Prerequisiti:
- Calcolare limiti, derivate e semplici integrali.
- Studio di una funzione
- Nozioni fondamentali di geometria piana e solida

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:

- *dimostrare le formule del volume di una piramide e di un solido di rotazione*
- *utilizzare l'integrazione nel calcolo di volumi sia di solidi sia di rotazione sia anche di solidi non di rotazione*
- *utilizzare il calcolo integrale nelle applicazioni alla fisica*

Questa unità non riguarda l'Istituto Tecnico, settore Economico. Tutte le altre scuole ne affronteranno lo studio nella 5ª classe.

Integrali: non solo aree

Unità 74

74.1 PROBLEMI DI FISICA

74.1.1 Giunto a questo punto, potresti legittimamente pensare che l'integrale definito si identifichi con un'area. Non è così. Ed in effetti esso può essere riferito anche ad altre grandezze, come ad esempio grandezze fisiche ma anche volumi e non solo [1]. Ed è ciò che adesso vogliamo mostrare, incominciando da qualche problema di fisica.

Consideriamo, al riguardo, un punto materiale P, che si muova su una retta r, su cui sia stato fissato un riferimento cartesiano (O,U), e supponiamo nota la legge $v=v(t)$ della velocità del punto in funzione del tempo. Ci proponiamo di calcolare lo spazio s percorso dal punto materiale nell'intervallo di tempo $[0,t]$. Supponiamo, però, per semplicità, che nell'istante 0 il punto materiale si trovi in O e che nell'intervallo di tempo considerato non ci siano inversioni di moto, vale a dire che il moto di P avvenga sempre nello stesso verso, per esempio nel verso assunto come positivo su r. Ciò equivale a dire che, nell'intervallo $[0,t]$, la velocità di P è non negativa; ossia $v(t)\geq 0$.

Suddividiamo l'intervallo $[0,t]$ in un numero arbitrario n di intervalli parziali $[t_{i-1},t_i]$ $(i=1,2,\dots,n$ e $t_0=0$, $t_n=t)$ e supponiamo che gli intervalli abbiano ampiezze uguali a $\Delta t=t/n$. Indichiamo con v_i ed V_i rispettivamente la velocità minima e la velocità massima di P nell'intervallo di tempo $[t_{i-1},t_i]$. I due prodotti $v_i\Delta t$ ed $V_i\Delta t$ rappresentano, nell'intervallo di tempo $[t_{i-1},t_i]$, gli spazi percorsi da due punti materiali che si muovono con velocità costanti di valori v_i ed V_i rispettivamente. Se, ora, indichiamo con Δs_i lo spazio percorso da P nell'intervallo di tempo $[t_{i-1},t_i]$, si ha: $v_i\Delta t\leq\Delta s_i\leq V_i\Delta t$ e quindi: $\sum_{i=1}^{n} v_i\Delta t\leq s\leq\sum_{i=1}^{n} V_i\Delta t$..

Siccome la funzione $v(t)$ è, per sua stessa natura, continua nell'intervallo $[t_{i-1},t_i]$, avviene che (quando $n\to+\infty$) le due somme $\sum_{i=1}^{n} v_i\Delta t$ e $\sum_{i=1}^{n} V_i\Delta t$ tendono ad uno stesso limite finito. Questo è proprio lo spazio s percorso dal punto P nell'intervallo di tempo $[0,t]$:

$$s=\lim\sum_{i=1}^{n} v_i\Delta t=\lim\sum_{i=1}^{n} V_i\Delta t\,.$$

Osserviamo poi che, se $v(\bar{t}_i)$ rappresenta la velocità di P in un arbitrario istante dell'intervallo $[t_{i-1},t_i]$, risulta: $v_i\leq v(\bar{t}_i)\leq V_i$ e perciò: $v_i\,\Delta t\leq v(\bar{t}_i)\,\Delta t\leq V_i\,\Delta t$, da cui segue:

$$\sum_{i=1}^{n} v_i\Delta t\leq\sum_{i=1}^{n} v(\bar{t}_i)\Delta t\leq\sum_{i=1}^{n} V_i\Delta t\,.$$

È, pertanto:

$$s=\lim\sum_{i=1}^{n} v(\bar{t}_i)\Delta t=\int_0^t v(t)dt\,.$$

Possiamo così concludere che **il procedimento seguito per risolvere il problema di fisica considerato è uguale a quello seguito per risolvere il problema delle aree.**

74.1.2 Un esercizio può essere utile a comprendere meglio questa questione particolare.

---

[1] Il concetto potrebbe essere riferito pure ad una lunghezza, ma casi anche molto semplici di lunghezze curvilinee comportano difficoltà considerevoli, perciò preferiamo non trattarne. Chi proseguirà gli studi in corsi di laurea in cui la matematica svolge un ruolo importante avrà modo di occuparsi anche di questo.

- ESERCIZIO. Un punto materiale si muove su una retta (su cui è fissato un riferimento cartesiano) in modo che ad ogni istante $t \geq 0$ la sua velocità sia espressa dalla legge: $v=2t+1$. Calcolare la posizione x occupata dal punto materiale nel generico istante t, sapendo che nell'istante 0 esso occupa la posizione $x=0$.
RISOLUZIONE. La posizione x occupata dal punto materiale nel generico istante t è, in effetti, lo spazio da esso percorso nell'intervallo di tempo [0,t]. Siccome $x=\int_{[0,t]} v\,dt$ allora: $x=\int_{[0,t]} (2t+1)dt$ e quindi, a conti fatti: $x=t^2+t$.

74.1.3 Il procedimento è ancora il medesimo quando si vogliono risolvere questi altri problemi:

- Calcolare il lavoro compiuto da un motore in un determinato intervallo di tempo, quando è nota la legge $P=P(t)$, dove P è la potenza sviluppata dal motore nell'istante t.
- Calcolare la quantità di elettricità che attraversa una sezione di un conduttore in un determinato intervallo di tempo, quando è nota la legge $i=i(t)$, dove i è l'intensità di corrente che percorre il conduttore nell'istante t.

Adesso un paio di problemi su specifiche questioni di Fisica:

1) Un punto materiale si muove di moto rettilineo con velocità v che, nel generico istante t, è espressa dalla seguente formula: $v=v_0+at$, dove a è l'accelerazione. Dimostrare che la sua velocità media v_m nell'intervallo di tempo [0,t] è data dalla seguente formula:
$$v_m = \frac{v(0)+v(t)}{2}.$$
Ti ricordiamo che, per definizione, la velocità media in un dato intervallo di tempo è il rapporto fra il cammino percorso in quell'intervallo ed il tempo impiegato a percorrerlo.
2) Ammesso che p_0 sia la pressione dell'atmosfera al livello del mare e p_h sia la pressione all'altezza h di qualche centinaio di metri ed ammesso inoltre che m_0 sia la massa specifica dell'aria al livello del mare e g sia l'accelerazione di gravità, dallo studio della Fisica si sa che risulta:
$$h = -\frac{p_0}{m_0 g}\int_{p_0}^{p_h} \frac{dp}{p}.$$
Trovare l'espressione di p_h in funzione di h.
$\left[\mathbf{R.}\ p_h = p_0\, e^{-\frac{m_0 g}{p_0}h}\right]$

74.2 VOLUMI

74.2.1 Anche il calcolo dei volumi poggia sul calcolo integrale. Ma per questo è necessario riprendere il discorso partendo proprio dalle aree. Ricordiamo allora che:
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta x\ .$$
Ora, in effetti, quando $n\to\infty$ e perciò l'ampiezza Δx degli n intervalli in cui è suddiviso l'intervallo [a,b] tende a diventare infinitamente piccola, $f(\overline{x}_i)$ tende a coincidere col valore f(x) che la funzione assume nel generico punto x dell'intervallo infinitesimo $[x_{i-1}, x_i]$: diciamo pure che il generico addendo finito $f(\overline{x}_i)\Delta x$ tende ad assumere il valore infinitesimo $f(x)dx$. Nello stesso tempo, gli addendi della somma posta sotto il segno di limite diventano in numero infinito. In altri termini: $\int_a^b f(x)dx$ è un modo convenzionale di indicare **«la somma, estesa all'intervallo [a,b], degli infiniti elementi infinitesimi f(x)dx»**.

E in effetti, il simbolo " $\int$ " non è altro che una s allungata, dove "s" sta appunto per "somma".
Inteso l'integrale in questo senso, per il calcolo dell'area S(T) del trapezoide T di base [a,b] relativo alla funzione f(x) si può ipotizzare il seguente procedimento (Fig. 1): si calcola dapprima l'area infinitesima (o elementare) dS=f(x)dx; l'area S(T) è la somma di questi infiniti elementi infinitesimi, estesa all'intervallo [a,b], vale a dire, per l'appunto:

$$S(T)=\int_a^b f(x)dx\,.$$

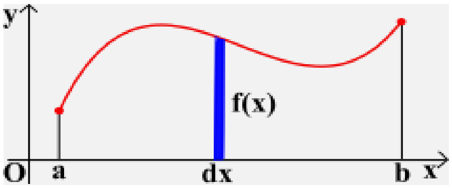

FIG. 1

Quest'idea è ripresa nel calcolo di misure diverse dalle aree ed in particolare nel caso dei volumi.

74.2.2 L'applicazione del calcolo integrale ai volumi permette di dimostrare la formula del volume della piramide e di trovarne una per il volume di un generico solido di rotazione.

♦ VOLUME DELLA PIRAMIDE. Consideriamo una piramide, la cui base abbia area A_b e la cui altezza sia h (Fig. 2). Il suo volume V può essere pensato come la somma di infiniti elementi infinitesimi dV, il generico dei quali si ottiene intersecando la piramide con uno strato di altezza infinitesima dx, delimitato da due piani paralleli alla base [(2)]. Sicché dV può essere considerato come il volume di un prisma di altezza dx e base S(x), dove S(x) è l'area della sezione della piramide con uno dei due piani che delimitano lo strato. Dunque: dV=S(x)dx, e di conseguenza:

$$V=\int_0^h S(x)dx\,.$$

D'altra parte, per un noto teorema sulle sezioni parallele di un angoloide, risulta:

$$\frac{S(x)}{A_b}=\frac{x^2}{h^2}\,,\quad \text{ossia:}\ S(x)=\frac{A_b}{h^2}x^2\,;$$

pertanto:

$$V=\frac{A_b}{h^2}\int_0^h x^2dx=\frac{A_b}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h=\frac{1}{3}A_bh\,.$$

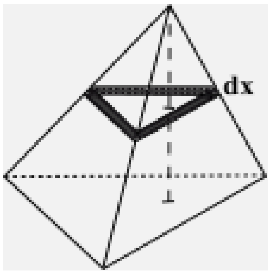

FIG. 2

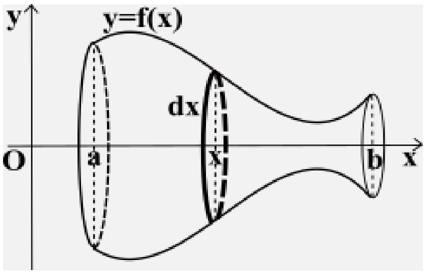

FIG. 3

[2] Lo **strato** è appunto la parte di spazio compresa fra due piani paralleli la cui distanza è l'*altezza* dello strato.

♦ VOLUME DI UN SOLIDO DI ROTAZIONE. Consideriamo il solido ottenuto facendo ruotare di un giro completo intorno all'asse x la superficie delimitata dalla curva di equazione $y=f(x)$ (continua e non negativa per $a\leq x\leq b$), dall'asse x e dalle rette $x=a$ ed $x=b$ (Fig. 3). Il suo volume è espresso dalla formula seguente:

$$\mathbf{V=\pi\int_a^b \big(f(x)\big)^2 dx}\,.$$

DIMOSTRAZIONE. Il ragionamento non è dissimile da quello esposto a proposito del volume della piramide. Anche adesso, infatti, si può considerare V come somma di infiniti elementi infinitesimi dV, il generico dei quali si ottiene intersecando il solido con uno strato di altezza infinitesima dx, delimitato da due piani perpendicolari all'asse x.

Sicché dV può essere ritenuto il volume di un cilindro di altezza dx e base di area $S(x)$, dove $S(x)$ è l'area della sezione del solido con uno dei due piani che delimitano lo strato. Dunque: $dV=S(x)dx$, e, di conseguenza, esattamente come per la piramide:

$$V=\int_0^h S(x)dx\,.$$

D'altra parte la sezione suddetta è il cerchio ottenuto intersecando il solido con il piano perpendicolare all'asse delle ascisse, condotto per il punto di ascissa x; di modo che il suo raggio è f(x). Dunque: $S(x)=\pi\big(f(x)\big)^2$. Per cui è dimostrata la formula precedente.

Come applicazione della formula del volume di un solido di rotazione si possono dimostrare le formule dei volumi del **cilindro**, del **cono**, del **tronco di cono**, che a suo tempo abbiamo spiegato con considerazioni di tipo intuitivo: lasciamo questo compito a te per esercizio.

OSSERVAZIONE 1. Se la superficie in esame ruota di un angolo di α radianti (con $0<\alpha\leq 2\pi$), il volume V descritto da essa è uguale ad $\frac{\alpha}{2\pi}$ del volume che si avrebbe se la rotazione fosse completa, ovviamente sempre che la rotazione avvenga intorno all'asse x. Ragion per cui esso è dato dalla seguente formula:

$$\mathbf{V=\frac{\alpha}{2}\int_a^b \big(f(x)\big)^2 dx}\,.$$

OSSERVAZIONE 2. Supponiamo che la funzione $y=f(x)$ sia invertibile nell'intervallo $[a,b]$ e che la sua funzione inversa sia $x=f^{-1}(y)$. Se si considera la superficie delimitata dal grafico della funzione, dall'asse y e dalle rette $y=f(a)$ ed $y=f(b)$, ammesso che tale superficie non attraversi l'asse y, il volume V del solido generato da essa in una rotazione completa intorno all'asse y (Fig. 4) è:

$$\mathbf{V=\pi\int_{f(a)}^{f(b)} \big(f^{-1}(y)\big)^2 dy}\,.$$

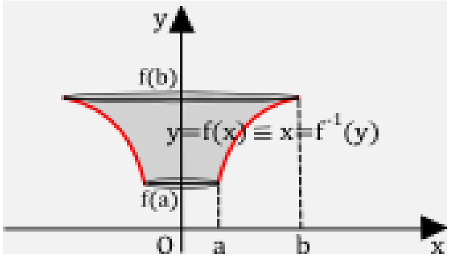

FIG. 4

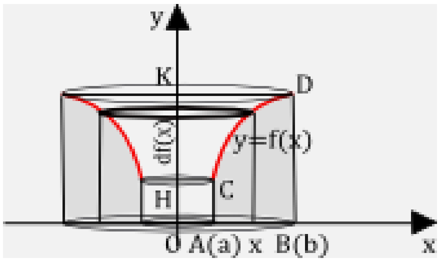

FIG. 5

OSSERVAZIONE 3. Se la superficie delimitata dalla curva di equazione y=f(x), dall'asse x e dalle rette x=a ed y=b, con a<b, ruota di un giro completo intorno all'asse y, ammesso che tale superficie non attraversi l'asse y, il volume V del solido ottenuto è dato dalla seguente formula:

$$\mathbf{V = 2\pi \int_a^b x\,|f(x)|\,dx}\,.$$

Dimostriamo questa formula nel caso particolare in cui la funzione f(x) si mantenga positiva nell'intervallo [a,b], per cui, in tale intervallo: $|f(x)|=f(x)$, ma essa è valida in generale.
Incominciamo ad osservare che il solido in questione (Fig. 5) è costituito dal cilindro generato dal rettangolo OBDK (il cui volume è $\pi b^2 f(b)$), incavato dal cilindro generato dal rettangolo OACH (il cui volume è $\pi a^2 f(a)$) e dal solido generato dal quadrilatero mistilineo HCDK. Il volume $\overline{V}$ di quest'ultimo solido si può considerare come somma di infiniti elementi infinitesimi $d\overline{V}$, il generico dei quali si ottiene intersecando il solido con uno strato di altezza infinitesima df(x), delimitato da due piani perpendicolari all'asse y. Siccome $d\overline{V}=\pi x^2 df(x)$, allora $\overline{V}=\pi\int_a^b x^2 df(x)$. Ora, integrando per parti questo integrale (f.f.=x^2, f.d.=df(x)), si trova:

$$\int x^2 df(x) = x^2 f(x) - \int 2\,x\,f(x)\,dx\,.$$

Pertanto:

$$\int_a^b x^2 df(x) = [x^2 f(x)]_a^b - 2\int_a^b x\,f(x)\,dx = b^2 f(b) - a^2 f(a) - 2\int_a^b x\,f(x)\,dx\,.$$

In definitiva, il volume V è tale che:

$$V = \pi b^2 f(b) - \pi a^2 f(a) - \pi\left\{b^2 f(b) - a^2 f(a) - 2\int_a^b x\,f(x)\,dx\right\} = 2\pi\int_a^b x\,f(x)\,dx\,.$$

- VOLUME DELLA SFERA. Sappiamo che il volume della sfera è dato dalla seguente formula:

$$\mathbf{V = \frac{4}{3}\pi r^3}.$$

DIMOSTRAZIONE. A suo tempo abbiamo fornito soltanto una spiegazione della formula basata sul principio di Cavalieri [3]. Adesso forniamo una dimostrazione basata sul calcolo integrale.
Una sfera di raggio assegnato r può essere concepita come il solido generato dalla rotazione completa di un semicerchio di raggio r intorno al suo diametro, il che equivale a dire che può essere concepita come il doppio della semisfera generata da una rotazione completa di un quarto di cerchio intorno ad uno dei raggi che lo delimitano.
Ora, assumendo come riferimento cartesiano (Oxy) quello che ha l'origine nel centro del cerchio, e come assi due diametri perpendicolari, il quadrante di cerchio che ci interessa è quello situato nel primo quadrante degli assi. La sua equazione è la seguente: $y=\sqrt{r^2-x^2}$, con $0\le x\le r$. Il volume della sfera di raggio r è, pertanto:

$$V=2\pi\int_0^r (r^2-x^2)dx=2\pi\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^r=2\pi\left(r^3-\frac{r^3}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi r^3.$$

Semplice e rapido.

- PARTI DELLA SFERA. Consideriamo il settore circolare di centro O ed arco AB (Fig. 6). Sia OM il raggio perpendicolare alla corda AB e sia H il punto intersezione delle due rette OM e AB. Evidentemente la retta

[3] Cfr.: Unità 49: Misure dei solidi, N° 49.6

OM è asse di simmetria per la figura.

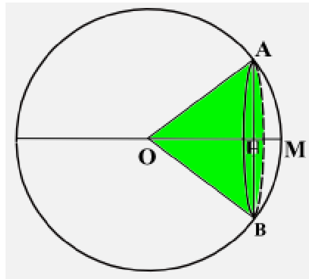

FIG. 6

Il settore circolare OAB, ruotando di mezzo giro intorno alla retta OM, genera un solido, chiamato **settore sferico**.
Nella stessa rotazione il segmento circolare AMB genera un solido chiamato **segmento sferico ad una base**. Esso può essere interpretato anche come ciascuna delle due parti in cui una sfera è divisa da un piano. Il segmento HM si chiama ***altezza*** del segmento sferico ad una base.
Si chiama, invece, **segmento sferico a due basi** la parte di sfera compresa fra due piani paralleli, la distanza dei quali è la sua ***altezza***.

♦ IL SOLIDO IPERBOLICO ACUTISSIMO. Merita particolare menzione, almeno sul piano storico, il solido ottenuto facendo ruotare di un giro completo intorno ad un asintoto la regione piana compresa fra un ramo d'iperbole equilatera, l'asintoto medesimo ed una retta che tagli quel ramo e sia perpendicolare all'asintoto (Fig. 7). Questo solido, pur di dimensioni infinite, ha volume finito ed è il primo esempio della storia con tali caratteristiche. Questo fu scoperto da Evangelista Torricelli, il quale, senza nascondere una sorta di ammirazione, chiamò quel solido ***solido iperbolico acutissimo***.
Con un linguaggio ed un procedimento a noi più congeniale, e comunque diverso ma più semplice di quello seguito da Torricelli, supposto che l'iperbole abbia equazione $y=k/x$, con $k>0$, e che la retta abbia equazione $x=a$, le cose vanno nel modo seguente:

$$V=\pi\int_a^{+\infty}\left(\frac{k}{x}\right)^2 dx=\pi k^2\lim_{t\to+\infty}\int_a^t\frac{1}{x^2}dx=\pi k^2\lim_{t\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_a^t=\pi k^2\lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{t}+\frac{1}{a}\right)=\frac{\pi k^2}{a}.$$

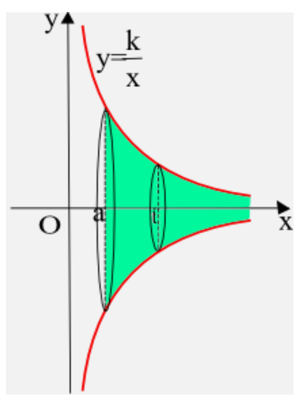

FIG. 7

74.2.3 ESERCIZI E PROBLEMI.

1. Considerato il segmento sferico ad una base, di altezza h, ricavato in una sfera di raggio r, dimostrare che il suo volume è:

$$\mathbf{V=\frac{1}{3}\pi h^2(3r-h)}.$$

Dimostrare, inoltre, che il settore sferico corrispondente ha volume $\overline{V}$ tale che:

$$\mathbf{\overline{V}=\frac{2}{3}\pi r^2 h}.$$

2. In una semicirconferenza di diametro AB è tracciata la corda PQ parallela ad AB. Il segmento circolare ad una base, delimitato da questa corda e dalla semicirconferenza, genera, in una rotazione completa intorno alla retta AB, un solido avente la forma di una sfera bucata. Dimostrare che questo solido è equivalente ad una sfera di diametro PQ.

3. Il grafico γ della funzione f(x), disegnato in un piano cartesiano ortogonale (Oxy), è composto dalla semicirconferenza ACB, dove A(0,1), B(2,1), C(1,2), e dall'arco di parabola BV, avente l'asse parallelo all'asse y e vertice nel punto V(3,0).

a) Esplicitare la funzione f(x) e stabilire se è derivabile nell'intervallo]0,3[.

b) La regione di piano delimitata dal grafico γ e dagli assi coordinati genera, ruotando di un giro completo intorno all'asse x, un solido: calcolarne il volume.

4. Si consideri la seguente funzione f(x) definita su tutto $\mathbb{R}$:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x} & \text{per } x\le 0\\ \frac{1}{2}x^2+1 & \text{per } x>0\end{cases}$$

a) Studiarla rispetto alla continuità e derivabilità.

b) Disegnare il grafico della funzione in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).

c) La regione finita di piano delimitata dal grafico della funzione e dalla retta di equazione y=2 genera, in una rotazione completa intorno all'asse x, un solido: calcolarne il volume.

5. Il raggio di base e l'altezza di un cono circolare retto sono lunghi rispettivamente 1 m e $4/3$ m. Un piano, condotto per il centro della base del cono parallelamente ad una sua generatrice, divide il cono in due parti. Calcolare i loro volumi approssimati ad 1 dm^3, mediante un idoneo software matematico.

[**R.** 0,502 m^3, 0,894 m^3]

6. Due rette, r ed s, si secano formando angoli di 45°. Le due rette sono gli asintoti di un'iperbole contenuta in tali angoli. Una retta t, perpendicolare alla retta r e tangente all'iperbole, forma con le rette r ed s un triangolo di area 2.

Dopo aver riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di assi cartesiani (Oxy):

a) determinare l'equazione della retta t;

b) trovare l'equazione dell'iperbole e disegnarne l'andamento;

c) la retta z, condotta parallelamente alla retta s per il punto in cui si secano r e t, delimita con l'iperbole e la retta t una regione finita R di piano. Calcolare il volume del solido generato da tale regione R quando ruota di un giro completo intorno alla retta t.

$\left[\textbf{R.}\ \ldots;\ V=\frac{25}{24}+\frac{67}{24}\pi-4\pi\ln 2\right]$

7. Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazioni:

$$y=x\sqrt{x^2+1}\quad \text{e}\quad y=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

a) Posto che a sia un qualsiasi numero reale positivo, calcolare:

$$\int_{-a}^{a} x\sqrt{x^2+1}\,dx\quad \text{e}\quad \int_{-a}^{a}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx.$$

b) Calcolare l'area della regione R delimitata dalle due curve e dalla retta di equazione $x=1$.
c) Calcolare il volume del solido generato dalla regione R quando ruota di un giro completo intorno all'asse x.

$$\left[\textbf{R.}\ \text{a)} \ldots ;\ \text{b)}\ \frac{2-\sqrt{2}}{3};\ \text{c)}\ \frac{\pi}{60}(15\pi-28)\right]$$

8. Nel piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), si consideri la regione R delimitata dall'asse x e dalla parabola di equazione: $y=4-x^2$. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione di mezzo giro di R attorno all'asse y.

9. Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), si consideri la regione R delimitata dalla curva di equazione $y=x^2\sqrt{x^2+1}$, dall'asse x e dalla retta di equazione $x=\sqrt{3}$. Si calcoli il volume del solido generato da una rotazione completa di R intorno all'asse y.

[**R.** Per il calcolo dell'integrale si suggerisce il metodo d'integrazione per parti, ponendo: f.f.$=x^2$, f.d.$=x\sqrt{x^2+1}$; $V=116\pi/15$]

10. Nel piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), si consideri la regione finita di piano, delimitata dalla retta di equazione $y=1$ e dalla parabola di equazione $y=(x-1)^2$. Calcolare il rapporto fra i volumi dei solidi generati dalla regione suddetta quando ruota di un giro completo una prima volta intorno all'asse x ed una seconda volta intorno all'asse y. [**R.** 1]

11. Nel piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), si consideri la regione finita di piano, delimitata dall'asse x e dalla cubica di equazione $y=x^2(x-2)$. Calcolare il rapporto fra i volumi dei solidi generati dalla regione suddetta quando ruota di un giro completo una prima volta intorno all'asse x ed una seconda volta intorno all'asse y. [**R.** $8/21$]

12. Nel piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), si consideri la regione finita di piano, delimitata dall'asse x e dalla curva di equazione $y=\sin x$, con $0\leq x\leq\pi$. Stabilire se sono grandezze commensurabili i solidi generati dalla regione suddetta quando ruota di un giro completo una volta intorno all'asse x ed una volta intorno all'asse y.

13. Sono dati un cerchio di centro O e raggio 5 e una parabola avente il vertice in O e distanza focale $9/16$. La parabola divide il cerchio in due regioni, la minore delle quali, ruotando di mezzo giro intorno all'asse della parabola, genera un solido: calcolarne il volume. [**R.** $68\pi/3$]

74.3 SOLIDI GEOMETRICI: SEZIONI E VOLUMI

74.3.1 La modalità di sezionare un solido e di calcolarne il volume facendo variare opportunamente la sezione ottenuta è una pratica che permette di risolvere interessanti problemi, in cui si ha a che fare con figure geometriche piuttosto "strane". Bisogna dire che problemi di tal genere sono stati assegnati negli ultimi anni agli Esami di Stato di Liceo Scientifico. Ce ne vogliamo occupare, presentando la risoluzione di alcuni di tali problemi e proponendo a te la risoluzione di alcuni altri.

♦ PROBLEMA 1. Un solido ha per base un cerchio di raggio 1. Ogni sezione del solido ottenuta con un piano perpendicolare ad un prefissato diametro è un triangolo equilatero. Si calcoli il volume del solido.
[È tratto dall'esame di Stato 2008, indirizzo sperimentale, sessione ordinaria]

RISOLUZIONE. Fissato un diametro del cerchio di centro O, si indica con x la distanza da O del punto in cui un generico piano perpendicolare a tale diametro lo interseca. Ovviamente $-1\leq x\leq 1$. Il lato del triangolo equilatero sezione del piano col solido in questione è perciò $2\sqrt{1-x^2}$ e l'altezza di tale triangolo è, di conseguenza, $\sqrt{3}\sqrt{1-x^2}$. Ne discende che l'area del triangolo è $A(x)=\sqrt{3}(1-x^2)$. Il volume V del solido è pertanto, per ovvie ragioni di simmetria:

$$V=2\sqrt{3}\int_0^1(1-x^2)dx=2\sqrt{3}\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{4}{3}\sqrt{3}\,.$$

Con un po' di immaginazione, si può "vedere" il solido (Fig. 8): la sua base è naturalmente il cerchio di raggio 1; l'intersezione del solido col piano contenente il diametro AB prefissato è l'unione di due archi di circonferenza simmetrici rispetto al piano perpendicolare ad AB nel centro O della circonferenza assegnata. Precisamente, chiamato V il punto situato sulla retta perpendicolare in O al piano della circonferenza base, alla distanza $\sqrt{3}$ da tale piano, un arco è l'arco VA della circonferenza avente il centro in B e l'altro è l'arco VB della circonferenza avente il centro in A. I segmenti aventi per estremi un punto di uno dei due archi e un punto della circonferenza base, situati sullo stesso piano perpendicolare al solito diametro, presi nel loro insieme, formano la "superficie laterale" del solido.

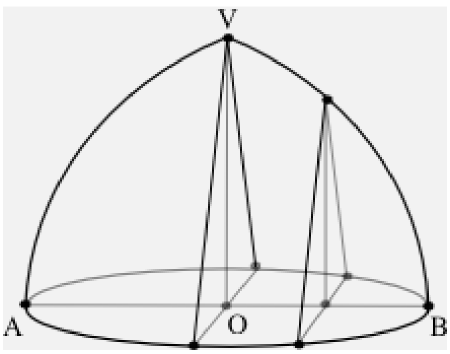

FIG. 8

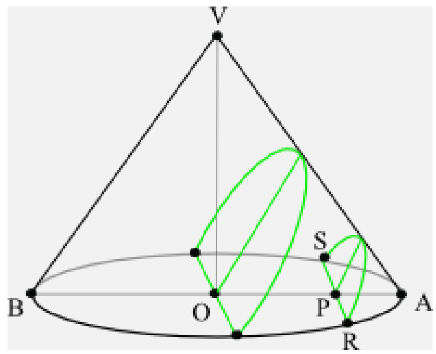

FIG. 9

PROBLEMA 2. Il raggio di base e l'altezza di un cono circolare retto sono lunghi rispettivamente 1 m e 4/3 m. Un piano, condotto per il centro della base del cono parallelamente ad una sua generatrice, divide il cono in due parti. Calcolare i loro volumi, dopo aver verificato che una primitiva della funzione $\sqrt{x^3(2-x)}$ è:

$$\frac{1}{6}\sqrt{x(2-x)}(2x^2-x-3)+\operatorname{asin}\sqrt{\frac{x}{2}}\,.$$

RISOLUZIONE. Considerato il cono di vertice V e diametro di base AB (Fig. 9), il piano α, condotto per il centro O della base parallelamente alla generatrice VB, seca il cono secondo un segmento parabolico. Lo stesso accade se si conduce un piano parallelo al primo per un generico punto P del raggio OA: si ottiene il segmento parabolico di base RS ed altezza PQ.

Posto $\overline{AP}=x$, al variare di x da 0 ad 1, questo secondo segmento parabolico K descrive un solido, che è esattamente una delle due parti in cui il piano α divide il cono. Il volume V' di questo solido è $\int_0^1 A(x)dx$, essendo A(x) l'area del segmento parabolico K. Si trova:

$$A(x)=\frac{10}{9}\sqrt{x^3(2-x)}\,.$$

Siccome, come puoi verificare da te, una primitiva della funzione $\sqrt{x^3(2-x)}$ è:

$$\frac{1}{6}\sqrt{x(2-x)}(2x^2-x-3)+\operatorname{asin}\sqrt{\frac{x}{2}}\,,$$

risulta:

$$V' = \frac{10}{9} \cdot \left[\frac{1}{6}\sqrt{x(2-x)}(2x^2 - x - 3) + \operatorname{asin}\sqrt{\frac{x}{2}} \right]_0^1 = \frac{5\pi}{18} - \frac{10}{27} \approx 0{,}502\ (\text{dm}^3).$$

D'altro canto, il volume del cono è $V = \frac{4\pi}{9}\,\text{dm}^3$, per cui il volume V" dell'altra parte di cono è:

$$V'' = \frac{4\pi}{9} - V' = \frac{4\pi}{9} - \left(\frac{5\pi}{18} - \frac{10}{27}\right) = \frac{3\pi}{18} + \frac{10}{27} \approx 0{,}894\ (\text{dm}^3)\,.$$

PROBLEMA 3. I grafici della funzione $y=x^3$, con $x\geq 0$, e della sua inversa, assegnati in un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), delimitano una regione D.

a) Si calcoli l'area di D. b) La regione D è la base di un solido W le cui sezioni con piani perpendicolari alla bisettrice del primo quadrante sono tutte rettangoli di altezza 12. Si determini la sezione di area massima. Si calcoli il volume di W.

[Ispirato all'esame di Stato 2009, indirizzo sperimentale, sessione ordinaria]

RISOLUZIONE.

a) Una volta disegnato il grafico della funzione $y=x^3$, con $x\geq 0$, quello della sua inversa, $y=\sqrt[3]{x}$, si ottiene ribaltando il primo rispetto alla bisettrice del 1° quadrante, $y=x$ (Fig. 10). L'area della regione D, sempre per ragioni di simmetria, è il doppio dell'area delimitata dal primo grafico e dalla retta $y=x$. Vale a dire:

$$\text{Area}(D) = 2\int_0^1 (x - x^3)\,dx = 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

b) Il solido W, avente per base la regione D e altezza $h=12$, è rappresentato in figura 11. Il suo volume è evidentemente:

$$V = \text{Area}(D) \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6.$$

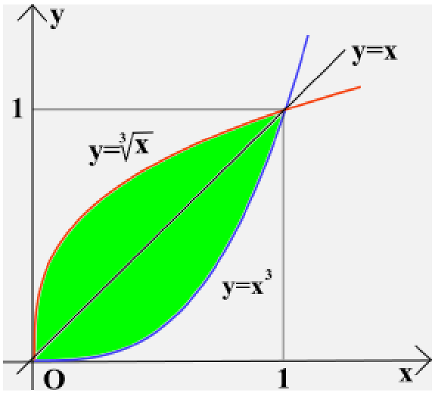

FIG. 10

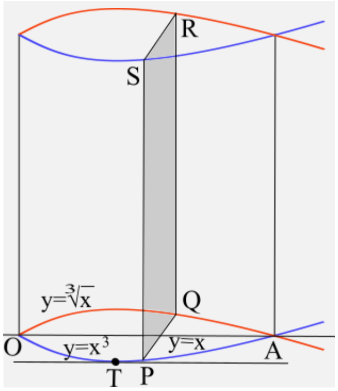

FIG. 11

La sezione rettangolare PQRS è massima quando è massima la sua base PQ ossia quando P si trova nel punto di massima distanza dalla retta $y=x$, il che si verifica quando P si trova nella posizione T, punto di contatto della curva $y=x^3$ con la tangente ad essa parallela alla retta $y=x$. Per trovare tale posizione T conviene ritornare alla figura originaria, completata con la tangente suddetta (Fig. 12).

Si trova agevolmente che il punto T ha coordinate $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{9}\right)$ e che la sua distanza dalla retta $y=x$ è $d=\frac{\sqrt{6}}{9}$.

Ragion per cui il massimo valore di PQ è $\frac{2}{9}\sqrt{6}$. Ne consegue che la sezione rettangolare massima ha area:

$$S = \frac{2}{9}\sqrt{6} \cdot 12 = \frac{8}{3}\sqrt{6}\,.$$

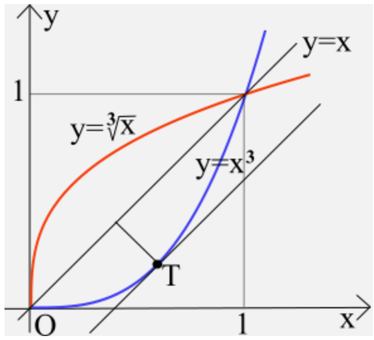

FIG. 12

PROBLEMA 4. Nel settore circolare AOB, il raggio OA è lungo 2 e l'angolo AÔB misura 60°. Il settore è la base di un solido W le cui sezioni ottenute con piani ortogonali ad OB sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di W.

[Ispirato all'esame di Stato 2009, indirizzo scientifico, sessione ordinaria]

RISOLUZIONE. Conviene riferire il piano della figura ad un sistema di assi cartesiani ortogonali, in modo che l'origine coincida con il centro O del settore e l'asse x con la retta OB orientata da O verso B ed in modo che il punto A cada nel primo quadrante (Fig. 13).

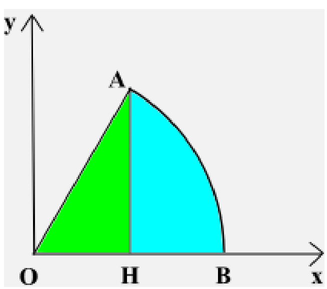

FIG. 13

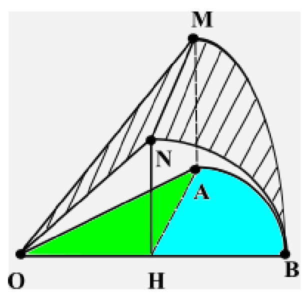

FIG. 14

Il raggio OA ha allora equazione $y=x\sqrt{3}$, con $0\leq x\leq 1$, mentre l'arco AB ha equazione $y=\sqrt{4-x^2}$, con $1<x\leq 2$. Ne consegue che l'area del quadrato sezione del solido W con un generico piano perpendicolare ad OB (asse x) è:

$$A(x)=\begin{cases}3x^2 & \text{se } 0\leq x\leq 1\\ 4-x^2 & \text{se } 1<x\leq 2\end{cases}$$

Considerato che il volume V del solido W è $V=\int_{[0,2]} A(x)dx$, si ha:

$$V=\int_0^1 3x^2dx+\int_1^2 (4-x^2)dx=\frac{8}{3}.$$

La figura 14 è una rappresentazione piana del solido W.

74.3.2 PROBLEMI.

1. Sono date la circonferenza C' di diametro AB lungo 2k, dove k è una lunghezza assegnata, e la circonferenza C" avente AB ancora come diametro ma situata in un piano perpendicolare a quello contenente C'. Indicato con H un generico punto di AB e condotto per H il piano perpendicolare ad AB, siano P, Q i punti in cui esso interseca la circonferenza C' e R, S quelli in cui interseca C". a) Dimostrare che il

quadrilatero PRQS è un quadrato, indipendentemente dalla posizione di H. b) Mentre H varia, descrivendo il diametro AB, il quadrilatero PRQS descrive un solido. Calcolarne il volume. c) Determinare per quale misura del diametro delle circonferenze il volume trovato è uguale a $72\ cm^3$.

[**R.** a) ...; b) $8k^3/3$; c) ...]

2. ® Nel piano, riferito ad un sistema (Oxy) di coordinate cartesiane, siano assegnate le parabole di equazioni: $y^2=2x$ e $x^2=y$. Indicato con A il punto in cui s'intersecano le due parabole, oltre che in O, si chiami D la parte di piano delimitata dagli archi delle due parabole di estremi O ed A.
   a) Si determini la retta r, parallela all'asse x, che stacca su D il segmento di lunghezza massima.
   b) Si consideri il solido W ottenuto dalla rotazione di D introno all'asse x. Se si taglia W con piani ortogonali all'asse x, quale forma hanno le sezioni ottenute? Si calcoli il volume di W.

   [Ispirato all'esame di Stato 2010, indirizzo scientifico, sessione ordinaria]

$$\left[\textbf{R.}\ \text{a) } y=\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\ ;\ \text{b) } \frac{3}{5}\pi\sqrt[3]{4}\right]$$

3. Il settore circolare AOB, quarta parte di un cerchio di centro O e raggio a, è la base di un solido Σ le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari ad OA, sono tutte quadrati.
   a) Calcolare il volume di Σ.
   b) Calcolare per quale valore di a questo volume è $3\sqrt{3}\ m^3$.

$$\left[\textbf{R.}\ \text{a) } \ldots;\ \text{b) } \sqrt{3}\right]$$

4. È dato un segmento parabolico, la cui base AB è perpendicolare all'asse della parabola ed è lunga 2r, dove r è una lunghezza assegnata. La distanza del vertice della parabola dalla retta AB è r. Nel piano perpendicolare al piano della parabola e contenente la retta AB è condotta, ad una distanza r da AB, la retta s parallela ad AB. Indicato con H un generico punto del segmento AB, si conduca per H il piano perpendicolare ad AB e si chiamino P e Q i punti in cui esso interseca rispettivamente la retta s e la parabola. a) Mentre il punto H varia descrivendo il segmento AB, il triangolo HPQ descrive un solido. Calcolarne il volume. b) Determinare l'area del segmento parabolico nel caso in cui il volume trovato sia $144\ cm^3$. [**R.** a) $2r^3/3$; b) $48\ cm^2$]

5. Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la regione R sotto il grafico della funzione $y=k/x$, dove k è un numero reale positivo, relativa all'intervallo $[1,3]$. Un solido Σ è tale che un generico piano perpendicolare all'asse x lo interseca secondo un rettangolo avente un lato coincidente con la sezione di Σ con R e un altro lato di lunghezza doppia. Calcolare:
   a) il volume di Σ;
   b) il volume del solido generato dalla regione R in una rotazione completa intorno all'asse x;
   c) il volume del solido generato dalla regione R in una rotazione completa intorno all'asse y.

$$\left[\textbf{R.}\ \text{a) } \frac{4}{3}k^2;\ \text{b) } 4k\pi;\ \text{c) } \frac{2}{3}k^2\pi\right]$$

6. Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la regione R sotto il grafico della funzione $y=\sin x$, relativa all'intervallo $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Un solido Σ è tale che un generico piano perpendicolare all'asse x lo interseca secondo un rettangolo avente un lato coincidente con la sezione di Σ con R e un altro lato di lunghezza $\cos x$. Calcolare:
   a) il volume di Σ;
   b) il volume del solido generato dalla regione R in una rotazione completa intorno all'asse x;
   c) il volume del solido generato dalla regione R in una rotazione completa intorno all'asse y.

$$\left[\textbf{R.}\ \text{a) } \frac{1}{2};\ \text{b) } \frac{\pi^2}{4};\ \text{c) } 2\pi\right]$$

7. Sia la parabola di vertice V e distanza focale $\frac{3}{4}$L, essendo L una lunghezza assegnata. La sua corda AB, perpendicolare all'asse della parabola, individua un segmento parabolico di area $12\mathrm{L}^2$.

a) Calcolare le lunghezze della corda AB e della distanza VH di V da essa.

b) Il segmento parabolico sia la base di un solido Σ, ogni sezione del quale, ottenuta con un piano perpendicolare all'asse della parabola, sia un triangolo equilatero. Calcolare il volume di Σ.

$\left[\textbf{R.}\ \text{a)}\ \overline{AB}=6L,\ \overline{VH}=3L;\ \text{b)}\ V=3L\sqrt{3}\int_0^{3L} t\,dt\right]$

8. È data un'ellisse di semiassi a, b (a>b). Essa è la base di un solido Σ, ogni sezione del quale, ottenuta con un piano perpendicolare alla retta dell'asse maggiore dell'ellisse, sia un quadrato. Calcolare il volume di Σ. $\left[\textbf{R.}\ \frac{16}{3}ab^2\right]$

9. Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la parabola di equazione:

$$x^2-2x+4y=0\ .$$

a) Calcolare l'area della regione finita R di piano delimitata da essa e dall'asse x.

b) Calcolare il volume del solido generato dalla regione R quando ruota di un giro completo intorno all'asse y.

c) La regione R è la base di un solido Σ, ogni sezione del quale con un piano α perpendicolare al piano della parabola e parallelo all'asse x è un trapezio rettangolo. E precisamente la base maggiore del trapezio è la corda intersezione del piano α con la parabola, la base minore è lunga la metà della maggiore e il lato perpendicolare alle basi è lungo quanto la base maggiore e passa per un punto dell'arco OV della parabola, essendo V il suo vertice. Calcolare il volume di Σ.

$\left[\textbf{R.}\ \text{a)}\ \frac{1}{3}\ ;\ \ \text{b)}\ \frac{2}{3}\pi\ ;\ \ \text{c)}\ \frac{3}{8}\right]$

10. In un cerchio è tracciata la corda AB lunga 8a, essendo a una lunghezza assegnata. Si prenda un punto C interno ad essa in modo che la corda DE, passante per C, individui due triangoli, CAD e CEB, uguali e rettangoli rispettivamente in A e in E.

1. A) Determinare la funzione f(x) che esprime l'area del triangolo CAD in funzione della lunghezza x del segmento AC.
   B) Trovare la posizione di C per la quale il triangolo CAD ha area massima.
   C) Trovare la posizione di x per la quale il triangolo CAD ha area $6a^2$.
2. A) In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), disegnare il grafico G della funzione f(x) trovata sopra.
   B) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dal grafico G e dall'asse x.
   C) Questa regione di piano è la base di un solido Σ, ogni sezione del quale, ottenuta con un piano perpendicolare all'asse x è un quadrato: calcolare il volume di Σ.

$\left[\textbf{R.}\ 1A)\ f(x)=2x\sqrt{4a-x},\ \text{con}\ 0<x<4a,\ 1B)\ AC=\frac{8}{3}a,\ 1C)\ 2\ \text{sol.: ...}\ ;\ 2A)...\ ,\ 2B)\ \frac{256}{15}a^2,\ 2C)\ \frac{256}{3}a^3\right]$

74.4 MEDIA INTEGRALE

74.4.1 Supponiamo che una funzione f(x) sia definita nei punti $x_1, x_2, ..., x_n$ di un determinato intervallo [a,b]. I valori assunti da f(x) sono allora: $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)$. Ha senso calcolare la media aritmetica dei valori $f(x_i)$ e sappiamo che è uguale al rapporto fra la loro somma $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$ ed il loro numero n, vale a dire, indicando con μ tale media:

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,.$$

Questa relazione può essere scritta nel seguente modo equivalente:

$$\mu = \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(x_i)\,.$$

Ora, quando $n\to\infty$, la quantità $\frac{b-a}{n}$ tende a 0 e può essere identificata con il differenziale dx, mentre $f(x_i)$ tende al valore f(x) assunto dalla funzione in un generico x dell'intervallo [a,b]. Ragion per cui la sommatoria indica la "somma di infiniti elementi infinitamente piccoli f(x)dx". Cosicché, posto che f(x) sia integrabile su [a,b], la sommatoria, quando $n\to\infty$, tende a $\int_a^b f(x)dx$. Possiamo scrivere perciò:

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\ .$$

Questo numero μ si chiama ***media integrale*** (o anche ***valor medio***) di f(x) in [a,b].

Ne possiamo dare una semplice interpretazione geometrica. Basta riflettere sul fatto che $\int_a^b f(x)dx$, cioè l'area del trapezoide di base [a,b] relativo alla funzione f(x), in base alla formula precedente è uguale a μ(b−a), vale a dire all'area del rettangolo di base [a,b] ed altezza μ. La media integrale μ di f(x) in [a,b] è pertanto l'altezza di un rettangolo (Fig. 15) avente base [a,b] ed equivalente al trapezoide relativo ad f(x), avente la stessa base. In figura evidentemente le due regioni ombreggiate, A e B, sono equivalenti.

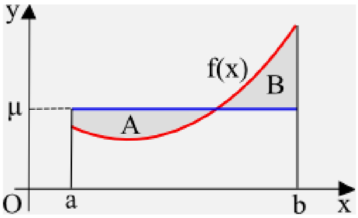

FIG. 15

Anche un'interpretazione fisica può essere interessante. Sia al riguardo $v=v(t)$ una funzione esprimente la velocità istantanea di un corpo in movimento rispetto al tempo t, continua in un determinato intervallo [a,b]. L'integrale $\int_a^b v(t)dt$ rappresenta, com'è noto, il cammino percorso dal corpo nell'intervallo di tempo [a,b]. Per cui il valore medio di v(t) in [a,b], cioè $\frac{1}{b-a}\int_a^b v(t)dt$, vale a dire il rapporto fra il cammino percorso e l'intervallo di tempo impiegato a percorrerlo, rappresenta la velocità media del corpo nell'intervallo di tempo [a,b].

OSSERVAZIONE.

Sia $s=s(t)$ la legge oraria di un moto che si svolge senza soste da una posizione A, occupata nell'istante a, ad una posizione b, occupata nell'istante b. La legge della velocità del moto nell'intervallo [a,b] è $v=s'(t)$ ed è certamente continua in tale intervallo. Di modo che la velocità media v_m in tale intervallo è:

$$v_m = \frac{1}{b-a}\int_a^b s'(t)\,dt = \frac{1}{b-a}[s(t)]_a^b = \frac{s(b)-s(a)}{b-a}\,.$$

D'altro canto, in virtù del teorema di Lagrange, esiste un istante $t_0\in]a,b[$ tale che $v_m=s'(t_0)$. Di conseguenza, per quell'istante t_0 si ha:

$$s'(t_0) = \frac{1}{b-a}\int_a^b s'(t)dt\,.$$

Non per niente, com'è noto, il teorema di Lagrange è detto pure teorema del valor medio.

Più in generale, vale la seguente proprietà delle funzioni continue, che va sotto il nome di **teorema della media integrale**:

Se f(x) è una funzione continua in un determinato intervallo [a,b], esiste un punto $c\in]a,b[$ tale che:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\,.$$

74.4.2 Ti proponiamo alcuni esercizi.

1. Calcolare la media integrale della funzione f(x) nell'intervallo [a,b], sapendo che:

a) $f(x)=x,\ \ a=0,\, b=1;$ b) $f(x)=\cos x,\ \ a=0,\, b=\pi;$ c) $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|},\ \ a=-1,\, b=1.$

2. Calcolare la media integrale della funzione f(x) nell'intervallo [a,b], sapendo che:

a) $f(x) = x^2(x^3-2)^4,\ \ a=0, b=1\,;$ b) $f(x) = x^3(x^2-2)^4,\ \ a=0, b=1\,.$

3. ® Si supponga che la velocità di una marea sia una funzione sinusoidale del tempo con periodo 12 ore. Sapendo che è di 5 km/h la velocità massima della marea, calcolare la sua velocità media nelle prime 6 ore. [**R.** 3,18 km/h]

4. È assegnata la funzione:

$$f(x)=\int_0^x \left[\cos\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\right]dt\,.$$

Si trovi il valor medio di $f'(x)$ sull'intervallo $[0, 2\pi]$.

[Tratto dal tema assegnato agli esami di Stato 2013, indirizzo scientifico, sessione ordinaria]

5. Un punto materiale si muove su una traiettoria rettilinea secondo la seguente legge oraria:

$$s(t) = \int_0^t \sin(2t)\,dt\,,$$

dove t è misurato in secondi ed s in metri.

Si trovi la sua velocità media nell'intervallo di tempo che va da 0 secondi a $\pi/2$ secondi.

$\left[\textbf{R.}\ \frac{2}{\pi}\ m/s\right]$

6. È assegnata la funzione:

$$f(t) = \sin^2\left(\frac{2\pi}{T}t\right).$$

Si trovi il suo valor medio sull'intervallo [0,T]. [**R.** 1/2]

74.5 PROBLEMI DI ECONOMIA [4]

74.5.1 È noto che, in regime di capitalizzazione composta e continua, il montante M di un capitale C, investito al tasso annuo i, dopo t anni è:

---

[4] Questo paragrafo riguarda in particolare il Liceo delle Scienze umane, opzione Economico-sociale, ed inoltre l'indirizzo Trasporti e Logistica e l'indirizzo Agraria, Agroalimentare e Agroindustria dell'Istituto Tecnico, settore Tecnologico.

$$M = C\,e^{i\,t}\,,$$

dove "e" è il numero di Nepero.
Questo se il tasso i è costante nel tempo. Se però i è una funzione del tempo, $i=i(t)$, allora M deve considerarsi come la somma di infiniti elementi infinitesimi dM, tali che:

$$dM = C\,e^{\,i(t)\,dt}\,.$$

Ragion per cui, dopo t anni e tenendo presente che all'anno 0 è $M=C$; si ha:

$$M = C\,e^{\int_0^t i(t)dt}\,.$$

Per esempio, se $i=at+b$, allora, essendo:

$$\int_0^t (at+b)\,dt = \frac{1}{2}at^2 + bt\,.$$

risulta:

$$M = C\,e^{\frac{1}{2}at^2+bt}\,.$$

Da qui, come caso particolare, se a=0 e b=i, si ritrova naturalmente la legge dalla quale abbiamo preso le mosse.

74.5.2 È noto che il costo totale C_t affrontato da un'impresa per produrre una determinata merce è una funzione della quantità x di merce prodotta: $C_t=C_t(x)$. A sua volta, il costo marginale $C_m(x)$ è la derivata del costo totale rispetto ad x:

$$C_m(x) = \frac{dC_t(x)}{dx}$$

e pertanto:

$$dC_t(x) = C_m(x)\,dx\,.$$

Ragion per cui, per una quantità indeterminata x di merce si ha:

$$C_t(x) = \int C_m(x)\,dx\,.$$

Per esempio, ci proponiamo di trovare la funzione "costo totale", sapendo che $C_m(x)=2x-5$. Si ha:

$$C_t(x) = \int (2x-5)\,dx = x^2 - 5x + c\,.$$

Se poi si suppone che sia $C_t(x)=12$ per x=0, allora si trova c=12 e pertanto la funzione del costo totale è:

$$C_t(x) = x^2 - 5x + 12\,.$$

75.5.3 Ti proponiamo qualche esercizio.

1. Un capitale di € 25.000, investito al tasso annuo dell'1,75% per 4 anni, produce l'interesse:
a) I_1 in regime di capitalizzazione composta semestrale;
b) I_2 in regime di capitalizzazione composta e continua.
I_2 è maggiore o minore di I_1? Di quanto? [**R.** …; ≈ € 8,16]

2. Un capitale C_1, impiegato in regime di capitalizzazione composta quadrimestrale al tasso annuo dell'1,8% per 5 anni, produce un montante di € 50.000. Per produrre lo stesso montante in regime di capitalizzazione composta e continua allo stesso tasso annuo e per lo stesso periodo di tempo occorre investire un capitale C_2.
C_2 è maggiore o minore di C_1? Di quanto? [**R.** …; ≈ € 12,29]

3. Un capitale di € 50.000, investito in regime di capitalizzazione composta trimestrale al tasso annuo i_1 per 10 anni, produce un montante di € 60.000. Per produrre lo stesso montante in regime di capitalizzazione composta e continua, impiegando lo stesso capitale per lo stesso periodo di tempo il tasso d'interesse deve avere un valore i_2. Quanto vale i_1? Quanto i_2? [**R.** $i_1 \approx 1{,}827\%$; $i_2 \approx 1{,}823\%$]

4. Un capitale di € 50.000, investito in regime di capitalizzazione composta trimestrale al tasso annuo dell'1,8% per t_1 anni, produce un montante di € 60.000. Per produrre lo stesso montante in regime di capitalizzazione composta e continua, impiegando lo stesso capitale allo stesso tasso d'interesse occorre un periodo di tempo t_2. Quanto vale t_1? Quanto t_2? [**R.** $t_1 \approx 10{,}15$ anni; $t_2 \approx 10{,}12$ anni]

5. Determinare la funzione "costo totale" $C_t(x)$, sostenuta da un'azienda, sapendo che la funzione "costo marginale" $C_m(x)$ è la seguente:

$$\text{a) } C_m(x) = 3x - 2\,; \quad \text{b) } C_m(x) = 3x^2 - x + 1\,; \quad \text{c) } C_m(x) = x + \frac{1}{x+1}\,,$$

dove x (con $x>0$) rappresenta le unità di quantità di merce prodotta e $C_m(x)$ è espressa in migliaia di euro per unità di merce, e sapendo inoltre che l'azienda deve affrontare una spesa iniziale di 20.000 euro per avviare l'impresa, il che è come dire che $C_t(0)=20$ (migliaia di euro).

$$\left[\textbf{R.}\ \text{a) } C_t(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2x + 20;\ \text{b) } \dots;\ \text{c) } C_t(x) = \frac{1}{2}x^2 + \ln(x+1) + 20\right]$$

6. Determinare la funzione "costo unitario" $C_u(x)$ sapendo che $C_t(0)=63$, dove $C_t(x)$ è il "costo totale", e che la funzione "costo marginale" è la seguente:

$$C_m(x) = 3x^2 + 2x - 2\,, \ \text{con } x > 0.$$

Si ricorda che $C_u(x)=C_t(x)/x$.

Verificare quindi che il grafico del costo marginale interseca quello del costo unitario nel punto in cui quest'ultimo assume il valore minimo.

VERIFICHE

Gli esercizi proposti via via nel corso dello sviluppo dell'unità non richiederebbero altre questioni di verifica. Nondimeno, proponiamo alcuni problemi, di varia natura e variamente articolati, non necessariamente collegati alle questioni trattate in questa unità, per la risoluzione dei quali si suggerisce, ove necessario, l'uso di un idoneo software matematico [5].

1. A) Un uovo di gallina può essere assimilato ad un solido ottenuto facendo ruotare di mezzo giro un'ellisse intorno al suo asse maggiore (N.B.: un solido siffatto è chiamato *ellissoide di rotazione*). Si supponga che i semiassi di una tale ellisse misurino 2,5 cm e 3 cm.

Un pentolino, avente la forma di un cilindro circolare retto il cui raggio di base misura 5 cm e l'altezza 12 cm, contiene acqua fino ad un livello di 7 cm rispetto alla base.

Calcolare di quanto, con l'approssimazione di 1 mm, s'innalza il livello dell'acqua contenuta nel pentolino quando vi è immesso l'uovo, nell'ipotesi ovvia che l'uovo medesimo affondi completamente.

B) Se si vuole ottenere un uovo sodo, si sa che bisogna farlo bollire per circa 8 minuti in acqua bollente a 100°C. Sennonché, la temperatura di ebollizione dell'acqua è di 100°C se la pressione dell'aria è di 1 atmosfera (equivalente a 760 mm di mercurio o anche a 101.325 $kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$).

[5] I problemi proposti in questa sezione sono un valido banco di prova per la preparazione agli esami di Stato per i Licei Scientifici.

Ma si sa pure che la temperatura di ebollizione dell'acqua diminuisce col diminuire della pressione dell'aria. Si ipotizzi che alcuni valori della temperatura y di ebollizione dell'acqua (y è misurata in gradi centigradi) al variare della pressione x dell'aria (x è misurata in millimetri di mercurio) siano quelli forniti dalla tabella sottostante (Tab. 1):

Tab. 1 – Temperatura di ebollizione dell'aria in funzione della pressione dell'aria.

y	10	15	20	25	35	45	55	70	80	100
x	10	20	30	50	90	150	230	350	520	760

1) Costruire un diagramma a dispersione che visualizzi i dati riassunti nella tabella.
2) Stabilire quale delle seguenti funzioni – dove ln(a) indica il logaritmo naturale del numero a ed "e" è la base di tale logaritmo – si adatta meglio a descrivere la situazione reale riassunta nella tabella:

$$y=\frac{25}{7}\sqrt{x}\,; \qquad y=15\ln(25+x)\,; \qquad y=36\,e^{x/760}\,.$$

3) Disegnare la funzione scelta sullo stesso piano su cui è stato rappresentato il diagramma precedente.

C) Ammesso che $p_0=101.325\ \mathrm{kg{\cdot}m^{-1}{\cdot}s^{-2}}$ sia la pressione dell'atmosfera al livello del mare e a 0 °C di temperatura, p_h sia la pressione ad un'altitudine h sul livello del mare ed inoltre che $m_0=1{,}293\ \mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ sia la densità dell'aria e $g=9{,}806\ \mathrm{m}{\cdot}s^{-2}$ sia l'accelerazione di gravità, si sa che, per valori di h di alcune centinaia di metri, risulta:

$$h=-\frac{p_0}{m_0 g}\int_{p_0}^{p_h}\frac{dp}{p}\,.$$

1) Trovare l'espressione di p_h in funzione di h.
2) Posto che, a 2.000 m di altitudine, la temperatura di ebollizione dell'acqua sia superiore di circa 6°C a quella che si otterrebbe se si ammettesse che la relazione precedente fosse valida anche a quell'altitudine, spiegare perché a quell'altitudine non è possibile ottenere un uovo sodo immettendolo in acqua bollente.
3) È tuttavia possibile ottenere un uovo sodo immettendolo in acqua bollente: con quale accorgimento? E perché tale accorgimento funziona?

2. La base maggiore di un pandoro, che solitamente è una stella a otto punte, ha un'area di 81 cm^2, la base minore, simile alla maggiore, ha un'area di 49 cm^2 e l'altezza è di 24 cm. Un piano parallelo alle basi seca il pandoro secondo una superficie S.

a) Dimostrare che l'area di S, espressa in funzione della distanza x del piano secante dalla base maggiore, è data dalla seguente formula:

$$S=\frac{1}{144}\,(108-x)^2.$$

b) Utilizzare tale espressione per calcolare, con il metodo dell'integrazione, il volume del pandoro.
c) Far vedere che il risultato ottenuto è esattamente quello che si ottiene calcolando lo stesso volume con i metodi della geometria elementare e precisamente assimilando il pandoro ad un opportuno tronco di piramide concava.
d) Prescindendo dalla questione reale, si rappresenti la funzione S=S(x), trovata sopra, in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali e si calcoli il volume del solido generato in una rotazione completa intorno all'asse y dalla regione finita di piano delimitata dal grafico della funzione e dagli assi coordinati.

3. In una lamina metallica, avente la forma di un quadrato di lato lungo 2 m, si ritagliano quattro quadrati, aventi tutti lato della stessa lunghezza x ed un vertice in un vertice della lamina. I lembi esterni della lamina sono ripiegati opportunamente in modo da formare un recipiente avente la forma di un parallelepipedo rettangolo a base quadrata.

a) Esprimere in funzione di x la capacità y del recipiente ottenuto e rappresentare graficamente la funzione y=y(x) in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).

b) Trovare le dimensioni del recipiente che ha la massima capacità.

c) Si prenda in esame la regione R compresa fra l'asse x e il grafico della funzione y=y(x), considerata prescindendo dalla questione reale. Essa sia la base di un solido Σ, ogni sezione del quale con un piano α perpendicolare all'asse x, sia un quadrato. Calcolare il volume di Σ.

d) Determinare, tra le sezioni di Σ con α, quella che ha la massima area.

4. Il tempo di cottura per le patate lesse, se le patate sono molto grosse, è di 35 minuti dal momento in cui l'acqua in cui le patate sono immerse comincia a bollire. Il che, se la pressione ambientale è di 1 atmosfera, accade quando la temperatura dell'acqua raggiunge i 100°C. Ma se la pressione ambientale aumenta – il che accade utilizzando una pentola a pressione – anche la temperatura di ebollizione dell'acqua aumenta e il tempo di cottura diminuisce.

A) Si ipotizzi che alcuni valori della temperatura y di ebollizione dell'acqua (y è misurata in gradi centigradi) in funzione della pressione ambientale x (misurata in atmosfere) siano quelli riportati nella tabella sottostante (Tab. 2):

Tab. 2 – Temperatura di ebollizione dell'aria in funzione della pressione ambientale.

x	1	4,69	15,3	39,2	84,8
y	100	150	200	250	300

1. Costruire un diagramma a dispersione che visualizzi la situazione.
2. Sono date le seguenti funzioni:
$$y = 51\sqrt{x} - \frac{5}{2}x + 51, \qquad y = -\frac{1}{15}x^2 + 8x + 92\,.$$
Stabilire quale di esse si adatta meglio a descrivere la situazione reale.
3. Scelta la funzione più idonea e prescindendo dalla questione reale, calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dal grafico di tale funzione, dall'asse x e dalle rette di equazioni x=49, x=100.

B) Una volta calcolato, ovviamente con approssimazione, a quale temperatura l'acqua inizia a bollire alla pressione di 1,8 atmosfere, che è per l'appunto la pressione in una pentola a pressione:

1. Tenendo presente che a tale temperatura il tempo di cottura delle patate lesse si riduce del 60%, calcolare il nuovo tempo di cottura.
2. Supponendo di utilizzare come fonte di calore un fornello elettrico della potenza di 1 kw, calcolare quanta energia elettrica si risparmiata utilizzando la pentola a pressione.

C) Si supponga di potersi servire di due società fornitrici di energia elettrica, S_1 ed S_2 , le cui tariffe siano quelle sintetizzate nella tabella sottostante (Tab. 3):

Tab. 3

	Spese fisse bimestrali	Costo dell'energia per kwh
Società S_1	€ 18	€ 0,09
Società S_2	€ 20	€ 0,08

1. Da quale società è conveniente economicamente essere serviti?
2. Esiste un consumo per il quale è indifferente essere serviti da una società piuttosto che dall'altra?

5. Siano $C_t(x)$, $C_u(x)$, $C_m(x)$ rispettivamente il costo totale, il costo unitario e il costo marginale sostenuti da un'azienda per la produzione dell'unità di quantità di merce x (con x>0).

a) Si ricorda che le funzioni "costo totale" e "costo marginale" sono legati dalla seguente relazione:
$$C_m(x) = \frac{dC_t(x)}{dx}.$$
Quale relazione lega invece le funzioni "costo totale" e "costo unitario" ?

b) La funzione "costo marginale" sia la seguente:
$$C_m(x) = 4x + 3\,,$$
dove x (con x>0) rappresenta le unità di quantità di merce prodotta e $C_m(x)$ è espresso in migliaia di euro per unità di merce. Sapendo che l'azienda deve affrontare una spesa iniziale di 15.000 euro per avviare l'impresa, determinare la funzione "costo unitario".

c) Dopo aver disegnato sullo stesso piano cartesiano i grafici delle funzioni "costo marginale" e "costo unitario", verificare che il primo grafico interseca il secondo nel punto in cui quest'ultimo assume valore minimo.

d) Dimostrare che, qualunque sia la funzione "costo totale", il grafico della funzione "costo marginale" interseca quello della funzione "costo unitario" nel punto in cui quest'ultimo assume valore minimo.

6. Si consideri il polinomio P(x).

a) Tra i suoi zeri reali ci sono i numeri −2, contato due volte, 0 e 2. Qual è il suo grado minimo?

b) Posto che il suo grafico, limitato all'intervallo [−3,3], sia quello rappresentato nella figura sottostante (Fig. 16), la quale mostra che detto grafico presenta tangente "orizzontale", oltre che nel punto di ascissa x=−2, anche nei punti di ascissa x=−1 e x=1, qual è il grado minimo del polinomio?

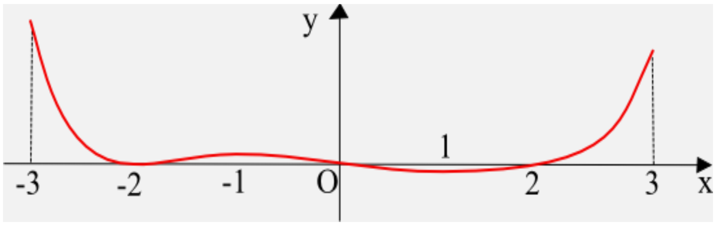

FIG. 16

c) Ammesso inoltre che sia
$$\int_0^2 P(x)\,dx = -\frac{26}{5},$$
qual è esattamente il polinomio P(x)?

d) Ammesso che f(x) sia una primitiva di P(x), studiare f(x) nell'intervallo [−3,3] rispetto alla monotonia, spiegando in particolare se in tale intervallo il grafico di f(x) presenta punti con tangente orizzontale e precisando se si tratta di massimi o di minimi relativi.
Per risolvere questo quesito è indispensabile conoscere l'espressione di P(x)?

7. Un punto materiale si muove su una retta. La sua velocità v, misurata in metri al secondo, è espressa, in funzione del tempo t, misurato in secondi, dalla seguente legge:

$$v = t + \sin(2t),\ \text{con } 0\leq t\leq \pi.$$

a) Rappresentare la funzione in un piano cartesiano in cui si prendano i tempi sull'asse delle ascisse e le velocità su quello delle ordinate.

b) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dal grafico della funzione, dall'asse delle ascisse e dalla retta di equazione $t=\pi$. Dire qual è il significato fisico di quest'area.

c) Calcolare la velocità media tenuta dal punto materiale nell'intervallo di tempo $[0,\pi]$.

d) Trovare in quale posizione, sulla retta del moto, si trova il punto materiale nell'istante $t=0$. Con quale velocità? Con quale accelerazione?

e) Dimostrare che in due istanti è nulla l'accelerazione del punto materiale. In quali posizioni si trova il punto in tali istanti? Con quali velocità?

8. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazioni:

$$y=\frac{1}{4}x^2 \quad \text{e} \quad y=\frac{1}{4}x^2+7\,,\quad \text{con } x\geq 0\,.$$

La regione finita di piano R, delimitata da esse e dalle rette di equazioni $x=0$ e $y=250$, genera, in una rotazione completa intorno all'asse y, un solido Σ.

a) Calcolare l'area della regione R e il volume del solido Σ.

b) Si supponga che il volume trovato sia espresso in millimetri cubi e si consideri una coppa d'argento avente forma e dimensioni del solido Σ. Calcolare, con l'approssimazione di 1 g, il peso della coppa, sapendo che la densità dell'argento e $10.490\ \text{kg/m}^3$.

c) Nella coppa è versata dell'acqua fino ad un'altezza di 15 cm dalla base di appoggio. Calcolare, con l'approssimazione di 1 g, il peso complessivo della coppa con l'acqua, sapendo che la densità dell'acqua è $1\ \text{kg/dm}^3$.

9. Sono utilizzate piastrelle quadrate uguali per ricoprire un pavimento rettangolare il cui lato maggiore è 1,5 volte quello minore.

a) Si sa che occorrono 76 piastrelle per ricoprire esattamente il bordo del pavimento: calcolare il numero complessivo di piastrelle occorrenti per ricoprire il pavimento.

b) Si supponga che il numero di piastrelle necessarie per ricoprire esattamente il bordo del pavimento sia un numero incognito x: esprimere in funzione di x il numero N(x) di piastrelle che occorrono per ricoprire il pavimento.

c) Si sa che l'area del pavimento è 24 m^2.
   1. Nell'ipotesi a), trovare la misura del lato di ogni piastrella.
   2. Nell'ipotesi b), esprimere in funzione di x la misura L(x) del lato di ogni piastrella.

d) Si prescinda dalla questione reale e si assumano x, N(x) ed L(x) come variabili reali generiche.
   1. Studiare le funzioni y=N(x) e y=L(x) e disegnarne i grafici sullo stesso piano cartesiano ortogonale (Oxy), dopo aver determinato, fra l'altro, le coordinate dei loro eventuali punti comuni.
   2. Calcolare l'area della regione finita di piano compresa fra i grafici delle due funzioni e l'asse y.

10. La tabella sottostante fornisce le velocità di un punto materiale che si muove su una traiettoria rettilinea in funzione dell'istante in cui essa è misurata. I tempi sono espressi in secondi, le velocità in metri per secondo.

Tab. 4

Tempi (s)	0	1	2	3	4	5
Velocità (m/s)	2,00	1,25	0,72	0,45	0,30	0,15

a) Costruire un diagramma a dispersione che rappresenti la situazione.

b) Stabilire quale delle seguenti leggi v=v(t), con t≥0, si adatta meglio a descrivere la situazione:

$$v=\frac{2}{1-t^2}\,,\quad v=2\,e^{-\frac{t}{2}},\quad v=2\,e^{\sqrt{t}}.$$

c) Una volta individuata la legge v=v(t) richiesta, trovare la legge oraria s=s(t), supponendo che nell'istante t=0 il punto materiale si trovi nella posizione assunta come origine sulla traiettoria su cui si svolge il moto.

d) Spiegare perché, in base alla legge oraria trovata, non ci sono inversioni del moto e tuttavia c'è una posizione sulla traiettoria alla quale il punto materiale può accostarsi ma senza raggiungerla. Qual è questa posizione?

e) In quale istante il punto materiale è soggetto ad un'accelerazione di $-2\ m/s^2$? Qual è la sua velocità in quest'istante?

11. Nella vaschetta di un ondoscopio, piena d'acqua fino a circa 1 cm di altezza, è collocato un ostacolo avente la forma di un arco di parabola simmetrico rispetto all'asse della parabola medesima. Un treno d'onde circolari, generate da un vibratore situato nel fuoco F della parabola, urta contro la parte concava dell'ostacolo e si riflette secondo un treno d'onde rettilinee.

a) Dimostrare che la direzione di propagazione delle onde rettilinee è parallela all'asse della parabola.

b) Posto che sia f la distanza focale della parabola, si considerino i due raggi FA ed FB che incidono sull'ostacolo con un angolo d'incidenza di 45°. Calcolare la lunghezza della corda AB.

c) Indicata con R la regione finita di piano delimitata dalla parabola e dalla corda AB, si dica Σ il solido generato da questa regione immaginando che la stessa ruoti di mezzo giro intorno all'asse della parabola. Calcolare l'area della regione R sapendo che il volume del solido Σ è 6,760 π dm^3.

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE.

DOMANDE.

1. La velocità v di un corpo in moto rettilineo è regolata dalla seguente legge: $v=1/t$, con $t>0$, dove t è misurato in secondi e v in metri al secondo. Sapendo che nell'istante $t=1$ s il corpo occupa la posizione $x=1$ m sulla retta del moto (sulla quale è fissato un riferimento cartesiano), qual è la sua legge oraria?

2. È data la parabola di equazione $y=x^2+2$, assegnata in un piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy). La regione piana delimitata dalla parabola e dalla retta di equazione $y=3$, ruotando di mezzo giro intorno all'asse y, genera un solido, chiamato **paraboloide di rotazione**. Quanto vale il suo volume?

3. È data l'ellisse di equazione $2x^2+3y^2=6$, assegnata in un piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy). Trovare il volume del solido (**ellissoide**) che si ottiene facendola ruotare di mezzo giro intorno al maggiore dei suoi assi.

4. Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Ox,y), sono assegnate le parabole di equazioni: $y=x^2,\ x=y^2$.

a) La regione finita di piano R delimitata da esse, ruotando di un giro completo intorno all'asse x, genera un solido. Quanto vale il suo volume?

b) Un solido Σ è tale che un generico piano perpendicolare all'asse x lo interseca secondo un quadrato il cui lato è la sezione di Σ con la regione R. Quanto vale il suo volume?

5. Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Ox,y), è assegnata la regione finita R, delimitata dalla curva di equazione $y=2+|2-x|$ e dalla retta di equazione $y=4$. Calcolare il volume del solido generato da R quando ruota di un giro completo intorno all'asse y.

RISPOSTE.

1. Siccome $v=dx/dt$ allora $dx=vdt$, ossia: $dx=dt/t$ e perciò, dopo qualche calcolo: $x=\ln t+k$, dove k è la costante d'integrazione. D'altra parte per t=1 (s) è x=1 (m), per cui: $1=\ln 1+k$, da cui segue k=1 (m). La legge del moto del corpo è allora: $x=\ln t+1$.

2. Il volume cercato è:

$$V=\pi\int_2^3 x^2dy=\pi\int_2^3 (y-2)dy=\pi\left[\frac{y^2}{2}-2y\right]_2^3=\pi\left(\left(\frac{9}{2}-6\right)-\left(\frac{4}{2}-4\right)\right)=\frac{\pi}{2}\ .$$

3. Il maggiore degli assi dell'ellisse è quello contenuto nell'asse x, per cui, tenendo presente che i due vertici dell'asse maggiore dell'ellisse hanno ascisse $\sqrt{3}$ e $-\sqrt{3}$ e che dall'equazione assegnata si ricava: $y^2=2-\frac{2}{3}x^2$, il volume del paraboloide è il seguente:

$$V=\pi\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} y^2dx=\pi\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left(2-\frac{2}{3}x^2\right)dx=\pi\left[2x-\frac{2x^3}{9}\right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}=\frac{8\,\pi\,\sqrt{3}}{3}\ .$$

4. Il primo volume cercato, una volta constatato che le due parabole si intersecano nei punti (0,0) e (1,1), è:

$$V_1=\pi\int_0^1\left(\sqrt{x}\right)^2dx-\pi\int_0^1(x^2)^2dx=\pi\int_0^1(x-x^4)dx=\pi\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5}\right]_0^1=\frac{3}{10}\pi.$$

Il volume del solido Σ è invece:

$$V_2=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)^2dx=\int_0^1\left(x+x^4-2x^{5/2}\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}+\frac{x^5}{5}-\frac{2}{\frac{5}{2}+1}x^{\frac{5}{2}+1}\right]_0^1=\frac{9}{70}\ .$$

5. Una volta constatato che la curva può mettersi nella forma seguente:

$$y=\begin{cases}4-x & \text{se } x\le 2\\ x & \text{se } x>2\end{cases}$$

si trova facilmente che la regione R altro non è che il triangolo ABC (Fig. 17), dove A(2,2), B(0,4), C(4,4). Ci sono vari modi per calcolare il volume cercato.

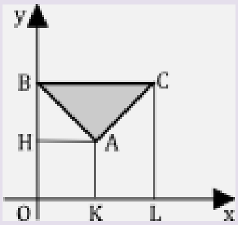

FIG. 17

Un primo modo consiste nel constatare semplicemente che esso è costituito dal tronco di cono generato dal trapezio rettangolo ACBH incavato dal cono generato dal triangolo ABH.
Una seconda modalità consiste nel constatare che il solido è formato dal cilindro generato dal rettangolo OLCB incavato dal solido generato dalla curva sotto il grafico della funzione, relativamente all'intervallo [0,4]. Il volume di tale solido è allora:

$$V=\pi\cdot 4^2\cdot 4-2\pi\int_0^2 x(4-x)dx-2\pi\int_2^4 x\cdot x\,dx\,.$$

Un terzo modo, la cui spiegazione è lasciata a chi legge, è espresso dalla seguente formula:

$$V=\pi\int_2^4 y^2dy-\pi\int_2^4(4-y)^2dy.$$

In tutti i casi si trova: $V=16\,\pi$.

COMPLEMENTI: IL TEOREMA DI PAPPO-GULDINO (6)

1. Il volume di un solido di rotazione si può calcolare anche in base ad un teorema, che comunque utilizza il calcolo integrale. Di tale teorema forniamo l'enunciato e qualche applicazione.

♦ **Teorema di Pappo-Guldino** (7). Considerata una superficie piana Σ delimitata da una curva chiusa, sia S la sua area. Facendo ruotare Σ di un angolo α, compreso fra 0 e 2π, intorno ad una retta t che non l'attraversi, è generato un solido, il cui volume V si ottiene moltiplicando l'area S per la lunghezza dell'arco di circonferenza generato dal baricentro G della superficie Σ nella rotazione intorno a t.

In simboli, indicando con r la distanza di G da t:

$$\mathbf{V=\alpha\, r\, S},$$

S'intende che il calcolo concreto del volume V può essere effettuato se si conosce r, vale a dire la distanza del baricentro G della superficie Σ dall'asse di rotazione.
Ora, in alcuni casi particolari, quando la superficie Σ è assegnata in un piano cartesiano ortogonale, le coordinate del suo **baricentro** G si ottengono abbastanza agevolmente. Per esempio:

- Se Σ è un **poligono** di n lati di vertici $A_i(x_i,y_i)$, con $1\le i\le n$, le coordinate di G sono le seguenti:

$$x_G=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\ ,\quad y_G=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i\ .$$

- Se Σ è un'**ellisse** (in particolare un **cerchio**), il suo baricentro G è il centro propriamente detto della figura.
- Se Σ è il **trapezoide** di base [a,b], relativo alla funzione f(x), continua in [a,b] e derivabile con derivata continua in]a,b[, indicata con S la sua area, le coordinate di G sono date dalle seguenti formule:

$$x_G=\frac{1}{S}\int_a^b x\,f(x)dx\ ,\quad y_G=\frac{1}{2S}\int_a^b[f(x)]^2dx\ .$$

2. Vediamo adesso alcuni esercizi, svolti e da svolgere, utilizzando il teorema di Pappo-Guldino. Diciamo subito che i volumi dei solidi che prenderemo in considerazione si possono trovare anche senza il ricorso al teorema di Pappo-Guldino, ma ti proponiamo di eseguire il calcolo utilizzando questo teorema.

- ESERCIZIO 1 (da risolvere). Ritrovare le formule dei volumi del cilindro circolare retto e del cono circolare

---

6 Questo paragrafo è opzionale.
7 **Pappo** di Alessandria, III-IV secolo d.C.; **Guldino**, Paolo, matematico svizzero, 1577-1643, fu uno dei critici più severi della *Geometria degli indivisibili* di Cavalieri.

retto, utilizzando il teorema di Pappo-Guldino.

- ESERCIZIO 2 (risolto). Ritrovare la formula del volume della sfera, utilizzando il teorema di Pappo-Guldino.

  RISOLUZIONE. Una sfera può essere concepita come il solido ottenuto dalla rotazione di un semicerchio in una rotazione completa intorno al suo diametro. Dato allora il semicerchio di raggio r, riferiamo il piano che lo contiene ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), in modo che l'asse x contenga il diametro e l'asse y sia asse di simmetria, orientato in maniera che il semicerchio sia situato nel semipiano $y \geq 0$. La sfera è allora ottenuta facendo ruotare questo semicerchio di un giro completo intorno all'asse x. Il suo volume V, per il teorema di Pappo-Guldino, è allora:

$$V = 2\,\pi\, y_G\, S\,,$$

  dove y_G è l'ordinata del baricentro G del semicerchio ed S è la sua area, cioè $S=\frac{1}{2}\pi r^2$. Siccome l'equazione del semicerchio è: $y=\sqrt{r^2-x^2}$, si ha:

$$y_G=\frac{1}{2S}\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)dx=\frac{1}{\pi r^2}\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r}=\frac{4r}{3\pi}\,.$$

  Pertanto: $V=2\pi\cdot\frac{4r}{3\pi}\cdot\frac{1}{2}\pi r^2=\frac{4}{3}\pi r^3$.

- Ecco altri esercizi di cui ti proponiamo la risoluzione.
  a) Trovare la formula del volume del solido ottenuto facendo ruotare di mezzo giro un'ellisse intorno ad uno dei suoi assi di simmetria, utilizzando il teorema di Pappo-Guldino. Il solido si chiama **ellissoide di rotazione**.
  b) Trovare la formula del volume del solido ottenuto facendo ruotare di mezzo giro un segmento parabolico, con base perpendicolare all'asse di simmetria, intorno a tale asse, utilizzando il teorema di Pappo-Guldino. Il solido si chiama **paraboloide di rotazione**.
  c) Trovare la formula del volume del solido ottenuto facendo ruotare di un giro completo un cerchio di raggio r intorno ad una retta distante $d>r$ dal suo centro, utilizzando il teorema di Pappo-Guldino. Il solido ottenuto si chiama **toro**.