Prerequisiti:
- Calcolare limiti e derivate di funzioni
- Studiare una funzione
- Possedere i concetti di integrale definito e di integrale indefinito

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:

- *integrare semplici funzioni utilizzando metodi elementari d'integrazione e controllare l'esattezza del risultato mediante sia una verifica sia appositi software matematici*
- *risolvere problemi utilizzando il calcolo integrale per il calcolo di aree*

Questa unità non riguarda l'Istituto Tecnico, settore Economico. Tutte le altre scuole ne effettueranno lo studio nella 5ª classe.

73.1 Metodi d'integrazione.

Verifiche.

Una breve sintesi per domande e risposte.

Metodi di integrazione

Unità 73

73.1 METODI D'INTEGRAZIONE

73.1.1 La ricerca di una primitiva di una funzione conduce ad un esito positivo utilizzando uno strumento di calcolo automatico e soprattutto un idoneo software matematico. Può essere tuttavia interessante e istruttivo conoscere i passaggi intermedi che permettono di giungere alla determinazione della primitiva ragionando con "carta e penna". È quello che ci proponiamo di fare in questa unità.

L'integrale indefinito gode di alcune proprietà fondamentali, la cui giustificazione è basata sulla seguente formula:

[1] $$\mathbf{D_x \int f(x)\, dx = f(x).}$$

La spiegazione della quale è presto data. Infatti, posto che F(x) sia una primitiva di f(x), tenendo presente che $\int f(x)dx = F(x)+k$, dove k è una costante, risulta:

$$D_x \int f(x)dx = D_x[F(x)+k] = F'(x) = f(x).$$

Ecco, allora, le prime proprietà dell'integrale indefinito:

- Se c è una costante <u>non nulla</u> ed f(x) è una funzione integrabile in un dato intervallo, in quest'intervallo si ha:

  $$\int c\,f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx.$$

  Infatti i due membri hanno, in virtù della [1], la medesima derivata c f(x).

  Una precisazione circa la costante c. Deve essere $c\neq 0$ poiché se fosse $c=0$ il secondo membro della precedente uguaglianza sarebbe 0, mentre il primo membro sarebbe $\int 0\, dx$, vale a dire una costante arbitraria k e perciò l'uguaglianza non sussisterebbe.
- Se f(x) e g(x) sono funzioni integrabili in uno stesso intervallo, in quest'intervallo si ha:

  [2] $$\int [f(x)\pm g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx\ .$$

  Infatti i due membri hanno, in virtù della [1], la medesima derivata $f(x)\pm g(x)$.

73.1.2 L'ultima proprietà si generalizza facilmente al caso di un numero qualunque n di funzioni:

$$\int [f_1(x)\pm \int f_2(x) \pm \ldots \pm \int f_n(x)]\, dx = \int f_1(x)\, dx \pm \int f_2(x)\, dx \pm \ldots \pm \int f_n(x)\, dx$$

e fornisce il cosiddetto **METODO D'INTEGRAZIONE PER SCOMPOSIZIONE**.

Lo applichiamo ad un paio di situazioni particolari:

- $\int (x^2-2x+3)dx = \int x^2dx - \int 2x\, dx + \int 3\, dx = \frac{x^3}{3} - x^2+3x+k\,.$
- $\int \sin^2\frac{x}{2}\, dx = \int \frac{1-\cos x}{2} dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos x\, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin x + k\,.$

Già l'ultimo esempio mostra come talvolta, prima di poter integrare per scomposizione, bisogna elaborare opportunamente la funzione da integrare. Ora, queste elaborazioni non sempre sono così semplici come nel caso esaminato. Ma noi non ci occuperemo che di casi semplici.

Per il momento ti proponiamo alcuni esercizi.

1. Calcola i seguenti integrali indefiniti:

a) $\int (x^2-3x+1)dx\,;$ b) $\int \left(x^2+\frac{1}{x}\right)dx\,;$ c) $\int \left(x-\sqrt{x}\right)dx\,;$ d) $\int \frac{x^2-4x+2}{2x}dx\,.$

2. Calcola i seguenti integrali definiti:

a) $\int_0^3 (-x^2+3x)dx$; b) $\int_0^1 (\sqrt{x}-x^2)dx$;

c) $\int_0^{2\pi} (2\sin x - \cos x + 3)dx$; d) $\int_0^2 \sin^2 x\, dx + \int_0^2 \cos^2 x\, dx$.

3. Calcola per quale valore di a la retta e la parabola di equazioni rispettivamente:
$$y=ax,\quad y=ax^2,$$
con $a>0$, delimitano una superficie di area $3/8$.

4. Considerata l'iperbole di equazione:
$$y=\frac{1}{2x}$$
siano A e B due suoi punti di ascisse rispettivamente $1/4$ e 2. Calcolare l'area della regione piana delimitata dall'iperbole e dalla retta AB.

5. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnato il trapezio di vertici A(1,0), B(6,0), C(4,3), D(2,3). Calcolare la sua area sia utilizzando la formula dell'area di un trapezio sia utilizzando il calcolo integrale e verificare che i due risultati coincidono.

73.1.3 Un altro metodo d'integrazione è il **METODO D'INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE**.
Ecco in che cosa consiste.

Posto di voler calcolare $\int f(x)dx$ e di non poterlo fare direttamente, si pone dapprima $x=g(t)$, dove $g(t)$ è una funzione della variabile ausiliaria t scelta convenientemente; siccome in questo modo $f(x)$ diventa $f(g(t))$ e $dx=g'(t)dt$, si tratta di calcolare $\int f(g(t))g'(t)dt$ e di sostituire nell'integrale trovato, al posto di t, il valore che si ottiene risolvendo l'equazione $x=g(t)$ rispetto a t.

Qualche esempio chiarirà meglio il procedimento da seguire.

- ESERCIZIO 1. Calcolare:
$$\int \cos 2x\, dx.$$

RISOLUZIONE. Posto $2x=t$, da cui $x=\frac{t}{2}$ e $dx=\frac{1}{2}dt$, si trova:
$$\int \cos 2x\, dx = \int \cos t \cdot \frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\sin t + k = \frac{1}{2}\sin 2x + k.$$
Generalizzando questo procedimento, si può trovare che:
$$\int \cos mx\, dx = \frac{1}{m}\sin mx + k, \qquad \int \sin mx\, dx = \frac{1}{m}\cos mx + k$$
essendo m un numero reale non nullo.

- ESERCIZIO 2. Calcolare:
$$\int [f(x)]^a f'(x)dx,$$
dove a è un numero reale diverso da -1.

RISOLUZIONE. Posto $f(x)=t$ e osservato che $dt = f'(x)\,dx$, si ha:
$$\int [f(x)]^a f'(x)dx = \int t^a dt = \frac{t^{a+1}}{a+1} + k = \frac{[f(x)]^{a+1}}{a+1} + k$$
In particolare, come puoi controllare da solo:
$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = -2\cos\sqrt{x} + k; \quad \int \sin^2 x \cos x\, dx = \frac{\sin^3 x}{3} + k; \quad \int \cos^3 x \sin x\, dx = -\frac{\cos^4 x}{4} + k.$$
Inoltre, combinando questo risultato col metodo d'integrazione per scomposizione:

$$\int \cos^3 x\,dx = \int \cos x \cos^2 x\,dx = \int \cos x\,(1-\sin^2 x)dx =$$

$$= \int \cos x\,dx - \int \sin^2 x \cos x\,dx = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + k.$$

- ESERCIZIO 3. Calcolare:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx.$$

RISOLUZIONE. Basta ragionare come nel caso precedente. Si trova:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + k.$$

Naturalmente se $f(x)>0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$, il valore assoluto è superfluo e il risultato dell'integrale è: $\ln f(x) + k$.

NOTA BENE. Come gli esercizi 2 e 3 si risolvono tutti quelli che con la stessa sostituzione possono essere ricondotti agli integrali immediati elencati nella tabella delle primitive fondamentali e che, per questo sono considerati "integrali quasi-immediati".

- ESERCIZIO 4. Calcolare:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

dove a è una costante (che per comodità supponiamo positiva).

RISOLUZIONE. Posto $x = a\,t$, da cui $dx = a\,dt$, si trova:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{a\,dt}{\sqrt{a^2-a^2t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \operatorname{asin} t + k = \operatorname{asin}\frac{x}{a} + k.$$

ESERCIZI.

1. Calcolare i seguenti integrali (indefiniti e definiti) utilizzando il metodo d'integrazione per sostituzione:

$$\text{a) } \int \sin 3x\,dx;\quad \text{b) } \int 2(2x+1)^2 dx;\quad \text{c) } \int \sin^3 x\,dx;\quad \text{d) } \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx;\quad \text{e) } \int e^{2x}dx.$$

$$\text{f) } \int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx;\quad \text{g) } \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}dx;\quad \text{h) } \int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

2. Spiegare in maniera esauriente e senza l'uso di strumenti di calcolo automatico perché risulta:

$$\text{a) } \int_{1/4}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \frac{\pi}{6};\qquad \text{b) } \int_1^2 \frac{dx}{4+x^2} = \frac{1}{2}\operatorname{atan}\frac{1}{3}.$$

3. Dopo aver determinato due numeri reali a, b tali che:

$$\frac{3x-2}{x^2-x} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x},$$

calcolare:

$$\int \frac{3x-2}{x^2-x}dx,\qquad \int_2^3 \frac{3x-2}{x^2-x}dx.$$

73.1.4 In tutti i precedenti esercizi si propone di calcolare integrali, definiti o indefiniti, che per la verità possono essere calcolati, sì, usando la propria testa, ma anche servendosi di un apposito software matematico. Il che potrebbe far pensare che, tutto sommato, non è necessario impegnarsi più di tanto, visto e considerato che le macchine possono risolvere i nostri problemi. Questa, in effetti, è una cosa che pensano in molti. E sbagliano. Sia, anzi soprattutto, perché ragionare con le proprie forze costituisce sempre e comunque un'occasione per crescere e maturare, sia anche perché la macchina non è in grado di risolvere tutti i problemi. Cosa che abbiamo già fatto notare in altre circostanze, ma che anche adesso vogliamo evidenziare attraverso un interessante esercizio.

- ESERCIZIO. È assegnata la funzione f(x) continua per ogni x reale. Si sa che:

$$\int_0^2 f(x)dx = 4.$$

Stabilire se e quali dei seguenti integrali sono calcolabili e qual è il loro valore:

$$\text{a)}\ \int_0^1 f(x)dx, \quad \text{b)}\ \int_0^1 f(2x)dx, \quad \text{c)}\ \int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right)dx.$$

RISOLUZIONE. Qui la macchina non è in grado di risolvere alcunché e bisogna lavorare con la propria testa. Intanto diciamo subito che tutte e tre le funzioni sono integrabili, giacché si tratta di funzioni continue nell'intervallo chiuso e limitato [0,1]. Diverso è il discorso per i valori degli integrali.
Per l'integrale a) non c'è niente da fare: non possiamo dire nulla circa il suo valore. Gli elementi che abbiamo non sono sufficienti per consentirci una risposta.
Riguardo all'integrale b), proviamo a porre 2x=t, da cui segue $x=\frac{t}{2}$ e $dx=\frac{1}{2}dt$. Si ha allora:

$$\int_0^1 f(2x)dx = \int_0^2 f(t)\cdot\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int_0^2 f(t)dt = \frac{1}{2}\cdot 4 = 2.$$

Dunque si conosce il valore dell'integrale b), che è per l'appunto 2.
Proviamo lo stesso ragionamento per l'integrale c). Poniamo per questo $\frac{x}{2}=t$, da cui x=2t e dx=2dt. Dunque:

$$\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right)dx = \int_0^{1/2} f(t)\cdot 2\,dt = 2\int_0^{1/2} f(t)dt\ .$$

Non c'è niente da fare.
In conclusione, dei tre integrali proposti, tutti comunque esistenti, di uno solo si riesce a calcolare il valore, l'integrale b). Degli altri due non si può dire nulla se non che questo valore esiste.

Ti proponiamo adesso di risolvere il seguente esercizio.
La funzione reale di variabile reale f(x), continua per ogni x, è tale che:

$$\int_0^2 f(x)dx = a, \quad \int_0^6 f(x)dx = b,$$

dove a, b sono numeri reali. Determina, se esistono, i valori a, b per cui risulta contemporaneamente:

$$\int_0^3 f(2x)dx = 1 \quad \text{e} \quad \int_1^3 f(2x)dx = 2.$$

73.1.5 Un terzo metodo d'integrazione è il cosiddetto **METODO D'INTEGRAZIONE PER PARTI**:

Se f(x) e g(x) sono funzioni continue in un medesimo intervallo chiuso e limitato I ed f(x) è derivabile in I con derivata continua, allora, indicata con G(x) una primitiva di g(x), in I risulta:

$$\int \mathbf{f(x)g(x)dx = f(x)G(x) - \int G(x)f'(x)dx}.$$

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo anzitutto che:

$$D_x\,[f(x)\ G(x)] = f'(x)\ G(x) + f(x)\ G'(x);$$

e perciò, ricordando che $G'(x)=g(x)$, risulta:

$$f(x)\,g(x) = D_x\,[f(x)\,G(x)] - G(x)\,f'(x);$$

da qui, integrando entrambi i membri, si ottiene la formula suddetta.
In questa formula la funzione $f(x)$ è chiamata di norma ***fattore finito*** mentre il differenziale $g(x)dx$ è detto ***fattore differenziale***. Sono questi due fattori che bisogna individuare preliminarmente quando si vuol procedere all'integrazione per parti di una data funzione.

Vediamo qualche semplice esempio.

- ESERCIZIO 1. Calcolare:

$$\int x\,e^x dx\,.$$

RISOLUZIONE. Assumiamo: fattore finito $= x$, fattore differenziale $= e^x dx$.
Dopo aver constatato che una primitiva di e^x è e^x e che il differenziale del fattore finito è dx, si ha:

$$\int x\,e^x dx = x\,e^x - \int e^x dx = x\,e^x - e^x + k\,.$$

Andiamo a vedere cosa sarebbe successo se avessimo scelto e^x come fattore finito ed xdx come fattore differenziale. Constatato preliminarmente che una primitiva di x è $x^2/2$ e che il differenziale del fattore finito è $e^x dx$, si ha:

$$\int x\,e^x dx = \frac{x^2}{2}e^x - \int \frac{x^2}{2}e^x dx\,.$$

Le cose si complicano invece di semplificarsi. La scelta non sarebbe stata idonea.

- ESERCIZIO 2. Calcolare:

$$\int \ln x\,dx\,.$$

RISOLUZIONE. Assumiamo: fattore finito $= \ln x$, fattore differenziale $= 1\cdot dx$.
Constatato che $d(\ln x)=\frac{1}{x}dx$ e che una primitiva di 1 è x, si trova:

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\ln x - x + k\,.$$

- ESERCIZIO 3. Posto che a sia una costante positiva, calcolare:

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

RISOLUZIONE. In verità non è un caso semplicissimo, ma ce ne dobbiamo occupare ugualmente per una ragione che ti sarà chiara subito dopo.
Assumiamo: fattore finito $= \sqrt{a^2-x^2}$, fattore differenziale $= 1\cdot dx$.
Osserviamo prima di tutto che una primitiva di 1 è x e che $d\sqrt{a^2-x^2}=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$.
Perciò, detto J l'integrale da calcolare, si ottiene: $J=x\sqrt{a^2-x^2}-\int\left(x\cdot\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)dx$; siccome:

$$\int\left(x\cdot\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)dx = \int\frac{a^2-x^2-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \int\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx - \int\frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \int\sqrt{a^2-x^2}\,dx - a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

ricordando il risultato dell'esercizio 4 in 73.1.3 e notando che il primo termine di quest'ultima espressione non è altro che l'integrale J, ritornando alla precedente espressione di J e sostituendo opportunamente, si ha:

$$J=x\sqrt{a^2-x^2}-\left(J-a^2\,\mathrm{asin}\frac{x}{a}+k'\right)\;;$$

da cui, risolvendo rispetto a J e ponendo k'=2k, si ricava:

$$J=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\operatorname{asin}\frac{x}{a}+k\,.$$

NOTA BENE. Il calcolo di quest'ultimo integrale permette di dimostrare la formula dell'area del cerchio di raggio r. Basta assumere un riferimento cartesiano (Oxy), avente l'origine nel centro del cerchio (Fig. 1). L'equazione della circonferenza relativa è allora $x^2+y^2=r^2$. Ne consegue che l'equazione $y=\sqrt{r^2-x^2}$ rappresenta la semicirconferenza situata nel semipiano $y\geq 0$.

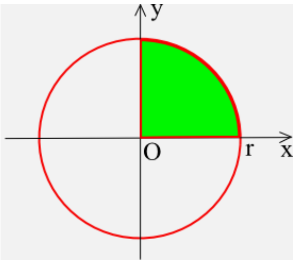

FIG. 1

L'area A del cerchio è allora 4 volte l'area del settore situato nel 1° quadrante, vale a dire:

$$A=4\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}\,dx=\left[\frac{x}{2}\sqrt{r^2-x^2}+\frac{r^2}{2}\operatorname{asin}\frac{x}{r}\right]_0^r=4\cdot\frac{r^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\pi r^2.$$

ESERCIZI.

1. Calcola i seguenti integrali indefiniti e definiti, utilizzando il metodo d'integrazione per parti (puoi controllare l'esattezza dei risultati mediante un apposito software matematico):

$$\text{a) }\int x\ln x\,dx;\quad \text{b) }\int x^2e^x dx;\quad \text{c) }\int x\sin x\,dx;\quad \text{d) }\int\frac{x\,dx}{(x+1)^2}.$$

$$\text{e) }\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx;\quad \text{f) }\int_1^e x^2\ln x\,dx;\quad \text{g) }\int_0^2\frac{2\,x\,dx}{(x+2)^2}.$$

2. Calcola i seguenti integrali indefiniti, utilizzando il metodo che ritieni più adeguato:

$$\text{a) }\int \operatorname{asin}x\,dx;\quad \text{b) }\int\operatorname{acos}x\,dx;\quad \text{c) }\int(\operatorname{asin}x+\operatorname{acos}x)dx.$$

3. Definito il numero E come:

$$\int_0^1 x\,e^x dx$$

dimostrare che risulta:

$$\int_0^1 x^2\,e^x dx=e-2E\,,$$

ed esprimere:

$$\int_0^1 x^3\,e^x dx$$

in termini di e ed E.

[Tratto dall'esame di Stato 2017, indirizzo scientifico, sessione ordinaria]

VERIFICHE [1] [2]

Calcolare, con uno dei metodi studiati, una primitiva della funzione f(x) e controllare l'esattezza del risultato per mezzo di un apposito software matematico (nn. 1-12):

1. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$. $\left[\mathbf{R.}\ \dfrac{x^2}{2}+\ln|x|\right]$

2. $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$. $\left[\mathbf{R.}\ \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]$

3. $f(x)=\sin 2x$. $\left[\mathbf{R.}\ -\dfrac{1}{2}\cos 2x\right]$

4. $f(x)=\tan x$. $[\mathbf{R.}\ -\ln|\cos x|]$

5. $f(x)=\dfrac{1}{\tan x}$. $[\mathbf{R.}\ \ln|\sin x|]$

6. $f(x)=\sqrt{1+x^2}$. $\left[\mathbf{R.}\ \dfrac{x}{2}\sqrt{1+x^2}-\dfrac{1}{2}\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\right]$

7. $f(x)=\sin^2 x\cos x$. $\left[\mathbf{R.}\ \dfrac{1}{3}\sin^3 x\right]$

8. $f(x)=\sin x\cos^2 x$. $\left[\mathbf{R.}\ -\dfrac{1}{3}\cos^3 x\right]$

9. $f(x)=\dfrac{(x+2)^2}{x}$. $\left[\mathbf{R.}\ \dfrac{x^2}{2}+4x+4\ln|x|\right]$

10. $f(x)=\dfrac{\ln^2 x}{x}$. $\left[\mathbf{R.}\ \dfrac{1}{3}\ln^3 x\right]$

11. $f(x)=x\sqrt{x^2+1}$. $\left[\mathbf{R.}\ \dfrac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}\right]$

12. $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$. $\left[\mathbf{R.}\ \sqrt{x^2+2}\right]$

Questioni varie.

13. Calcolare l'area della regione finita di piano, delimitata dalle parabole di equazioni:

$$y=-x^2+2x,\ \ y=x^2-3x.$$

$[\mathbf{R.}\ 125/24]$

14. La retta e la parabola di equazioni rispettivamente:

$$y=\frac{x}{2}+1,\ \ y=\frac{x^2}{2}$$

delimitano una regione finita di piano. Calcolare la sua area. $[\mathbf{R.}\ 9/4]$

15. Calcolare l'area della regione finita di piano, delimitata dalle parabole di equazioni:

$$y=x^2-2\,x,\ \ y^2=3\,x.$$

$[\mathbf{R.}\ 6]$

16. Utilizzando il calcolo integrale, dimostrare che la formula che esprime **l'area S di un'ellisse** di se-

---

[1] Vedi nota 4, inserita nella sezione "verifiche" dell'unità 68: Studio di una funzione.

[2] I problemi (o gli esercizi) contrassegnati col simbolo ® sono risolti (totalmente o parzialmente) e la risoluzione è situata nella cartella "integrazione 2", file "Matematica – Integrazione 2, unità 28-88", pubblicata in questo medesimo sito e scaricabile gratuitamente.

miassi a, b è la seguente: **S=πab**.

17. Nel rettangolo ABCD il lato AB è lungo la metà del lato CD. Il rettangolo, ruotando di un giro completo intorno alla retta BC, genera un solido Σ. Il piano α, individuato dal punto C e dalla retta perpendicolare alla retta AB nel punto A, interseca il solido Σ secondo una figura la cui area è $\frac{1}{2}\pi a^2\sqrt{5}$, essendo a una lunghezza assegnata. Calcolare il volume di Σ. [**R.** $2\pi a^3$]

18. Utilizzando il calcolo integrale, calcolare l'area della regione piana delimitata dall'iperbole di equazione $xy=\frac{9}{4}$ e dalla retta $x+y=5$.

19. Due semirette, Or ed Os, formano un angolo di 45°. Sulla semiretta Os si fissino due punti A e B tali che:

$$\overline{OA}=\frac{\sqrt{2}}{3},\ \ \overline{AB}=\frac{8\sqrt{2}}{3}.$$

Scelto poi un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali, si scrivano le equazioni delle due parabole aventi gli assi perpendicolari alla direzione di r, passanti per i punti A, B e tangenti una alla semiretta Or nel punto C e l'altra alla semiretta opposta a questa nel punto D. Si calcoli infine l'area della regione finita i piano delimitata dagli archi AC e BD delle parabole e dal segmento CD.

$\left[\textbf{R.}\right.$ Per una possibile scelta del riferimento cartesiano: $\left. y=\frac{3}{4}(x-1)^2,\ y=\frac{3}{16}(x+1)^2;\dots\right]$

20. Considerato il quadrato ABCD, il cui lato è lungo 1, si scriva, in un sistema di assi cartesiani opportunamente scelto, l'equazione della parabola avente l'asse parallelo alla retta AB, passante per i punti A, C e passante inoltre per il punto E, interno al lato BC, in modo che l'arco AE della parabola divida il quadrato assegnato in due parti le cui aree stanno nel rapporto 7/20. Successivamente, detto F l'ulteriore punto in cui la parabola interseca la retta AD, si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dall'arco EF della parabola e dai segmenti DE e DF.

$\left[\textbf{R.}\right.$ Per una possibile scelta del riferimento: $\left. y=-\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{2}x,\ \ E\left(\frac{2}{3},1\right),\ \ F\left(\frac{5}{3},0\right);\dots\right]$

21. In un piano cartesiano ortogonale (Oxy) sono assegnate la parabola p e la retta r di rispettive equazioni:

$$y=\frac{1}{2}x^2+2x+3,\ \ 5x-2y+8=0.$$

Calcolare l'area della regione piana delimitata da esse.

22. Dato il triangolo equilatero ABC, di lato lungo 1, si consideri la parabola simmetrica rispetto all'asse del segmento AB, passante per A e tangente ad AC e si calcolino le aree delle due porzioni di piano in cui il triangolo è diviso dall'arco di parabola interno ad esso.

$\left[\textbf{R.}\ \frac{\sqrt{3}}{6},\ \frac{\sqrt{3}}{12}\right]$

23. In un piano cartesiano ortogonale (Oxy) sono assegnate le curve di equazione:

$$x=y^2+ay+b,\ \ x^2+y^2-bx=0.$$

Determinare i coefficienti a, b in modo che esse si sechino nel punto A(2,2). Dopo aver disegnato le due curve, corrispondenti ai coefficienti trovati, calcolare le aree delle due regioni finite di piano delimitate da esse. [**R.** $a=-3,\ b=4;\ \dots$]

24. In un piano cartesiano ortogonale (Oxy) sono assegnate le curve di equazioni:

$$x^2+y^2-(a-1)x+b=0,\ \ y=2x^2-ax+b.$$

Determinare i coefficienti a, b in modo che esse si sechino in due punti di ascisse 1 e 2 e di ordinate non negative. Dopo aver disegnato le due curve, corrispondenti ai coefficienti trovati, calcolare le aree delle due regioni finite di piano delimitate da esse. [**R.** $a=5, b=3; \dots$]

25. In un piano cartesiano ortogonale (Oxy) è assegnata la parabola di equazione: $y=-x^2+3x$.
Si trovino le sue corde AB e CD, parallele all'asse x, in modo che i due triangoli EAB ed ECD, dove E è un punto dell'asse x, siano equilateri ed i punti A e C siano dalla stessa parte rispetto all'asse della parabola. Si calcoli quindi l'area del triangolo mistilineo limitato dall'arco AC della parabola e dai segmenti EA ed EC.

$$\left[\mathbf{R.}\ x_A=\frac{3-\sqrt{3}}{2}, y_A=\frac{3}{2}; \dots; x_D=\frac{3}{2}(1+\sqrt{3}), y_D=-\frac{9}{2}; S=\frac{11\sqrt{3}}{4}\right]$$

26. In un piano cartesiano ortogonale (Oxy) sono assegnate le parabole di equazione:

$$y=-a\,x^2+(1-a)x+(1+2a),$$

dove a è un numero reale positivo dato.

1. A) Giustificare che tutte le parabole considerate passano per due punti A, B.
   B) Trovare le equazioni delle rette tangenti alla generica delle parabole assegnate nei punti A, B.
2. A) Detto C il punto comune alle due tangenti suddette, verificare che l'area del triangolo mistilineo delimitato dai segmenti AC e BC e dall'arco AB di parabola è metà dell'area della regione piana delimitata dallo stesso arco di parabola e dal segmento AB.
   B) Calcolare le due aree precedenti nel caso in cui il triangolo ABC sia rettangolo in C.

[**R.** ...;2B) $a=\sqrt{2}/3, \dots$]

27. Il piano è riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).

1. A) Trovare l'equazione della parabola di asse parallelo all'asse y, avente il vertice nel punto $A(a,0)$ e passante per il punto $B(0,2a)$, dove a è un parametro reale positivo.
   B) Determinare il punto P dell'arco AB della parabola per il quale è minima la somma delle coordinate.
   C) Calcolare il valore di a per cui questo minimo vale $7/4$.
2. A) Detta p la parabola che corrisponde al valore di a così trovato, condurre per il relativo punto P di p la retta t tangente a p e trovarne l'equazione
   B) Preso sulla retta p il punto Q di ascissa 3, condurre per Q l'ulteriore tangente a p e trovarne l'equazione.
3. A) Calcolare l'area della regione piana delimitata da p e dalle due tangenti trovate.

$$\left[\mathbf{R.}\ \text{1A) } y=\frac{2}{a}x^2-4x+2a,\ \ \text{1B) } P\left(\frac{3a}{4},\frac{a}{8}\right);\ \ \text{1C) } a=2; \dots\right]$$

28. Considerata una circonferenza K di centro O e raggio 1, si fissino un suo punto A e la retta diametrale s perpendicolare ad OA. Detto P un punto qualunque della retta s, sia Q l'ulteriore punto in cui la retta AP interseca K e sia R il punto intersezione della retta OQ con la perpendicolare ad s condotta per P. Riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di assi cartesiani, si trovi l'equazione del luogo geometrico descritto dal punto R quando P descrive la retta s e si calcolino le aree delle due porzioni di piano in cui il cerchio delimitato da K è diviso dal luogo trovato. [**R.** Parabola; $\frac{\pi}{2}\pm\frac{2}{3}$]

29. Ogni curva di equazione:

$$y=\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x},$$

dove a, b, c, d sono parametri reali con $a\neq 0$, è nota come *tridente di Newton*, anche se in realtà proprio Newton la definì *tridente di Cartesio*.

a. Fra tali curve, assegnate in un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), determinare quella che è tangente all'asse x nel punto di ascissa 1 e lo interseca nel punto di ascissa -2 e passa inoltre per il punto (2,2).

b. Disegnare il grafico della curva così ottenuta, facendo vedere in particolare che presenta un solo punto di flesso, del quale si richiedono le coordinate.

c. Stabilire se l'area della regione piana delimitata dalla curva trovata e dalla retta y=2 è maggiore, minore o uguale a quella di un quadrato di lato unitario.

30. Tra le parabole di equazione:

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 3\,x + k$$

si individui quella sulla quale la retta di equazione 2y=x+2 intercetta una corda AB di lunghezza $\frac{5}{2}\sqrt{5}$. Condotte in A e in B le rette tangenti alla parabola trovata, si calcoli l'area della regione finita di piano limitata dall'arco di parabola AB e dalle due tangenti.

[Tratto dall'esame di maturità scientifica, 1978, sessione ordinaria]

31. Le curve di equazione:

$$y = \frac{a^3}{x^2 + a^2},$$

dove a è un parametro reale positivo, furono investigate dalla scienziata milanese Maria Gaetana Agnesi (1718-1799), che denominò ***versiera*** ciascuna di esse.

a. Dimostrare che la versiera di Agnesi si può ottenere come luogo geometrico con la seguente costruzione:
In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), si considera la circonferenza C di centro $(0, a/2)$, con a>0, e la retta t di equazione y=a. Una generica retta r per O interseca la circonferenza in M e la retta t in N. Sia P il punto in cui si secano la parallela all'asse x condotta per M e la parallela all'asse y condotta per N. Il luogo geometrico del punto P al variare di r nel fascio di centro O è la versiera di Agnesi.

b. Dimostrare che il sottografico della versiera di Agnesi, relativo a tutto l'intervallo reale, è equivalente al cerchio di raggio a.

32. In un sistema di assi coordinati cartesiani si consideri la parabola di equazione:

$$y = x^2 + x\sqrt{3} + 1.$$

Condotte per l'origine O le due rette tangenti ad essa, si scriva l'equazione della circonferenza passante per O e per i due punti di contatto e si calcolino le aree delle <u>tre</u> regioni [(3)] finite di piano delimitate dalle due curve.

[Tratto dall'esame di maturità scientifica, 1980, sessione ordinaria]

33. Presi due vettori $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ non paralleli e con lo stesso punto di applicazione O, sia $\overrightarrow{OA}=2\,\vec{a}$ e $\overrightarrow{OB}=2\,\vec{b}$. Tracciare il vettore $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$ e congiungere O con C. Il punto P divida il segmento OC in due parti tali che $\overrightarrow{OP}=2\,\overrightarrow{PC}$. Dimostrare che i punti A, P e B sono allineati.

Posto $\vec{a}\perp\vec{b}$ e $|\vec{a}|=1$ e fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali di centro O con ascissa parallela ed equiversa ad $\vec{a}$ e ordinata parallela ed equiversa a $\vec{b}$, trovare $|\vec{b}|$ in modo che i due segmenti OC e AB siano perpendicolari. Trovare, in questo caso, le due parabole con asse parallelo all'asse delle y e passanti rispettivamente la prima per O, P ed A e la seconda per B, P e C. Calcolare infine l'area della parte finita di piano racchiusa tra le due parabole e l'asse delle y.

[Tratto dall'esame di maturità scientifica, 1992, sessione ordinaria]

34. Sia:

[3] Ad onor del vero, la traccia ministeriale parla di due regioni, ma in realtà esse sono proprio tre [*N.d.A.*]

$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \sin 2t \end{cases}$$

Esprimere y in funzione di x e rappresentare tale funzione che si presenta sotto la forma y=±f(x). Individuare simmetrie e caratteristiche del grafico trovato. Calcolare l'area racchiusa dalla figura trovata. [Per il calcolo dell'integrale proposto si suggerisce di porre $\sqrt{1-x^2} = z$.]

[Tratto dall'esame di maturità scientifica, 1993, sessione ordinaria]

[NOTA BENE. In realtà, la forma y=±f(x) non rappresenta una funzione (o per lo meno una funzione come la intendiamo noi, cioè una funzione ad un sol valore o funzione *monodroma*, mentre rappresenta quella che i matematici chiamano funzione a più valori – due nel caso specifico – o funzione *polidroma*). Inoltre il suggerimento per il calcolo dell'integrale è fuorviante. Infine era il caso di precisare che il parametro t varia nell'intervallo [0,2π[– *N.d.A.*]

35. ® In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la curva K di equazione:

[1] $$y = \frac{2x(6-x)}{2+x}.$$

a) Disegnarne l'andamento, indicando con A il suo punto di massimo relativo.

b) Calcolare quanti punti, aventi le coordinate del tipo $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$, dove a, b sono numeri interi, appartengono alla regione piana (contorno compreso) delimitata dall'asse x e dalla curva K.

c) Fra i triangoli isosceli aventi il vertice propriamente detto in A e la base sull'asse x, determinare quello il cui perimetro è 16 e calcolare le aree delle due regioni in cui la curva K divide il triangolo trovato.

[Tratto dall'esame di Stato 2004, indirizzo sperimentale, sessione suppletiva]

36. Si conosce il valore dell'integrale $\int_0^3 f(x)dx$ [*dove* f(x) *è una funzione continua sull'asse reale* – N.d.A.]. È allora possibile calcolare:

$$[A]\ \int_0^3 f\left(\frac{x}{3}\right)dx; \quad [B]\ \int_0^3 f(3x)dx; \quad [C]\ \int_0^1 f\left(\frac{x}{3}\right)dx; \quad [D]\ \int_0^3 f(3x)dx.$$

Una sola risposta è corretta. Individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

[Quesito tratto dall'esame di Stato2004, indirizzo sperimentale, sessione suppletiva]

37. Si determinino i coefficienti dell'equazione

$$y = a\,x^4 + b\,x^3 + c\,x^2 + d\,x + e$$

in modo che la curva da essa rappresentata passi per l'origine di un assegnato sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) e sia tangente alle bisettrici dei quadranti nei punti di ordinata 1.

Se ne disegni il grafico. Si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva e dalla retta passante per i suoi punti di massimo. [**R.** ... ; $3\sqrt{6}/5$]

38. Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), si consideri il sottografico S della funzione $y=x^2-x+1$, relativo all'intervallo [0,2]. La regione S, in seguito ad una omotetia di centro O e caratteristica k≠0, diventa la regione S', sottografico di una nuova funzione y=f(x), relativo ad un nuovo intervallo [a,b].

a. Determinare sia la funzione y=f(x) sia l'intervallo [a,b].

b. Calcolare l'area del sottografico S', verificando che è k^2 volte quella del sottografico S.

39. È assegnata la funzione:

$$y=\frac{1}{2}x^2|x|.$$

a. Dimostrare che è derivabile con derivata continua in ogni x reale.

b. Dimostrare che la retta r di equazione $7x-6y+10=0$ interseca il grafico γ della funzione solamente in due punti: trovarne le coordinate.
c. Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla retta r e dal grafico γ.

40. È assegnata la funzione:

$$f(x)=\begin{cases}-2x+3 & \text{per } 0\leq x\leq 1\\ 1 & \text{per } 1<x\leq 3\\ x-2 & \text{per } 3<x\leq 4\end{cases}$$

a. Calcolare l'area sotto il grafico della funzione relativa all'intervallo $[0,4]$.
b. Trovare la funzione $A(x)$ che esprima l'area sotto il grafico di $f(x)$ per x variabile da 0 a 4.
c. Stabilire se la funzione $A(x)$, con $0\leq x\leq 4$, è continua e derivabile nel suo dominio e disegnarne l'andamento.

$$\left[\textbf{R.}\ \text{a)}\ldots;\ \text{b)}\ A(x)=\ldots \text{ per } 0\leq x\leq 1,\ A(x)=x+1 \text{ per } 1<x\leq 3,\ A(x)=\frac{x^2}{2}-2x+\frac{11}{2} \text{ per}\ldots;\ \text{c)}\ldots\right]$$

41. È data la funzione $y=|x^2-1|+x^2$.
a. Dopo aver dimostrato che non è derivabile su tutto l'asse reale, determinare per quali valori di x non è derivabile.
b. Disegnare il grafico γ della funzione in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).
c. Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dal grafico γ e dalla retta di equazione $y=3$.

42. Nella figura sottostante (Fig. 2) è rappresentata un'iperbole equilatera con asintoti paralleli agli assi di riferimento.
a. Trovarne l'equazione.
b. Calcolare l'area della regione finita di piano evidenziata in figura.

[**R.** a)…; b) $5(1+\ln 2)$]

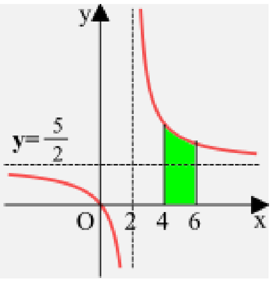

FIG. 2

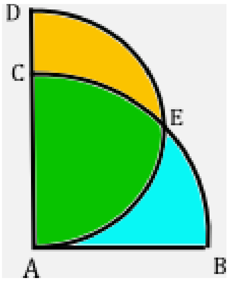

FIG. 3

43. Nella figura sovrastante (Fig. 3) sono disegnati il quadrante BC di una circonferenza di centro A e raggio $\sqrt{2}$ e una semicirconferenza di diametro AD, perpendicolare ad AB e lungo 2. Dopo aver riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di assi cartesiani (Oxy), risolvere le seguenti questioni.
1. A) Scrivere le equazioni dell'arco BC e della semicirconferenza.
   B) Trovare le coordinate del punto E in cui le due curve di intersecano.
2. A) Calcolare la tangente dell'angolo sotto cui le due curve si secano in E.
3. A) Dimostrare che:

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{a^2}{2}\operatorname{asin}\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+k\,,$$

essendo a un parametro reale positivo e k la costante d'integrazione.

B) Calcolare, utilizzando il precedente risultato, le aree delle tre regioni evidenziate in figura.

44. È data la funzione:

$$y = \frac{3x - 4}{x^2 - 3x + 2}.$$

1. A) Disegnare il suo grafico γ dopo averne trovato, in particolare, gli asintoti.

B) Indicato con P il punto in cui γ interseca l'asse y, trovare le coordinate dell'ulteriore punto Q in cui la retta t tangente a γ in P interseca γ.

2. A) Determinare i due numeri reali a, b tali che:

$$\frac{3x - 4}{x^2 - 3x + 2} = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x - 2}.$$

B) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva γ, dall'asse x e dalle rette x=3 e y=5/2.

3. A) Dimostrare che per il punto Q è possibile condurre una seconda tangente s a γ e trovarne l'equazione.

B) Calcolare l'ampiezza, espressa in gradi sessagesimali ed approssimata al secondo, dell'angolo acuto formato dalle due tangenti t ed s.

45. È data la funzione:

$$y = \frac{2x - 1}{(x - 1)^2}.$$

1. A) Disegnare il suo grafico γ dopo averne trovato, in particolare, gli asintoti, i punti estremanti e i flessi.

B) Indicato con P il punto in cui γ interseca l'asse x, trovare le coordinate dell'ulteriore punto Q in cui la retta t tangente a γ in P interseca γ.

2. A) Determinare i due numeri reali a, b tali che:

$$\frac{2x - 1}{(x - 1)^2} = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{(x - 1)^2}.$$

B) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva γ e dagli assi di riferimento.

3. A) Dimostrare che per il punto Q è possibile condurre una seconda tangente s a γ e trovarne l'equazione.

B) Calcolare l'ampiezza, espressa in gradi sessagesimali ed approssimata al secondo, dell'angolo acuto formato dalle due tangenti t ed s.

46. È data la funzione:

$$y = x^2|x - 2|.$$

1) Spiegare se la funzione è derivabile nel suo dominio e calcolare la sua derivata.

2) Dimostrare che il suo grafico presenta due punti con tangente orizzontale, uno dei quali è l'origine O del sistema di riferimento cartesiano (Oxy). Indicare con A l'altro punto.

3) Calcolare le aree delle due regioni finite di piano delimitate dal grafico della funzione e dalla retta $y=y_A$, essendo y_A l'ordinata del punto A.

47. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve F e G di equazioni rispettivamente:

$$y = \frac{x}{x^2 + 1} \quad \text{e} \quad y = \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 2}.$$

a. La curva G si ottiene dalla F con un'opportuna traslazione: trovarne le equazioni.

b. Disegnare le due curve nel medesimo piano dopo aver determinato tra l'altro le coordinate dei loro punti comuni.
c. Dopo aver calcolato il seguente integrale:

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx\,,$$

determinare per quale coppia ordinata (a,b) risulta:

$$\int_a^b \frac{x-1}{x^2-2x-2}\,dx = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx\,.$$

d. Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalle due curve assegnate.

$\left[\mathbf{R.}\ \ \ldots;\ \text{d)}\ \ln\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$

48. Sono assegnate le funzioni:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x \quad \text{e} \quad g(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4\,.$$

a. La seconda si ottiene dalla prima con un'opportuna traslazione: trovarne le equazioni.
b. Dimostrare che si ha:

$$\int_0^1 g(x)dx = \int_{-1}^0 f(x)dx\,.$$

c. Dimostrare che, in generale, se una funzione f(x) è continua nell'intervallo [a,b], la funzione f(x–h) ottenuta dalla f(x) con un'opportuna traslazione, è tale che risulta:

$$\int_{a+h}^{b+h} f(x-h)dx = \int_a^b f(x)dx\,.$$

d. Dopo aver disegnato i grafici delle due funzioni in un riferimento cartesiano ortogonale (Oxy), calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dai due grafici e dall'asse y.

[**R.** … ; c) 3/2]

49. È data la funzione:

$$y = \frac{e^x}{1+e^x}$$

dove "e" è il numero di Nepero.
1) Disegnare l'andamento del suo grafico γ in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), dopo averne determinato, fra l'altro, gli eventuali punti di flesso con le relative tangenti inflessionali e gli eventuali asintoti.
2) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dal grafico γ, dalla tangente ad esso nel punto di ascissa 0 e dalla retta di equazione x=2.
3) Stabilire se è finita o no l'area del sottografico della funzione relativa all'intervallo $]-\infty, 0]$.

$\left[\mathbf{R.}\ \ \ldots,\ \ 2)\ A = \frac{3}{2} - \ln\frac{1+e^2}{2}\ (\approx 0{,}066), \ldots\right]$

50. Nella figura sottostante (Fig. 4) è rappresentato il grafico della derivata $f'(x)$ della funzione f(x), costituito dal segmento di retta OA, dall'arco di parabola ABC, avente l'asse parallelo all'asse y, dal segmento di retta CD e, infine, dall'arco d'iperbole equilatera DE, i cui asintoti coincidono con gli assi di riferimento.
a. Dire, fornendo esauriente spiegazione, se nell'intervallo [0,6] la funzione f(x) è continua, se ammette massimi o minimi, in quali intervalli cresce e in quali decresce.
b. Tracciare il grafico della derivata seconda della funzione nell'intervallo [0,6].
c. Supposto che sia f(0)=0, i dati sono sufficienti per determinare la funzione f(x)?

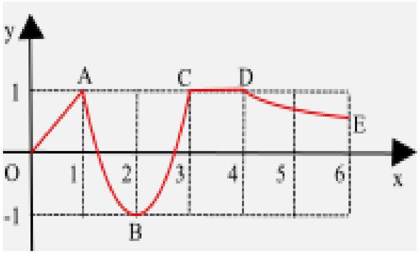

FIG. 4

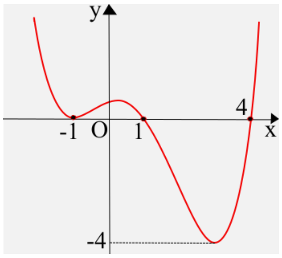

FIG. 5

51. Nella figura sovrastante (Fig. 5) è rappresentato il grafico di un polinomio di 4° grado.
 a) Determinare la sua equazione.
 b) Calcolare le aree delle due regioni piane delimitate dal grafico e dall'asse x.

52. Si consideri il polinomio P(x).
 a. Tra i suoi zeri reali ci sono i numeri 2, contato due volte, -2 e 0. Qual è il suo grado minimo?
 b. Posto che il suo grafico, limitato all'intervallo $[-3,3]$, sia quello rappresentato nella figura sottostante (Fig. 6), la quale mostra che detto grafico presenta tangente "orizzontale", oltre che nel punto di ascissa x=2, anche nei punti di ascissa $x=-1$ e $x=1$, qual è il grado minimo del polinomio?
 c. Ammesso inoltre che il sottografico del polinomio relativo all'intervallo $[-2,0]$ abbia area $13/35$, qual è esattamente il polinomio P(x)?
 d. Ammesso che f(x) sia una primitiva di P(x), studiare f(x) nell'intervallo [–3,3] rispetto alla monotonia, spiegando in particolare se in tale intervallo il grafico di f(x) presenta punti con tangente orizzontale e precisando se si tratta di massimi o di minimi relativi.
 Per risolvere questo quesito è indispensabile conoscere l'espressione di P(x)?

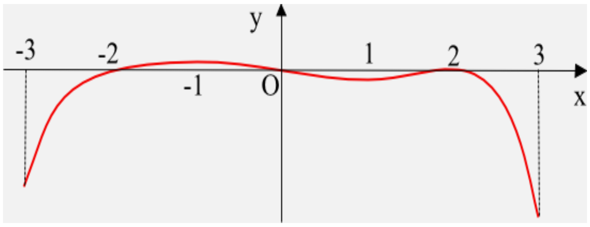

FIG. 6

$\Big[$**R.** ... ; c) $P(x)=-\dfrac{1}{104}(2x^2+6x+7)\cdot x(x+2)(x-2)^2$; d) min. rel. per $x=-2$, max. rel. per $x=0\Big]$

53. Si consideri il polinomio P(x).
 a. Tra i suoi zeri reali ci sono i numeri 2, -2 e 0. Qual è il suo grado minimo?
 b. Posto che il suo grafico sia quello rappresentato nella figura sottostante (Fig. 7), la quale mostra che detto grafico è simmetrico rispetto all'origine O del sistema di riferimento e presenta tangente "orizzontale" nel punto di ascissa $x=2/\sqrt{3}$, qual è esattamente il grado del polinomio?

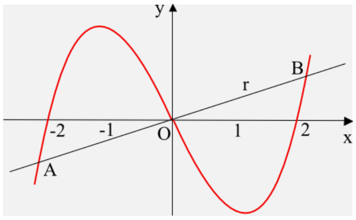

FIG. 7

c. Ammesso che la retta r, disegnata nello stesso grafico, passi per O e intersechi il grafico di P(x) nei punti A, B di ascisse a, b rispettivamente, qual è il valore dell'integrale $\int_a^b P(x)dx$?

d. Ammesso che f(x) sia una primitiva di P(x), studiare f(x) su tutto l'asse reale rispetto alla monotonia, spiegando in particolare se il suo grafico presenta punti con tangente orizzontale e precisando se si tratta di massimi o di minimi relativi.
Per risolvere questo quesito è indispensabile conoscere l'espressione di P(x)?

54. Nella figura sottostante (Fig. 8) sono rappresentati i grafici di una funzione f(x), della sua derivata e di una sua primitiva. È inoltre rappresentato il grafico di una quarta funzione, che nulla ha a che fare con le precedenti. La funzione f(x), la sua derivata e una sua primitiva sono rappresentati dai grafici indicati nell'ordine dalle seguenti lettere:

[A] D-B-A. [B] D-A-C. [C] C-B-A. [D] C-B-D.

Una sola alternativa è corretta. Individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

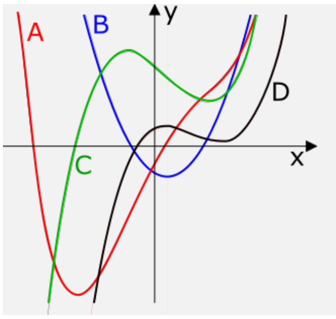

FIG. 8

55. Si considerino le funzioni $f_k(x)$ tali che:

$$f_k(x) = \frac{\ln(x^k)}{x}$$

dove k è un numero reale non nullo.

a) Calcolare per quali valori di k risulta:

$$\int_1^e f_k(x)dx = 2$$

essendo "e" il numero di Nepero.

b) Per il valore di k così trovato studiare la funzione $f_k(x)$ e tracciarne l'andamento in un piano cartesiano ortogonale (Oxy), dopo aver determinato, in particolare: gli eventuali punti intersezione con l'asse x, gli eventuali punti estremanti, gli eventuali asintoti rettilinei.

[**R.** a) k=2; b) ...]

56. Si considerino le funzioni $f_k(x)$ tali che:

$$f_k(x) = \ln^2(x^k)$$

dove k è un numero reale non nullo.

a) Dimostrare che la derivata di $f_k(x)$ rispetto ad x si annulla per uno ed un solo valore di x, indipendente da k. Trovare questo valore.

b) Calcolare per quali valori di k risulta:

$$\int_1^e f_k(x)dx = 81(e-2)$$

essendo "e" il numero di Nepero.

[**R.** a) ... ; b) k=±3]

57. ABC è un triangolo di area 60 cm^2, nel quale l'angolo in A misura $\operatorname{acos}(4/5)$. Indicato con D il punto interno al lato AB tale che $A\hat{C}D = C\hat{B}A$, l'area del triangolo ADC sia 15 cm^2. Calcolare le aree delle due regioni in cui la parabola, avente l'asse perpendicolare alla retta AB e passante per i punti A, C, D, divide il triangolo ABC. $\left[\textbf{R.}\ \frac{129}{8}\,cm^2,\ \frac{351}{8}\,cm^2\right]$

58. Calcola i seguenti integrali e verifica l'esattezza del risultato mediante un idoneo software matematico:

$$\int_{-1}^{1} x(x^2+1)^{50}\,dx\,, \qquad \int_{0}^{1} x(x^2+1)^{50}\,dx\,, \qquad \int_{0}^{1} x^3(x^2+1)^{50}\,dx\,.$$

[N.B.: Non occorre sviluppare le potenze indicate. Infatti: il primo integrale è banale; il secondo è "quasi-immediato"; per il terzo basta ricorrere al metodo d'integrazione per parti, ma attenzione alla scelta del fattore finito]

59. Una funzione f(x) è tale che:

$$f(0) = -1,\ \ f(1) = 1,\ \ f'(0) = 0\,.$$

Questi dati sono compatibili con una soltanto delle seguenti funzioni:

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c\,,\ \ f(x)=(x^2+a)^2+(bx+c)^2\,,\ \ f(x)=a\cos^2(bx+c)+a\sin^2(bx+c)-1\,.$$

a) Una volta individuata la funzione giusta, determinarla e tracciarne il grafico G in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).

b) La tangente al grafico G nel punto di ascissa –1 delimita con G medesimo una regione finita di piano: calcolarne l'area.

$\left[\textbf{R.}\ \text{a) ... ; b)}\,\frac{4}{3}\right]$

60. Il grafico G di una funzione f(x) passa per i punti O(0,0) e A(2,2), assegnati in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy). I dati proposti sono compatibili con una soltanto delle seguenti funzioni:

$$f(x) = x^2(ax+b)+1\,,\ \ f(x) = a(x-1)^2 + \frac{b}{x-1}\,,\ \ \ f(x) = ax^2 + \frac{b}{x}\,.$$

a) Una volta individuata la funzione giusta, determinarla e tracciare il grafico G.

b) Dimostrare che la retta OA è tangente a G.

c) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata da G, dalla retta OA e dalla retta di equazione x=3.

$\left[\textbf{R.}\ \text{... ; c)}\,\frac{7}{3}+\ln 2\right]$

61. Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la parabola di equazione:

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x\,.$$

Due rette, di equazioni x=h e x=k, dividono la regione di piano delimitata dalla parabola e dall'asse x in tre parti equivalenti. Mediante un idoneo software matematico determinare i valori di h e k, approssimati per difetto a meno di 1/100. [**R.** h≈1,54; k≈2,45]

62. Un filo lungo 2L aderisce perfettamente ad un settore circolare.

1. A) Trovare l'ampiezza, misurata in radianti, dell'angolo al centro del settore di area massima.

B) Trovare la lunghezza del raggio del settore di area massima.

2. A) Esprimere l'area y del settore dato in funzione dell'ampiezza di x radianti del suo angolo al centro.

B) Studiare la funzione y=y(x) prescindendo dalla questione geometrica e disegnarne l'andamento.

3. A) Calcolare l'area del sottografico della funzione y=y(x) relativo all'intervallo [0,2].

$$\left[\textbf{R.}\ \ 1A)\ 2\ \text{rad}\ ,\ 1B)\ \frac{L}{2}\,;\ \ 2A)\ y=\frac{Lx}{(x+2)^2}\ \text{con}\ 0\le x<2\pi\ ,\ \ldots\ ;\ 3A)\ L\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)\right]$$

63. La tabella sottostante fornisce le temperature medie mensili nel Sud-Italia in un determinato anno, espresse in gradi centigradi e approssimate ad 1°.

Mesi	G	F	M	A	M	G	L	A	S	O	N	D
Temperature medie	14	14	16	18	23	27	30	29	26	22	17	15

a) Costruire un diagramma a dispersione che rappresenti la situazione.

b) Stabilire quale delle seguenti funzioni si adatta meglio a descrivere la situazione:

$$y=-x^3+14x+14\,,\quad y=\frac{120}{(x-6)^2+8}\,,\quad y=9+20\sin\left(\frac{\pi}{12}(x-1)\right).$$

c) Una volta individuata la funzione più adatta, disegnarne il grafico G indipendentemente dalla questione reale.

d) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dal grafico G, dall'asse x e dalle rette x=1 e x=5.

64. Siano le funzioni:

$$f(x)=\frac{1}{(1+x^2)^2}\,,\qquad g(x)=\frac{x}{(1+x^2)^2}\,.$$

a) Rappresentarle graficamente sullo spesso piano cartesiano ortogonale (Oxy).

b) I loro grafici delimitano, con l'asse y, una regione finita di piano R: calcolarne l'area.
[N.B.: Per il calcolo dell'integrale della *f(x)* si suggerisce la sostituzione $x=\tan z$].

c) Calcolare la lunghezza della circonferenza del cerchio equivalente ad R.

$$\left[\textbf{R.}\ \ a)\ldots;\ b)\ \frac{\pi}{8}\ ;\ c)\ \frac{\pi\sqrt{2}}{2}\right]$$

65. Si consideri il seguente integrale:

$$E_k=\int \tan^k(x)\,dx$$

dove k è un qualsiasi numero naturale maggiore di 1.

a) Verificare che risulta:

$$\tan^k(x)=\frac{\tan^{k-2}(x)}{\cos^2(x)}-\tan^{k-2}(x)\,.$$

b) Dimostrare che si ha:

$$E_k=\frac{\tan^{k-1}(x)}{k-1}-E_{k-2}\,.$$

c) Utilizzare la formula precedente per calcolare:

$$\int \tan^3(x)\,dx\,.$$

$$\left[\textbf{R.}\ \ \ldots\,;c)\ \frac{\tan^2(x)}{2}+\ln|\cos x|+c\right]$$

66. Si considerino le seguenti funzioni:

$$f(x)=\frac{\cos x}{\sin x+1}\ ,\quad g(x)=\frac{1}{\sin x+1}\ ,\quad h(x)=\frac{\cos x+1}{\sin x+1}.$$

a) Calcolare $\int f(x)dx$.

b) Dopo aver dimostrato che $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, dove $t=\tan(x/2)$, ed aver effettuato la sostituzione $t=\tan(x/2)$, calcolare $\int g(x)dx$.

c) Utilizzando i risultati ottenuti risolvendo i precedenti punti a) e b), calcolare $\int h(x)dx$.

$$\left[\mathbf{R.}\ \ \ldots;\ \ c)\ \ln(\sin x+1)-\frac{2}{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)}+k\right]$$

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE.

DOMANDE.

1 È vero che la derivata, rispetto ad x, di $\int\sqrt{x^3+2}\,dx$ è la funzione $\sqrt{x^3+2}$?

2 È vero che $\int\frac{2x}{x^2+1}dx=\ln(x^2+1)+c$, dove c è una costante arbitraria?

3 È vero che $\int\frac{2x}{x^2-1}dx=\ln(x^2-1)+c$, dove c è una costante arbitraria?

4 Quanto vale il seguente integrale: $\int_{-2}^{1}\cos^2 x\,dx-\frac{1}{3}\int_{-2}^{1}(2-3\sin^2 x)dx$? Non è ammesso il ricorso a strumenti di calcolo automatico.

5 Qual è l'integrale indefinito della funzione $\frac{1}{1+e^{-x}}$?

6 Il numero reale k è tale che $\int_0^2\frac{kx^2}{x^2+1}dx=2$. Quanto vale $\int_{-2}^{2}\frac{kx^2}{x^2+1}dx$? Non è ammesso il ricorso a strumenti di calcolo automatico.

7 Sia f(x) una funzione dispari, definita e continua nell'intervallo chiuso e limitato [−a, a], dove a è un numero reale positivo. Considerata la funzione g(x)=h+f(x), dove h è un parametro reale, è vero che $\int_{-a}^{a}g(x)dx$ non dipende dalla funzione f(x)?

8 Quanto vale l'integrale $\int_{-1}^{1}\frac{x^3+x}{x^4+1}dx$? È escluso il ricorso a strumenti di calcolo automatico.

9 Qual è l'integrale indefinito della funzione $\tan^2 x$?

10 Prova a calcolare $\int\sin x\cos x\,dx$ almeno con due procedimenti diversi.

11 Prova a calcolare l'integrale indefinito della funzione $f(x)=x^3\sqrt{(x^2+2)^3}$ ed a verificare l'esattezza del risultato mediante un idoneo software matematico.

RISPOSTE.

1. Sì. Anzi ciò è vero per ogni funzione f(x). In altri termini, qualunque sia la funzione f(x), risulta $D_x\int f(x)dx=f(x)$.
2. Sì.
3. No. Diversamente dal caso precedente in cui la funzione x^2+1 è positiva per ogni x, la funzione x^2-1 non lo è, per cui l'integrale indefinito è $\ln\left|x^2-1\right|+c$.
4. Si ha:

$$\int_{-2}^{1}\cos^2 x\,dx-\frac{1}{3}\int_{-2}^{1}(2-3\sin^2 x)dx=\int_{-2}^{1}\left(\cos^2 x-\frac{2}{3}+\sin^2 x\right)dx=\int_{-2}^{1}\frac{1}{3}dx=\frac{1}{3}[x]_{-2}^{1}=1$$

5. Basta constatare che si ha:

$$\frac{1}{1+e^{-x}}=\frac{e^x}{e^x+1}$$

e che, nella seconda frazione, il numeratore (e^x) è la derivata del denominatore (e^x+1). Ragion per cui l'integrale indefinito della funzione è $\ln(e^x+1)+k$, dove k è la costante d'integrazione.

6. La funzione integranda è pari e perciò il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y. Anche l'intervallo di integrazione $[-2,2]$ è simmetrico rispetto all'asse y. Di conseguenza l'integrale proposto è il doppio di quello assegnato e quindi vale 4.

7. È vero, dal momento che $\int_{[-a,a]} f(x)dx=0$ per la simmetria del grafico di f(x) rispetto all'origine degli assi. In effetti, si ha: $\int_{[-a,a]} g(x)dx=2ha$.

8. La funzione integranda è una funzione dispari e pertanto il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine O del sistema di riferimento cartesiano. Pure l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto ad O. Ne consegue immediatamente che l'area sotto il grafico della funzione, relativa a tale intervallo, vale a dire il valore dell'integrale, è 0.

9. È la funzione $\tan x-x+k$, dove k è la costante d'integrazione. Si ha, infatti:

$$\int \tan^2 x\,dx=\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx=\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\tan x-x+k.$$

10. Primo procedimento: $\int \sin x\cos x\,dx=\frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx=-\frac{1}{4}\cos 2x+a$.

Secondo procedimento: $\int \sin x\cos x\,dx=\int \sin x\,d(\sin x)=\frac{1}{2}\sin^2 x+b$.

Terzo procedimento (integrando per parti): $\int \sin x\cos x\,dx=\sin x\int \cos x\,dx-\int \sin x\cos x\,dx$, da cui, risolvendo rispetto a $\int \sin x\cos x\,dx$, segue: $\int \sin x\cos x\,dx=\frac{1}{2}\sin^2 x+c$.

Sembra che il primo risultato sia diverso dagli altri due, ma non è così. Basta constatare che si ha:

$$-\frac{1}{4}\cos 2x+a=\frac{1}{2}\sin^2 x+\left(a-\frac{1}{4}\right).$$

Per cui è sufficiente porre $a-\frac{1}{4}=b=c$ perché i tre risultati coincidano.

Questa apparente diversità si verifica perché la fattorizzazione delle funzioni circolari, per esempio nel campo reale, a differenza dei polinomi, non è unica. Basta osservare ad esempio che si ha:

- $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x.)$
- $\cos 2x=2\cos^2 x-1=\left(\sqrt{2}\cos x+1\right)\left(\sqrt{2}\cos x-1.\right)$
- $\cos 2x=1-2\sin^2 x=\left(1+\sqrt{2}\sin x\right)\left(1-\sqrt{2}\sin x.\right)$

11. Si integra la funzione mediante il metodo d'integrazione per parti. Basta assumere x^2 come fattore finito e $x\sqrt{(x^2+2)^3}$ come fattore differenziale. Una volta constatato che una primitiva di quest'ultimo fattore è $\frac{1}{5}(x^2+2)^{5/2}$, si ha:

$$\int x^3\sqrt{(x^2+2)^3}dx=x^2\cdot\frac{1}{5}(x^2+2)^{\frac{5}{2}}-\int\frac{1}{5}(x^2+2)^{\frac{5}{2}}\cdot 2x\,dx=$$

$$=\frac{1}{5}x^2(x^2+2)^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{7}(x^2+2)^{\frac{7}{2}}+k=\frac{1}{35}(x^2+2)^{\frac{5}{2}}(5x^2-4)+k\,.$$