $y=x^2+2x+1$. Chiamata p' la parabola che si ottiene da p in seguito alla traslazione di componenti (3,0), determinarne l'equazione e, dopo aver disegnato p e p' sullo stesso piano, calcolare l'area della regione delimitata da esse e dall'asse x. [R. $p' \equiv y=x^2-4x+4; 9/4$]

9. Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la parabola di equazione:

$$y = \frac{x^2}{2}.$$

Dopo aver trovato l'equazione della parabola p' trasformata di p mediante la trasformazione geometrica di equazioni ($x'=2x-5, y'=y$), disegnare le due curve sullo stesso piano. Detto poi A quello, tra i due punti comuni a p e p', che ha ordinata minore e chiamati V il vertice di p e V' quello di p', calcolare l'area della regione piana delimitata dall'arco VA di p, dall'arco AV' di p' e dal segmento VV'.

$$\left[\text{R. } \dots; A\left(-\frac{5}{3}, \frac{25}{18}\right), \frac{125}{54} \right]$$

10. Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la parabola di equazione:

$$y = \frac{x^2}{2} - 2x.$$

Dopo aver trovato l'equazione della parabola p' trasformata di p mediante la trasformazione geometrica di equazioni ($x'=-x, y'=5x-y$), disegnare le due curve sullo stesso piano. Calcolare quindi l'area della regione delimitata da esse.

$$\left[\text{R. } p' \equiv y = -\frac{x^2}{2} + 3x; \dots \right]$$

11. Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la parabola di equazione $y=4x-x^2$. Indicato con V il suo vertice, si trovino su di essa due punti A e B (con $x_A < x_B$) tali che il triangolo VAB sia equilatero. Si calcoli successivamente l'area della porzione di piano delimitata dalla parabola e dalla retta VA. [R. $A(2-\sqrt{3}, 1), \dots; \frac{\sqrt{3}}{2}$]

12. In un piano cartesiano ortogonale (Oxy) sono assegnate le parabole di equazione $y=a-x^2$, dove a è un parametro reale positivo.

1. A) Dimostrare che non hanno alcun punto in comune.
B) Considerata una corda AB della generica parabola, situata nel semipiano $y \geq 0$ e parallela all'asse x, si trovi la sua lunghezza f(t) in funzione dell'ordinata t del punto A.
2. A) Studiare la funzione f(t) e disegnarne l'andamento per $a=1$.
3. A) Indicata con A'B' la proiezione ortogonale della generica corda AB sull'asse x, trovare l'equazione della parabola p della famiglia assegnata per la quale il quadrilatero ABB'A' è un quadrato di area 4.
B) Calcolare le aree delle due regioni piane in cui la corda AB divide il segmento parabolico delimitato da p e dall'asse x.

$$\left[\text{R. } \dots; 3A) p \equiv y = 3 - x^2, 3B) \frac{4}{3}, \frac{4}{3}(3\sqrt{3} - 1) \right]$$

13. È data una semicirconferenza di diametro AB, lungo $2a$, dove a è una lunghezza assegnata. Una circonferenza di raggio r è tangente sia alla semicirconferenza sia al suo diametro AB. Dimostrare che il luogo geometrico del suo centro al variare di r è una parabola e calcolare le aree delle due regioni in cui tale parabola divide il semicerchio assegnato. [R. ...; $\frac{2}{3}a^2$, $\frac{(3\pi-4)}{6}a^2$]

Calcolare – con l’ausilio di apposito software – un valore approssimato, a meno di 10^{-2} , delle aree dei seguenti trapezoidi, dei quali si richiede anche la rappresentazione grafica (nn. 14-18):

14. Trapezoide di base $[1,2]$ relativo alla funzione $f(x) = \frac{2-x}{x+3}$.
15. Trapezoide di base $[0, \frac{\pi}{2}]$ relativo alla funzione $f(x) = \cos x$.
16. Trapezoide di base $[-2,3]$ relativo alla funzione $f(x) = e^x$.
17. Trapezoide di base $[-2,2]$ relativo alla funzione $f(x) = (4-x^2)^2$.
18. Trapezoide di base $[-2,2]$ relativo alla funzione $f(x) = e^{-x^2}$.

Considerata la funzione $f(x)$, disegnarne il grafico in un riferimento cartesiano ortogonale (Oxy). Considerata, poi, la funzione $F(x)$, verificare che $F'(x) = f(x)$ e calcolare l’area del trapezoide di base $[a,b]$ relativo alla funzione $f(x)$, sapendo che (nn. 19-25):

19. $f(x) = 3x^2 + 2$, $F(x) = x^3 + 2x$, $a=0$, $b=1$.
20. $f(x) = e^x$, $F(x) = e^x$, $a=-1$, $b=1$.
21. $f(x) = \sin x$ (con $0 \leq x \leq 2\pi$), $F(x) = -\cos x$, $a=0$, $b=\pi$,
22. $f(x) = \cos x$ (con $0 \leq x \leq 2\pi$), $F(x) = \sin x$, $a=\pi/2$, $b=3\pi/2$.
23. $f(x) = x \cos x$, $F(x) = \cos x + x \sin x$, $a=0$, $b=\pi/4$.
24. $f(x) = \ln x$, $F(x) = x \ln x - x$, $a=1$, $b=e$.
25. $f(x) = \sqrt{x+1}$, $F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}$, $a=-1$, $b=3$.

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

DOMANDE.

1. Il metodo di esaustione per il calcolo di aree e volumi, inventato da Eudosso di Cnido e utilizzato su larga scala da Archimede, fu il metodo standard di dimostrazione durante il Rinascimento. Esso presenta però un difetto. Quale?
2. Quale differenza sussiste, secondo quanto dichiarato dallo stesso Archimede nella “lettera ad Eratostene”, fra il suo metodo e quello di Eudosso?
3. Qual è la formula dell’area di un segmento parabolico di base b ed altezza h ?
4. Considerata una parabola e una sua corda AB, perpendicolare al suo asse di simmetria, si conducono le rette tangenti alla parabola nei punti A e B e si chiama C il punto in cui esse si intersecano. È vero che l’area del triangolo mistilineo delimitato dai segmenti CA e CB e dall’arco AB della parabola è la terza parte del triangolo ABC?
5. Qual è la formula dei trapezi (o di Bezout) per il calcolo approssimato dell’area di un trapezoide?
6. Enuncia il teorema fondamentale per il calcolo dell’area sottesa da un grafico.

RISPOSTE.

1. Il suo difetto è che per dimostrare un risultato bisogna già conoscerlo e il metodo non consente tale scoperta.
2. Il metodo di Archimede permette di scoprire risultati (è, per l'appunto, un metodo euristico) ma non è una vera dimostrazione; quello di Eudosso è una dimostrazione rigorosa ma non permette di scoprire risultati.
3. L'area S del segmento parabolico è data dalla seguente formula $S = \frac{2}{3}bh$.
4. È così. Infatti, se si indica con b la lunghezza del segmento AB (base del segmento parabolico che esso individua sulla parabola) e con h la distanza del vertice della parabola da AB (altezza del segmento parabolico), l'area S del segmento parabolico risulta essere $\frac{2}{3}bh$. Inoltre, essendo $2h$ la distanza di C da AB , l'area S' del triangolo ABC risulta essere bh . Pertanto l'area A del triangolo mistilineo ABC è: $A = bh - \frac{2}{3}bh = \frac{1}{3}bh = \frac{1}{3}S'$.
5. La formula che esprime il valore approssimato dell'area A di un trapezoide di base l'intervallo $[a,b]$ relativo alla funzione reale di variabile reale $f(x)$, che supponiamo continua e non negativa nell'intervallo considerato, è la seguente:

$$S(T) \approx \frac{h}{2} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_i) + f(x_{i+1})), \text{ dove } h = \frac{b-a}{n}$$

ed x_i è il primo estremo dell' i -esimo degli intervalli di ampiezza h in cui l'intervallo $[a,b]$ risulta suddiviso.

6. L'enunciato è il seguente: «Considerata una funzione $f(x)$, continua e non negativa in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$, per il calcolo dell'area $S(T)$ del trapezoide T di base $[a,b]$ relativo alla funzione $f(x)$, è sufficiente conoscere una funzione $F(x)$, la cui derivata sia $f(x)$, giacché risulta: $S(T) = F(b) - F(a)$ ».

LETTURA**Il metodo di Archimede.**

Proponiamo il metodo di Archimede per la determinazione dell'area del segmento parabolico, così come descritto da A. Frajese in *Attraverso la storia della matematica*, Firenze, Le Monnier, 1971.

« Il principio di natura infinitesimale che è alla base del *Metodo* consiste nel considerare le aree come somme di tanti segmenti ottenuti sezionando parallelamente ad una certa direzione. [...]

Si tratti, ad esempio, di determinare l'area del *segmento parabolico* ABC (Fig. 10). [...]

« Archimede considera, oltre al segmento parabolico, anche un'altra figura, di cui con grande facilità può calcolare l'area: precisamente il triangolo rettangolo ACE ottenuto tracciando la retta CE tangente alla parabola nel punto C e la retta AE parallela all'asse DB . Si congiunga C poi col vertice B della parabola: si prolunghi la CB fino a tagliare in F la AE , si prolunghi ancora fino ad avere $FH = CF$. Immaginiamo ora che tanto il segmento parabolico ABC , quanto il triangolo ACE , siano composti (secondo il concetto prima esposto) di tante sottilissime bacchettine, o striscioline, o linee, parallele all'asse BD : sia KL una qualunque di tali linee per il segmento parabolico, sia KN la corrispondente linea per il triangolo.

« Archimede vuole pesare questi due elementi corrispondenti KL e KN, e suppone di disporre di una bilancia avente il fulcro in F. I bracci della bilancia sono disuguali: uno è FH, l'altro è FM. Si ha, perciò, per l'equilibrio, l'inversa proporzionalità fra pesi e bracci, ossia moltiplicando ciascun peso per il rispettivo braccio si ottengono prodotti uguali.

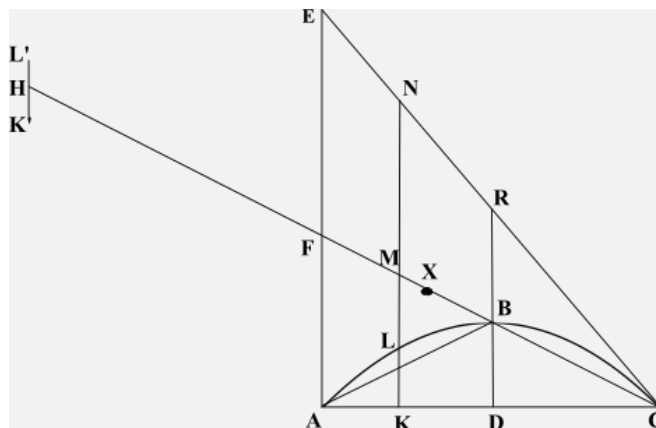


FIG. 10

« Ciò premesso, pesiamo le due linee KL e KN sulla bilancia HM, di fulcro F. E precisamente: lasciamo la linea più lunga (KN) lì dove è, cioè applicata al punto M, estremo del braccio FM della bilancia: trasportiamo invece la linea KL sull'altro piatto della bilancia, in H, cioè portiamola nella posizione K'L'. Si noti che M è il punto medio del segmento KN, ossia è il suo centro di gravità⁽¹⁶⁾. Naturalmente le "linee" si considerano tutte dello stesso materiale omogeneo e della stessa larghezza: perciò sarà il confronto tra le loro lunghezze KL, KN quello che stabilirà il confronto tra i due pesi: si può dire anzi che stabilendo convenientemente le unità di misura i due pesi siano espressi dagli stessi numeri che misurano le due lunghezze KL, KN.

« Ora si dimostra facilmente⁽¹⁷⁾ che $KL : KN = FM : FC$.

« Ossia, dato che si è preso $FH=FC$, $KL : KN = FM : FH$

« Da cui, uguagliando i prodotti dei medi e degli estremi, $KL \cdot FH = KN \cdot FM$.

« Ma questa uguaglianza ci dice che la bilancia è in equilibrio: infatti il prodotto del peso KL (trasportato in K'L') per il suo braccio FH è uguale al prodotto del peso KN (lasciato dov'è) per il suo braccio FM.

« Archimede ha scelto la figura triangolare ACE in modo appunto che si verificasse tale condizione di equilibrio: ed è in questa scelta che consiste la genialità dell'applicazione del procedimento a questo caso particolare.

« Lo stesso ragionamento si può ripetere per tutte le altre coppie di linee corrispondenti: si avrà sempre che la linea del triangolo ACE, lasciata dov'è, farà equilibrio alla corrispondente linea del segmento parabolico ABC, trasportata in H. Sicché, alla fine della pesatura, avremo che tutte le linee componenti il triangolo ACE, lasciate al loro posto, faranno equilibrio a tutte le linee componenti il segmento parabolico ABC, trasportate in H. Ma anziché lasciare tutte le linee del triangolo ACE al loro posto (ciascuna linea venendo applicata in un punto diverso del segmento FC) possiamo supporle tutte raggruppate insieme nel centro di gravità [o baricentro] X del triangolo ACE: centro di gravità che, come è noto, si trova a due terzi della mediana CF, cioè in modo che sia $CX = 2 XF$.

¹⁶ Archimede lo dimostra con considerazioni di geometria elementare. A te proponiamo di dimostrarlo facendo ricorso alla geometria analitica.

¹⁷ Vedi nota precedente.

In definitiva: tutto il segmento parabolico (la cui area S vogliamo determinare) applicato in H fa equilibrio a tutto il triangolo ACE applicato in X . Ma l'area del triangolo ACE , essendo doppia di quella del triangolo AFC , è quadrupla di quella T del triangolo ABC ⁽¹⁸⁾. La condizione di equilibrio ci dà dunque:

$$S \cdot HF = 4 T \cdot FX$$

cioè, essendo $HF (= FC)$ il triplo di FX , perché il baricentro X si trova ai due terzi della mediana:

$$S \cdot 3 FX = 4 T \cdot FX$$

da cui:

$$S = \frac{4}{3} T. [...] \gg$$

Fin qui le considerazioni di Frajese. Aggiungiamo che, essendo T uguale ad $\frac{1}{2} AC \cdot BD$, si ottiene quella che abbiamo indicato come “regola di Archimede”.

Si ricordi che Archimede, una volta ottenuto il risultato con il suo metodo, ne dimostrava la correttezza con il metodo di esaurimento.

¹⁸ Fornisci una spiegazione di questo fatto.