Prerequisiti:

- Calcolare limiti e derivate di una funzione reale di variabile reale.
- Studio di una funzione reale di variabile reale

Questa unità, il cui studio è previsto nel 2° biennio, è opzionale per l'Istituto Tecnico, settore Economico, mentre interessa in modi diversi l'Istituto Tecnico, settore Tecnologico, e l'Istituto Professionale.

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità gli allievi devono essere in grado di:

- *fornire la definizione di funzione reale di due variabili reali*
- *trovare il dominio di semplici funzioni di due variabili*
- *possedere un'idea della rappresentazione grafica di una funzione di due variabili, maturata anche mediante un idoneo software matematico*
- *possedere l'idea di derivata parziale e di differenziale totale di una funzione di due variabili*
- *calcolare le derivate parziali di una funzione di due variabili*
- *utilizzare le derivate parziali e il concetto di differenziale totale in contesti pratici*
- *risolvere semplici problemi di ottimizzazione di una funzione di due variabili*

Nozioni sulle funzioni di due variabili

Unità 78

78.1 NOZIONI GENERALI [1]

78.1.1 Considerata la coppia ordinata di numeri reali (x,y), la relazione f che associa ad essa la somma dei due numeri x, y è caratterizzata dal fatto che ad ogni coppia $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ la f associa uno ed un solo valore $x+y\in\mathbb{R}$ (Fig. 1).

Allo stesso modo anche la relazione g che alla coppia ordinata (x,y) associa il prodotto xy è tale che ad ogni coppia $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ la g associa uno ed un solo valore $xy\in\mathbb{R}$ (Fig. 2).

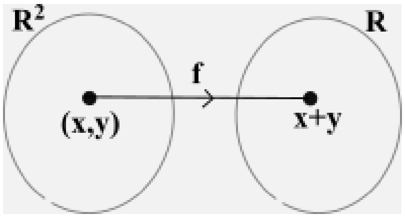

FIG. 1

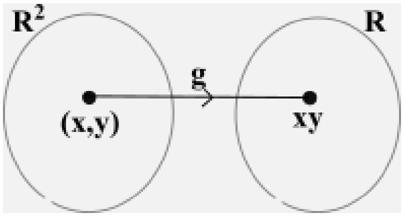

FIG. 2

Entrambe le relazioni si dicono più propriamente *funzioni reali di due variabili reali*.

In generale:

Si definisce **funzione reale di due variabili reali** una relazione che ad ogni coppia ordinata di numeri reali, scelta in un conveniente sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$, associa uno ed un solo valore reale.

Se la relazione è indicata con f e il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ in cui si scelgono le coppie (x,y) è indicato con E, per cui $E\subseteq\mathbb{R}^2$, si scrive:

$$f : E \rightarrow \mathbb{R} .$$

L'insieme E è detto ***dominio*** della funzione.

Per indicare che la variabile z è funzione delle variabili reali x, y si usa solitamente la seguente scrittura generica:

$$z = f(x,y), \text{ o semplicemente: } f(x,y),$$

sottintendendo l'insieme dominio E, ma con la tacita intesa che esso è costituito da tutte le coppie ordinate di numeri reali (x,y) che fanno assumere un valore reale ad f(x,y).

- Per esempio, con riferimento alla funzione:

  $$f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$$

  il dominio è costituito dalle coppie ordinate (x,y) tali che $1-x^2-y^2\geq 0$, ossia $x^2+y^2\leq 1$. Come dire che, rappresentato in un piano cartesiano (Oxy), questo dominio è costituito dal cerchio avente centro in O e raggio 1.

- Altro esempio, considerando la funzione:

  $$f(x,y) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} .$$

  In questo caso il dominio è costituito dalle coppie ordinate (x,y) tali che $1-x^2\geq 0$ e $1-y^2\geq 0$, vale a dire $-1\leq x\leq 1$ e $-1\leq y\leq 1$. Pertanto, rappresentato in un piano cartesiano (Oxy), questo dominio è costituito dal rettangolo delimitato dalle rette di equazioni: $x=-1$, $x=1$, $y=-1$, $y=1$.

Ti proponiamo, per esercizio, di determinare il dominio delle seguenti funzioni reali di due variabili reali e, quand'è diverso dall'insieme $\mathbb{R}^2$, rappresentalo in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) (su questa parte non saranno proposti altri esercizi nella sezione "verifiche"):

[1] Questo paragrafo riguarda tutti gli indirizzi degli Istituti Tecnici e dei Professionali.

1) $f(x,y) = x^2 + 2\,x\,y + y^2 - x$.

2) $f(x,y) = x^3 - y^3 + (x+y)^2$.

3) $f(x,y) = x^2y^2 - (x-y)^2$.

4) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$.

5) $f(x,y) = \sqrt{1 - 2x^2 - y^2}$.

6) $f(x,y) = x + y + \ln(x+y)$.

7) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{\sqrt{y}}$.

8) $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2 - 2}$.

9) $f(x,y) = 1 - e^{x-y}$.

10) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{1 - e^{x-y}}$.

11) $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2}$.

12) $f(x,y) = \ln(2x^2 - 3xy + y^2)$.

13) $f(x,y) = \ln\dfrac{|x| - 1}{y}$.

14) $f(x,y) = \ln\dfrac{x-1}{|y|}$.

78.1.2 Un concetto non banale, che è utile conoscere, è quello di *punto interno* al dominio di una funzione.

Ebbene, un punto (x_0, y_0) si definisce ***punto interno*** al dominio E della funzione f(x,y) se $(x_0,y_0)\in E$ ed inoltre esiste almeno un cerchio aperto (cioè privato della sua circonferenza) di centro (x_0, y_0) formato da punti appartenenti tutti ad E.

Con riferimento al primo dei due esempi su riportati, tutti i punti (x,y) tali che $x^2+y^2<1$ sono punti interni al dominio della funzione ivi considerata. Si tratta evidentemente dei punti appartenenti al cerchio di equazione $x^2+y^2=1$, esclusi però i punti della circonferenza che lo delimita.

Con riferimento al secondo dei due esempi, tutti i punti (x,y) tali che $1-x^2>0$ e $1-y^2>0$ sono punti interni al dominio della funzione ivi presa in esame. Si tratta chiaramente dei punti appartenenti al rettangolo di lati $x=-1$, $x=1$, $y=-1$, $y=1$, esclusi però i punti del perimetro del rettangolo medesimo.

78.1.3 Se la rappresentazione grafica del dominio di una funzione di due variabili è un'operazione che già conosci, dal momento che si tratta di rappresentare un insieme in un piano cartesiano, quella della rappresentazione della funzione richiede qualche chiarimento.

Per ottenere la rappresentazione grafica di una funzione reale z di due variabili reali x, y bisogna attribuire ad x, y valori arbitrari scelti nel dominio della funzione e determinare il corrispondente valore z. Cosicché ne risulta un insieme di terne ordinate (x,y,z) di valori reali, che possono essere rappresentate soltanto nello spazio, una volta che questo sia stato riferito ad un sistema di assi cartesiani (Oxyz).

Noi non possiamo occuparci della rappresentazione grafica delle funzioni di due variabili. Avvertiamo, ad ogni buon conto, che appositi software matematici ne permettono delle visualizzazioni suggestive. Possiamo tuttavia fornire un paio di esempi.

Per esempio, riprendendo la funzione presa in esame nel primo dei due esempi trattati in 78.1.1 e riferito lo spazio ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxyz), essa ha come grafico la semi-superficie sferica avente centro in O, raggio 1 e situata nel semispazio in cui $z\geq 0$ (Fig. 3).

Un altro esempio di funzione di due variabili della quale forniamo una rappresentazione è la funzione $z=x^2+y^2$, che rappresenta un paraboloide di rotazione (Fig. 4) ed è definita per ogni coppia di valori reali (x,y). Essa è esattamente la superficie che si ottiene facendo ruotare la parabola di equazione $z=x^2$, rappresentata nel piano (Oxz), di un giro completo intorno all'asse z.

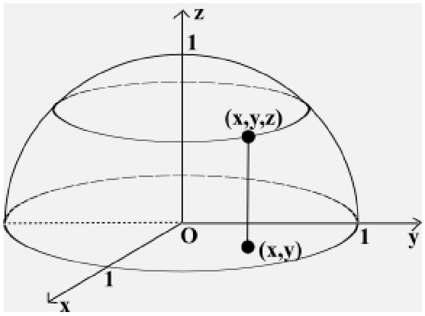

FIG. 3

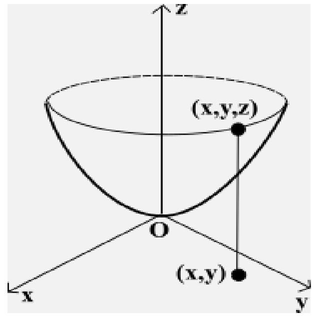

FIG. 4

78.2 DERIVATE PARZIALI [2]

78.2.1 Quando abbiamo a che fare con una funzione di due variabili z=f(x,y), è spesso interessante valutare l'effetto che produce sulla variabile dipendente z la variazione di una sola delle variabili indipendenti x, y. Si ottiene lo scopo calcolando la derivata di z rispetto alla variabile indipendente che è chiamata in causa e che può essere l'una o l'altra delle due variabili x, y. La variabile che non è chiamata in causa va trattata come se fosse una costante ai fini della derivazione.

La trattazione dell'argomento potrebbe essere condotta con rigore logico e per questo richiederebbe uno studio preventivo della teoria dei limiti delle funzioni in questione. Cosa che però non possiamo fare. Dobbiamo accontentarci perciò di uno studio che conceda molto al rigore, utilizzando le analogie con le funzioni di una variabile.

Quando si considera una funzione reale di due variabili reali x, y, vi sono due derivate della funzione, calcolate una rispetto alla variabile x ed una rispetto alla variabile y.

Le due derivate della funzione f(x,y), calcolate una rispetto ad x e l'altra rispetto ad y, si chiamano **derivate parziali** e si indicano con le scritture seguenti:

$$f'_x\,,\qquad f'_y\,;$$

oppure con queste altre:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}\,.$$

O anche, se la funzione è indicata con z, in uno dei seguenti modi:

$$z'_x\,,\quad z'_y\,;\qquad\qquad \frac{\partial z}{\partial x}\,,\quad \frac{\partial z}{\partial y}\,.$$

Per esempio, se la funzione è la seguente:

$$f(x,y) = 2x^2 - 3xy + y^2 - 2x + 3y - 1\,,$$

risulta:

$$f'_x = 4x - 3y - 2,\quad f'_y = -3x + 2y + 3.$$

---

[2] Questo paragrafo ed i successivi sono rivolti solamente ai seguenti indirizzi dell'Istituto Tecnico, settore Tecnologico:

- Meccanica, Meccatronica ed Energia;
- Trasporti e Logistica;
- Elettronica ed Elettrotecnica;
- Informatica e Telecomunicazioni;
- Chimica, Materiali e Biotecnologie;
- Costruzioni, Ambiente e Territorio.

78.2.2 Le derivate parziali della funzione f(x,y) sono, a loro volta, funzioni delle stesse variabili x, y. Per cui di esse si possono calcolare le derivate parziali, che sono chiamate **derivate parziali seconde** della funzione f(x,y) [3]. Sono quattro e si indicano con le scritture seguenti:

$$f''_{xx}\,,\quad f''_{xy}\,,\quad f''_{yx}\,,\quad f''_{yy}\,;$$

oppure con queste altre:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\,,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\,,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,.$$

Ritornando all'esempio precedente:

$$f''_{xx}=4\,,\quad f''_{xy}=-3\,,\quad f''_{yx}=-3\,,\quad f''_{yy}=2\,.$$

Altro esempio, con riferimento alla funzione $f(x,y)=x^2y^3$:

$$f'_x=2xy^3,\qquad f'_y=3x^2y^2;$$

$$f''_{xx}=2y^3,\quad f''_{xy}=6xy^2,\quad f''_{yx}=6xy^2,\quad f''_{yy}=6x^2y.$$

In due circostanze abbiamo trovato che le due derivate parziali seconde f''_{xy} ed f''_{yx} sono uguali.

Si tratta di casi fortunati o la cosa si verifica sempre?

In realtà, la circostanza non si verifica sempre, ma si verifica tutte le volte che esistono f'_x, f'_y ed f''_{xy} e inoltre f''_{xy} è continua. Infatti in questo caso esiste anche f''_{yx} e si ha proprio: $f''_{xy}=f''_{yx}$.

Questa circostanza, peraltro dimostrabile, si verifica in tutti i casi che noi prenderemo in esame.

Ti proponiamo, per esercizio, di calcolare le derivate parziali prime e seconde delle seguenti funzioni di due variabili reali:

$$\text{a)}\ f(x,y)=\frac{1}{x+y}\,;\qquad \text{b)}\ f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}\,;\qquad \text{c)}\ f(x,y)=y-\ln x\,,$$

e di controllare, in particolare, che risulta $f''_{xy}=f''_{yx}$ in ognuno dei tre casi.

Ti proponiamo di fare la stessa cosa per le funzioni prese in esame in chiusura del paragrafo 78.1.1.

(Su questa parte non saranno proposti altri esercizi nella sezione "verifiche")

Ci preme informarti fin d'ora, e una volta per tutte, che gli esercizi proposti in questa unità possono essere risolti più agevolmente se ricorri all'aiuto di un idoneo software matematico.

78.3 OTTIMIZZAZIONE DI UNA FUNZIONE DI DUE VARIABILI [4]

78.3.1 Un ambito particolarmente interessante di applicazione delle derivate parziali è costituito dai problemi in cui si chiede di ottimizzare una funzione di due variabili. Anche in questo caso non possiamo soffermarci sulla teoria e dobbiamo accettare senza dimostrazione una proprietà che risolve il problema.

Sia allora una funzione reale di due variabili reali f(x,y). Se essa ammette derivate parziali prime e seconde in un punto (x_0,y_0), interno al suo dominio, allora:

a) condizione necessaria affinché la funzione abbia un estremo (massimo o minimo) in (x_0,y_0) è che risulti: $f'_x(x_0,y_0)=0$ ed $f'_y(x_0,y_0)=0$;

b) se poi, oltre a questa condizione, risulta che le derivate parziali seconde sono continue in

[3] Quando occorre, le derivate parziali propriamente dette si chiamano anche **derivate parziali prime**.
[4] Vedi precedente nota 2.

(x_0,y_0) e inoltre $f''_{xx}(x_0,y_0)f''_{yy}(x_0,y_0)-\left(f''_{xy}(x_0,y_0)\right)^2>0$, allora il punto (x_0,y_0) è un estremante; in particolare in esso la funzione ammette:
- un massimo se $f''_{xx}(x_0,y_0)<0$ (nel qual caso anche $f''_{yy}(x_0,y_0)<0$),
- un minimo se $f''_{xx}(x_0,y_0)>0$ (nel qual caso anche $f''_{yy}(x_0,y_0)>0$);

c) se invece, oltre alla solita condizione, risulta: $f''_{xx}(x_0,y_0)f''_{yy}(x_0,y_0)-\left(f''_{xy}(x_0,y_0)\right)^2<0$, nel punto (x_0,y_0) la funzione non ammette né massimo né minimo;

d) se, essendo verificata la solita condizione, risulta: $f''_{xx}(x_0,y_0)f''_{yy}(x_0,y_0)-\left(f''_{xy}(x_0,y_0)\right)^2=0$, non si può concludere nulla riguardo al punto (x_0,y_0) [5].

La funzione $f''_{xx}(x_0,y_0)\, f''_{yy}(x_0,y_0)-\left(f''_{xy}(x_0,y_0)\right)^2$ si chiama **HESSIANO** [6] della funzione $f(x,y)$ e si indica solitamente con $H(x_0,y_0)$.

78.3.2 Andiamo a descrivere attraverso un esercizio il procedimento che bisogna seguire per determinare i punti estremanti di una funzione e i relativi valori estremi.

ESERCIZIO. Calcolare i punti estremanti, se esistono, e i relativi valori estremi della funzione:

a) $f(x,y)=x^2+y^2-4x+2y+12$.

b) $f(x,y)=x^2-2y^2-4x$.

RISOLUZIONE.

- Riguardo alla <u>funzione a</u>), calcoliamo le derivate parziali prime:

$$f'_x=2x-4,\quad f'_y=2y+2.$$

Quindi risolviamo il sistema delle due equazioni in x, y:

$$2x-4=0,\quad 2y+2=0;$$

troviamo: $x=2,\ y=-1$. È l'unico punto in cui la funzione può ammettere un estremo.

Calcoliamo le derivate parziali seconde della funzione: $f''_{xx}=2,\ f''_{xy}=0,\ f''_{yy}=2$. Pertanto:

$$H(2,-1)=f''_{xx}(2,-1)f''_{yy}(2,-1)-\left(f''_{xy}(2,-1)\right)^2=4>0.$$

Dunque il punto $(2,-1)$ è un punto estremante per la funzione. Precisamente, siccome $f''_{xx}(2,-1)>0$, esso è un punto di minimo. In corrispondenza di esso si ottiene il valore minimo della funzione:

$$\min f(x,y)=f(2,-1)=2^2+(-1)^2-4\times2+2\times(-1)+12=7.$$

- Ripetiamo lo stesso procedimento per la <u>funzione b</u>).

Derivate parziali prime: $f'_x=2x-4,\quad f'_y=-4y$.

Sistema delle due equazioni: $2x-4=0,\ -4y=0$. Soluzione: $x=2,\ y=0$.

Derivate seconde: $f''_{xx}=2,\ f''_{xy}=0,\ f''_{yy}=-4$.

Pertanto: $H(2,0)=f''_{xx}(2,0)\, f''_{yy}(2,0)-\left(f''_{xy}(2,0)\right)^2=-8<0$.

L'unico punto che c'è interesse a prendere in considerazione, cioè $(2,0)$, non è un punto estremante per la

[5] Come nel caso delle funzioni di una sola variabile si potrebbe ricorrere al comportamento delle derivate parziali di ordine superiore al 2°, ma preferiamo non occuparci di questa situazione, data l'improbabilità di un caso del genere nelle questioni che andremo ad affrontare.

[6] Prende il nome dal matematico che per primo l'ha utilizzata nella ricerca degli estremi di una funzione di più variabili: il tedesco **Ludwig Otto Hesse** (1811-1874).

funzione in questione.

78.3.3 A volte la ricerca degli estremi di una funzione f(x,y) può esser fatta in modo che definiamo "elementare" poiché non si ricorre alle derivate. Qualche esempio è sufficiente a chiarire come si procede.

ESERCIZIO. Calcolare i punti estremanti, se esistono, e i relativi valori estremi della funzione:

a) $f(x,y) = (x - y - 4)^2 + (y - 2)^2 + 5$.

b) $f(x,y) = 7 - (2x - y)^2 - (x - y + 1)^2$.

c) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x + 2y + 12$.

RISOLUZIONE.

- Riguardo alla funzione a), il discorso da farsi è semplice ed immediato. Siccome $f(x,y)-5$ è la somma di due quadrati, non può assumere valori negativi, per cui assume il valore minimo 0 quando le basi dei due quadrati sono nulle, ossia quando $x-y-4=0$ e $y-2=0$, ovvero $x=6$ e $y=2$. Per questi valori la funzione f(x,y) assume il valore minimo 5.
- Il discorso differisce poco riguardo alla funzione b), la quale assume il valore massimo uguale a 7 quando $2x-y=0$ e $x-y-1=0$, ossia $x=1$ e $y=2$.
- Più complicato è il discorso relativo alla funzione c), ma anche per essa si può ricorrere ad un procedimento elementare. Basta constatare che si ha:

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 12 = (x^2 - 4x + 4) - 4 + (y^2 + 2y + 1) - 1 + 12 = (x - 2)^2 + (y+1)^2+7.$$

La conclusione è pressoché immediata ed è ovviamente uguale a quella già vista nel precedente paragrafo 78.3.2, a).

78.3.4 Il metodo descritto si applica quando si vuole ottimizzare una funzione che esprime una grandezza economica, come un costo (da rendere minimo) o un ricavo o un profitto (da rendere massimi), ammesso ovviamente che la funzione da ottimizzare dipenda da due variabili.

Vediamo un paio di esempi.

- PROBLEMA 1. Un'azienda produce due articoli A e B. Il suo ricavo z, espresso in centinaia di euro, è una funzione del numero x di quintali dell'articolo A e del numero y di quintali dell'articolo B, prodotti dall'azienda in una settimana, e ubbidisce alla seguente legge:

$$z = 2xy - x^2 - 2y^2 + 24x + 12y + 10.$$

Stabilire se esiste una produzione che assicuri all'azienda il massimo ricavo.

RISOLUZIONE. Si tratta di stabilire se la funzione z ammette un punto di massimo. Procediamo col metodo delle derivate.

Derivate parziali prime: $z'_x=2y-2x+24, \quad z'_y=2x-4y+12$.

Sistema delle due equazioni: $-2x+2y+24=0$, $2x-4y+12=0$. Soluzione: $x=30$, $y=18$.

Derivate seconde: $z''_{xx}=-2$, $z''_{xy}=2$, $z''_{yy}=-4$.

Pertanto: $H(30,18)=z''_{xx}(30,18)\ z''_{yy}(30,18)-\left(z''_{xy}(30,18)\right)^2=(-2)(-4)-2^2=4>0$.

Dunque il punto (30,18) è un punto estremante per la funzione. Precisamente, siccome $z''_{xx}(30,18)<0$, esso è un punto di massimo.

In corrispondenza di esso si ottiene il massimo ricavo per l'azienda:

$$\max(z) = z(30,18) = 478.$$

In conclusione, esiste una produzione che assicura all'azienda il massimo ricavo: 30 q dell'articolo A e 18 q di B alla settimana; il ricavo corrispondente, che è il massimo, risulta essere 478 centinaia di euro, vale a

dire € 47.800.
In realtà il ricorso alle derivate è un filino esagerato. Infatti, pur con un po' di fatica e molta attenzione, la funzione z può mettersi nella forma seguente:

$$z = 478 - (x - y - 12)^2 - (y - 18)^2$$

e la conclusione è immediata.

- PROBLEMA 2. Un'azienda produce due articoli A e B. Il costo totale di produzione, espresso in euro, dipende dal numero x di articoli A e dal numero y di articoli B, prodotti in un giorno, secondo la seguente legge:

$$C(x, y) = 3500 - 50x - 10y + x^2 + \frac{1}{2}y^2.$$

Trovare, se esiste, una produzione che riduca al minimo il costo totale di produzione.

RISOLUZIONE. Si tratta di stabilire se esiste una coppia ordinata (x,y) che rende minima la funzione C(x,y). Si potrebbe procedere col metodo delle derivate. Ne lasciamo il compito a chi legge.

Noi vogliamo ricorrere al metodo elementare. La funzione C(x,y) può essere infatti scritta nel modo seguente:

$$C(x, y) = (x - 25)^2 + \frac{1}{2}(y - 10)^2 + 2825$$

E si ottiene immediatamente che essa assume il valore minimo 2825 (€) per x=25 ed y=10.
Pertanto la produzione che riduce al minimo il costo totale dell'azienda, pari a 2825 €, consiste nel produrre giornalmente 25 unità dell'articolo A e 10 unità dell'articolo B.

In realtà, di solito le cose non vanno in maniera così semplice come può sembrare dai due esempi mostrati e a volte occorrono procedimenti piuttosto sofisticati per risolvere problemi siffatti, che sono ben più complessi e articolati di quelli che noi abbiamo preso in esame. Ma la matematica sa offrire gli strumenti adatti. Solo che noi, al nostro livello di studi, molto elementare, non ce ne possiamo occupare.
Quello che abbiamo esposto sull'argomento ha soltanto lo scopo di dare un'idea, ancorché minima, delle procedure che vengono attivate nella risoluzione dei cosiddetti problemi di ottimizzazione.

78.3.5 A volte le variabili della funzione da ottimizzare sono soggette a certe *condizioni* (o *vincoli* o *restrizioni*) espresse da equazioni nelle variabili medesime. Cosicché il problema assume la seguente forma generica:

Determinare gli estremi della funzione f(x,y) sapendo che x ed y devono soddisfare alla condizione g(x,y)=0.

Se la condizione g(x,y)=0 è una equazione lineare in x, y, la risoluzione del problema non presenta eccessive difficoltà, potendosi lo stesso ricondurre facilmente al problema di ottimizzazione di una funzione di una sola variabile.
Le cose si complicano se il vincolo è espresso da un'equazione di tipo diverso.
Noi, però, non ci occuperemo di questa seconda situazione ma solo della prima e, per far capire meglio come si opera, ci serviamo di un esempio.
ESERCIZIO. Stabilire se la funzione:

$$z = 6\,x^2 - 2\,x\,y + 7\,y^2$$

ammette estremi sotto il vincolo x+y=28.
RISOLUZIONE. Risolta l'equazione che esprime il vincolo rispetto alla variabile y, si ottiene y=28–x, per

cui sostituendo nell'espressione di z, si trova che questa diventa funzione della sola variabile x:

$$z = 6\,x^2 - 2\,(28 - x) + 7\,(28 - x)^2,$$

ossia, dopo aver semplificato:

$$z = 15\,x^2 - 448\,x + 5488.$$

Si tratta di stabilire se questa funzione ammette estremi e la cosa è del tutto banale. Si trova, per la precisione, che:

la funzione z è minima per $x=\frac{224}{15}$, cui corrisponde $y=\frac{196}{15}$ e $\min(z)=\frac{32144}{15}$.

Invece la funzione non ha massimo.

Allo scopo di verificare se hai ben capito come si risolvono esercizi di ottimizzazione di una funzione di due variabili, te ne poniamo adesso uno. Altri li troverai poi nell'apposita sezione "verifiche".

ESERCIZIO. Si consideri la funzione:

$$z = 4\,x^2 - 24\,x\,y + 4\,y^2 - 16\,x + 8\,y + 9.$$

a) Stabilire se ammette estremi.

b) Stabilire se ammette estremi sotto il vincolo $2\,x + y = 30$.

78.3.6 Può presentarsi il caso che l'equazione g(x,y)=0 – la quale esprime la condizione cui devono soddisfare le variabili x, y affinché la funzione f(x,y) assuma un valore estremo (massimo o minimo) – pur non essendo lineare, sia tuttavia esprimibile in una forma parametrica [(7)] – x=x(t), y=y(t) – tale che la funzione f(x(t),y(t)) si possa trattare con considerazioni elementari.

Un esempio chiarisce il concetto espresso più di un diluvio di parole.

ESERCIZIO. Sia data la seguente funzione:

$$z = x^2 + 3xy - 3y^2 .$$

Stabilire se ammette estremi sotto il vincolo espresso dalla seguente equazione: $x^2+y^2=4$.

RISOLUZIONE. L'equazione che esprime il vincolo è quella di una circonferenza, la quale può essere rappresentata nella seguente forma parametrica:

$$x = 2\cos t\,,\quad y = 2\sin t\,,\quad (\text{con } 0 \le t < 2\pi).$$

Cosicché, con la sostituzione delle variabili x, y mediante la variabile t, la funzione z diventa:

$$z(t) = 4\cos^2 t + 12\cos t \sin t - 12\sin^2 t\,,\qquad (\text{con } 0 \le t < 2\pi)$$

e può essere studiata elementarmente come funzione di una variabile.

Si ha:

$$z'(t) = -16\sin(2t) + 12\cos(2t)\,.$$

Di conseguenza:

$$z'(t) = 0 \;\text{ per }\; \tan(2t) = \frac{3}{4},$$

ovvero $z'(t) = 0$ sia per $\sin(2t) = \frac{3}{5}$ e $\cos(2t) = \frac{4}{5}$, sia per $\sin(2t) = -\frac{3}{5}$ e $\cos(2t) = -\frac{4}{5}$.

Calcoliamo z''(t) in entrambi questi casi, incominciando a osservare che si ha:

$$z''(t) = -32\cos(2t) - 24\sin(2t)\,.$$

Di modo che, nel 1° caso z''(t)<0: z(t) è massima; nel 2° caso z''(t)>0: z(t) è minima.

Ora, nel 1° caso (z Max), tenendo presente che deve essere:

$$2\sin t\cos t = \frac{3}{5} \quad \text{e} \quad \cos t^2 - \sin t^2 = \frac{4}{5},$$

[7] Cfr.: Unità 45 – Coniche e luoghi geometrici, N° 45.3.1.

si trova:

$$\cos t = \frac{3}{\sqrt{10}} \ \text{ e } \ \sin t = \frac{1}{\sqrt{10}}\ , \ \ \text{per cui: } x = \frac{6}{\sqrt{10}}, \ \ y = \frac{2}{\sqrt{10}}, \ \ z = 6;$$

e anche:

$$\cos t = -\frac{3}{\sqrt{10}} \ \text{ e } \ \sin t = -\frac{1}{\sqrt{10}}\ , \ \ \text{per cui: } x = -\frac{6}{\sqrt{10}}, \ \ y = -\frac{2}{\sqrt{10}}, \ \ z = 6.$$

Pertanto la funzione z ha il massimo, uguale a 6, in due punti: $\left(\frac{6}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}\right)$ e $\left(-\frac{6}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}\right)$.

Nel 2° caso (z Min), tenendo presente che deve essere:

$$2\sin t \cos t = -\frac{3}{5} \quad \text{ e } \quad \cos t^2 - \sin t^2 = -\frac{4}{5 =},$$

si trova:

$$\cos t = \frac{1}{\sqrt{10}} \ \text{ e } \ \sin t = -\frac{3}{\sqrt{10}}\ , \ \ \text{per cui: } x = \frac{2}{\sqrt{10}}, \ \ y = -\frac{6}{\sqrt{10}}, \ \ z = -14;$$

e anche:

$$\cos t = -\frac{1}{\sqrt{10}} \ \text{ e } \ \sin t = \frac{3}{\sqrt{10}}\ , \ \ \text{per cui: } x = -\frac{2}{\sqrt{10}}, \ \ y = \frac{6}{\sqrt{10}}, \ \ z = -14.$$

Pertanto la funzione z ha il minimo, uguale a –14, in due punti: $\left(\frac{2}{\sqrt{10}}, -\frac{6}{\sqrt{10}}\right)$ e $\left(-\frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{6}{\sqrt{10}}\right)$.

Ti proponiamo un paio di esercizi da risolvere con questo metodo. Non ce ne saranno altri nella sezione "verifiche".

ESERCIZIO 1. È assegnata la seguente funzione:

$$z = 2x - y + 5\,.$$

Stabilire se ammette estremi sotto il vincolo espresso dalla seguente equazione:

$$4x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0\,,$$

dopo aver verificato che questa equazione può essere rappresentata nella seguente forma parametrica:

$$x = \cos t\,, \ \ y = 2\sin t + 1, \quad (0 \le t < 2\pi).$$

$$\left[\textbf{R.}\ \text{Max}(z) = 4 + 2\sqrt{2}\ \text{ per }\ x = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \ y = 1 - \sqrt{2}\,,\ \ \text{Min}(z) = 4 - 2\sqrt{2}\ \text{ per }\ x = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ \ y = 1 + \sqrt{2}\right]$$

ESERCIZIO 2. È assegnata la seguente funzione:

$$z = 8x + 3y + 15\,.$$

Stabilire se ammette estremi sotto il vincolo espresso dalla seguente equazione:

$$4x^2 + y^2 + 8x - 2y + 10 = 0\,,$$

dopo aver verificato che questa equazione può essere rappresentata nella seguente forma parametrica:

$$x = \sin t - 1,\ \ y = 2\cos t + 1, \quad (0 \le t < 2\pi).$$

$$\left[\textbf{R.}\ \text{Max}(z) = 20\ \text{ per }\ x = -\frac{1}{5},\ \ y = \frac{11}{5}\ ,\ \ \text{Min}(z) = 0\ \text{ per }\ x = -\frac{9}{5},\ \ y = -\frac{1}{5}\right]$$

78.4 DIFFERENZIALE TOTALE [8]

78.4.1 Supponiamo assegnata una funzione f(x,y) di due variabili. Come ci sono due derivate parziali della funzione, una rispetto ad x ed una rispetto ad y, allo stesso modo si sono due ***differenziali parziali***.

Si denotano facendo precedere la funzione f dal simbolo ∂ con un indice, che indica per l'appunto la variabile rispetto alla quale di considera il differenziale parziale. Si ha così:

[8] Vedi precedente nota 2.

$$\partial_x f=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x\,,\quad \partial_y f=\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\,.$$

La somma dei due differenziali parziali della funzione f(x,y) fornisce il **differenziale totale** (detto anche semplicemente **differenziale**) di f(x,y). Si indica con df. Cosicché:

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\,.$$

Ora, nel caso particolare in cui sia f(x,y)=x, risulta:

$$dx=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x=1\cdot\Delta x=\Delta x.$$

Analogamente, se f(x,y)=y, risulta:

$$dy=\Delta y.$$

Ragion per cui si può scrivere:

$$\mathbf{df}=\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{dx}+\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}\mathbf{dy}\,.$$

Vale il seguente teorema.

TEOREMA. Condizione sufficiente affinché una funzione f(x,y) ammetta il differenziale in un punto (x,y), è che esistano le sue derivate parziali nel punto e siano continue.

Per esempio, se $f(x,y)=x^2+xy+y^2$, si ha:

$$df=(2x+y)dx+(x+2y)dy.$$

78.4.2 Può essere interessante, come nel caso delle funzioni di una sola variabile, l'interpretazione geometrica del differenziale di una funzione di due variabili, anche se adesso la cosa è resa più complicata dal fatto che la funzione deve essere rappresentata nello spazio cartesiano (Oxyz).

Supponiamo allora assegnata una funzione z=f(x,y) di due variabili. La quantità f(x,y) rappresenta anche il valore della funzione nel punto (x,y). Diamo alla x l'incremento Δx ed alla y l'incremento Δy: il valore della funzione nel punto (x+Δx, y+Δy) è evidentemente f(x+Δx, y+Δy). Cosicché, nel passaggio dal primo al secondo punto, la funzione subisce l'incremento Δf tale che:

$$\Delta f=f(x+\Delta x,\,y+\Delta y)-f(x,y).$$

Il grafico (Fig. 5) evidenzia la superficie Σ che rappresenta la funzione z=f(x,y).

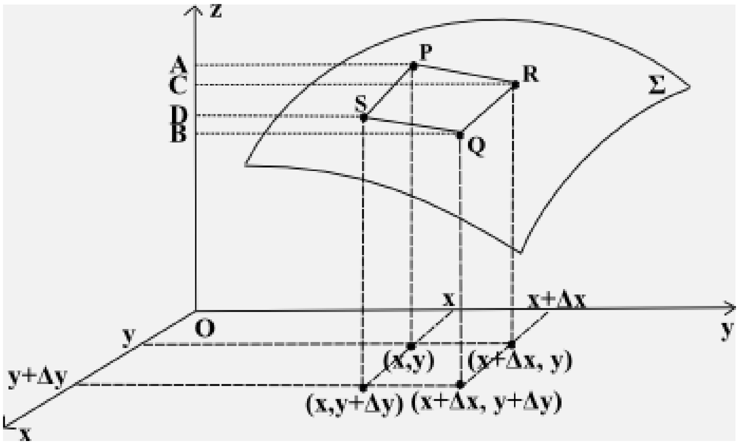

FIG. 5

Indichiamo con P il punto di Σ corrispondente al punto (x,y) del piano xy; vale a dire:

$$P\big(x,y,f(x,y)\big)$$

e con Q il punto di Σ corrispondente al punto (x+Δx, y+Δy) del piano xy; vale a dire:

$$Q\big(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ f(x+\Delta x, y+\Delta y)\big).$$

Se chiamiamo A e B le proiezioni ortogonali rispettivamente di P e Q sull'asse z, la variazione Δf della funzione nel passaggio dal punto P al punto Q è rappresentata dal segmento orientato AB.

Ora, si può passare dal punto P al punto Q in due modi.

1) Si dà ad x l'incremento Δx, lasciando y invariata. Si ottiene così sul piano xy il punto (x+Δx, y) e sulla superficie Σ il punto $R\big(x+\Delta x, y, f(x+\Delta x, y)\big)$. Quindi si passa da R a Q dando ad y l'incremento Δy e lasciando invariata x+Δx. In questo modo, indicata con C la proiezione di R sull'asse z: Δf=AC+CB.
2) Si dà ad y l'incremento Δy, lasciando x invariata. Si ottiene così sul piano xy il punto (x, y+Δy) e sulla superficie Σ il punto $S\big(x, y+\Delta y, f(x, y+\Delta y)\big)$. Quindi si passa da S a Q dando ad x l'incremento Δx e lasciando invariata y+Δy. In questo modo, indicata con D la proiezione di S sull'asse z: Δf=AD+DB.

In generale, per valori finiti, i segmenti orientati AC e DB sono disuguali, ma al limite per Δx e Δy tendenti entrambi a 0 si può ammettere che sia AC=DB. Ne discende che anche CB=AD.

D'altro canto, al limite:

$$AC = DB = \lim_{\Delta x\to 0}\big(f(x+\Delta x, y) - f(x,y)\big) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}\cdot \Delta x = \frac{\partial f}{\partial x}dx\,,$$

$$CB = AD = \lim_{\Delta y\to 0}\big(f(x, y+\Delta y) - f(x,y)\big) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}\cdot \Delta y = \frac{\partial f}{\partial y}dy\,.$$

Di conseguenza:

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\,.$$

Vale a dire, al limite per Δx e Δy tendenti entrambi a 0: Δf=df.

78.4.3 La conclusione precedente, come nel caso delle funzioni di una variabile, permette delle approssimazioni numeriche, che, se al giorno d'oggi non sono più tanto interessanti per la possibilità di utilizzare strumenti di calcolo automatico, lo erano invece fino a qualche tempo fa.

Vediamo un esempio.

- ESERCIZIO. Data la funzione $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, si richiede un'approssimazione di f(3,15; 4,27).

RISOLUZIONE. Possiamo supporre, in generale, che sia:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + \Delta f\,.$$

Nel caso nostro, essendo (x,y)=(3,4), Δx=0,15 e Δy=0,27:

$$f(3+0{,}15;4+0{,}27)=f(3,4)+\Delta f=5+\Delta f.$$

D'altro canto, essendo nel punto (3,4):

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x,y)=(3,4)} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)_{(x,y)=(3,4)} = \frac{3}{5}\,,\qquad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x,y)=(3,4)} = \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)_{(x,y)=(3,4)} = \frac{4}{5}\,,$$

per i valori suddetti si ha:

$$\Delta f=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y=\frac{3}{5}\cdot 0{,}15+\frac{4}{5}\cdot 0{,}27=0{,}306\,.$$

Per cui:

$$f(3{,}15;4{,}27)\approx 5+0{,}306=5{,}306.$$

In realtà, mediante uno strumento di calcolo automatico:

$$f(3{,}15;4{,}27)=\sqrt{3{,}15^2+4{,}27^2}\approx 5{,}30616.$$

Il che prova come sia eccellente l'approssimazione 5,306 di f(3,15; 4,27), calcolata mediante il differenziale.

VERIFICHE

Esercizi di ottimizzazione di una funzione di due variabili (nn. 1-2):

1. Calcolare i punti estremanti, se esistono, e i relativi valori estremi della funzione f(x,y):

a) $f(x,y)=x^2+2\,x\,y+4\,y^2+x$.

b) $f(x,y)=\frac{2}{3}x^2+2\,x\,y+20\,y^2-3\,x+14\,y$.

c) $f(x,y)=4x^2-\frac{1}{2}\,y^2-8\,x+\frac{7}{2}$.

d) $f(x,y)=x^3+y^3+(x+y)^2$.

e) $f(x,y)=\frac{x-2y}{2x+y}$.

2. Stabilire se la funzione f(x,y) ammette estremi sotto il vincolo indicato a fianco di essa:

a) $f(x,y)=8(3x^2-\,x\,y+2\,y^2)$, con $x+y=36$.

b) $f(x,y)=\frac{7}{4}x^2-\frac{1}{3}x\,y+\frac{2}{3}y^2$, con $3\,x+2\,y=168$.

c) $f(x,y)=-\frac{2}{3}x^2+\frac{5}{6}x\,y-\frac{3}{4}y^2+4\,x+13\,y$, con $2\,x+9\,y=1020$.

d) $f(x,y)=x^2+x\,y+25\,y^2-6\,x-6\,y$, con $\frac{x}{25}+\frac{y}{20}=1$.

Problemi vari di ottimizzazione (nn. 3-18):

3. Si consideri la funzione:

$$z=4\,x^2-4\,x\,y-\,7\,y^2+8\,x+9.$$

a) Stabilire se ammette estremi.
b) Stabilire se ammette estremi sotto il vincolo $x+2\,y=30$.

4. Si consideri la funzione:

$$z=-7\,x^2-10\,x\,y+y^2+10\,x+10\,y+18.$$

a) Stabilire se ammette estremi.
b) Stabilire se ammette estremi sotto il vincolo $4\,x+y=62$.

5. Si consideri la funzione:

$$z=4\,x^2-4\,x\,y+\frac{5}{4}y^2-12\,x+3\,y-23.$$

a) Stabilire se ammette estremi.
b) Stabilire se ammette estremi sotto il vincolo $6x - 2y = 3$.

6. Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnato il rettangolo OABC nel quale A(3,0) e C(0,2). Dimostrare che il punto d'incontro delle sue diagonali è il punto del piano per il quale è minima la somma dei quadrati delle sue distanze dai vertici del rettangolo.

7. È dato il triangolo ABC. Dopo aver riferito il suo piano ad un conveniente sistema di assi cartesiani, dimostrare che il suo baricentro è il punto per il quale è minima la somma dei quadrati delle sue distanze dai vertici del triangolo.

[**R.** Suggeriamo di assumere il sistema di riferimento in modo che l'origine sia il vertice C, l'asse x la retta CA, orientata da C verso A, e l'asse y, perpendicolare alla retta CA, in modo che il vertice B sia situato nel primo quadrante. In questo modo, indicata con a l'ascissa di A e con (b,c) le coordinate di C, il baricentro G del triangolo ha coordinate … .
Chiamato P(x,y) il generico punto del piano, si tratta di dimostrare che le coordinate di G rendono minima la funzione $f(x,y)=3x^2+3y^2-2(a+b)x-2cy+(a^2+b^2+c^2)$]

8. Un'azienda produce due articoli A e B. Il suo profitto z, espresso in euro, è una funzione del numero x di quintali dell'articolo A e del numero y di quintali dell'articolo B prodotti dall'azienda in una settimana e ubbidisce alla seguente legge:

$$z = 8xy - 5x^2 - 5y^2 + 60x - 4.$$

Stabilire se esiste una produzione che assicuri all'azienda il massimo profitto.

$$\left[\mathbf{R.}\ \max = € \, 496 \text{ per } x=\frac{50}{3}\,q,\ \ y=\frac{40}{3}\,q\right]$$

9. Un'azienda produce due articoli A e B. Il suo ricavo totale z, espresso in euro, è una funzione del numero x di unità dell'articolo A e del numero y di unità dell'articolo B prodotti dall'azienda in una settimana e ubbidisce alla seguente legge:

$$z = 16xy - 20x^2 - 5y^2 + 960x - 240y - 9936.$$

Stabilire se esiste una produzione che assicuri all'azienda il massimo ricavo.

[**R.** max = € 4464 per $x=40,\ y=40$]

10. Un'azienda produce due articoli A e B. Il costo totale di produzione, espresso in euro, è una funzione del numero x di unità dell'articolo A e del numero y di unità dell'articolo B prodotti giornalmente dall'azienda e ubbidisce alla seguente legge:

$$z = 5x^2 - 6xy + 24y^2 - 24x - 30y + 243.$$

Stabilire se esiste una produzione che permetta all'azienda di ridurre al minimo il costo totale.

[**R.** min = € 192 per $x=3,\ y=1$]

11. Un'azienda produce due beni A e B. Il costo totale di produzione, espresso in euro, dipende dal numero x di quintali di A e dal numero y di quintali di B prodotti in una settimana, secondo la seguente legge:

$$C(x,y) = 17x^2 - 48xy + 34y^2 - 232x - 318y + 6309{,}5.$$

Trovare, se esiste, una produzione che riduca al minimo il costo totale di produzione.

[**R.** min = € 5325 per $x=64$ q, $y=40{,}5$ q]

12. Un'azienda produce due beni A e B. Il costo totale di produzione, espresso in migliaia euro, dipende dal numero x di quintali di A e dal numero y di quintali di B prodotti in una settimana, secondo la seguente legge:

$$C(x,y) = x^2 - 2xy + 4y^2 - x + 2.$$

Trovare, se esiste, una produzione che riduca al minimo il costo totale di produzione.

$\left[\textbf{R.}\ \ \min \approx € \ 1666{,}67 \text{ per } x=\frac{5}{3}\,q,\ y=\frac{1}{6}\,q\right]$

13. Un’azienda produce due articoli A e B. Il costo totale di produzione, espresso in migliaia euro, dipende dal numero x di unità di A e dal numero y di unità di B prodotti giornalmente, secondo la seguente legge:

$$C(x,y) = x^2 - x\,y + y^2 - 3\,x + 18.$$

L’azienda stima di poter vendere i due articoli ai prezzi P_A e P_B, espressi in euro, tali che:

$$P_A=380-3x+y,\ \ P_B=390+2x-4y.$$

Trovare se esiste:

a) una produzione che riduca al minimo il costo totale di produzione;

b) una produzione che assicuri all’azienda il massimo ricavo;

c) una produzione che assicuri all’azienda il massimo profitto.

[**R.** a) min ≈ € 15000 per x=2, y=1; b) max ≈ € 37910 per x≈108, y≈89 ; c) attenzione alle misure!]

14. Un’azienda produce due articoli A e B. Il costo totale di produzione, espresso in euro, è una funzione del numero x di unità dell’articolo A e del numero y di unità dell’articolo B prodotti giornalmente dall’azienda e ubbidisce alla seguente legge:

$$C(x,y) = 42\,x^2 + 75\,x\,y + 54\,y^2 - 75\,x - 108\,y + 54.$$

L’azienda, per contratto, deve produrre giornalmente almeno 15 unità complessive dei due articoli. Stabilire se esiste una produzione che permetta all’azienda di ridurre al minimo il costo totale.

[**R.** min = € 8043 per x=11, y=4.]

15. Un’azienda produce due articoli A e B. Il ricavo dell’azienda, espresso in euro, è una funzione del numero x di unità dell’articolo A e del numero y di unità dell’articolo B prodotti giornalmente e ubbidisce alla seguente legge:

$$R(x,y) = 15154+46\,x + 39\,y - 4\,x^2 - 3\,x\,y - 6\,y^2.$$

L’azienda, per contratto, non può produrre giornalmente più di 63 unità complessive dei due articoli. Stabilire se esiste una produzione che assicuri all’azienda il massimo ricavo.

[**R.** max = € 5564 per x=41, y=22.]

16. Un’azienda produce due articoli A e B. Il profitto dell’azienda, espresso in euro, è una funzione del numero x di unità dell’articolo A e del numero y di unità dell’articolo B prodotti giornalmente e ubbidisce alla seguente legge:

$$G(x,y) = 10910 - 166\,x - 84\,y - 4\,x^2 - 3\,x\,y - 6\,y^2\,.$$

L’azienda, per contratto, non può produrre giornalmente più di 34 unità complessive dei due articoli. Stabilire se esiste una produzione che assicuri all’azienda il massimo ricavo.

[**R.** max = € 2910 per x=16, y=18.]

17. Un’azienda produce due sostanze A e B. Il costo totale di produzione, espresso in euro, è una funzione del numero x di quintali della sostanza A e del numero y di quintali di B prodotti mensilmente dall’azienda e ubbidisce alla seguente legge:

$$C(x,y) = 54\,x^2 + 75\,x\,y + 42\,y^2 - 549\,x - 477\,y + 1643.$$

L’azienda, per contratto, deve produrre ogni mese almeno 4 quintali complessivi delle due sostanze, ma non ne può produrre più di 25.

Stima di vendere i due articoli ai prezzi P_A e P_B, espressi in euro, tali che:

$$P_A = 32 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y,\quad P_B = 25 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}y.$$

Stabilire se esiste:

a) una produzione che permetta all'azienda di ridurre al minimo il costo totale;
b) una produzione che le assicuri il ricavo massimo.
c) Stabilire inoltre se, in entrambe le situazioni precedenti, l'azienda ci guadagna o lavora in perdita.

[**R.** a) min ≈ € 164,14 per x ≈ 2,57 q, y ≈ 1,43 q;
b) max ≈ € 494,50 per x = 20,9 q, y ≈ 4,1 q;
c) l'azienda lavora in perdita in entrambe le situazioni]

18. Un'azienda produce due articoli A e B. Il costo totale di produzione, espresso in migliaia di euro, è una funzione del numero x di unità di A e del numero y di unità di B prodotti ogni settimana dall'azienda e ubbidisce alla seguente legge:

$$C(x,y) = x^2 + 2\,x\,y + 2\,y^2 - 6\,x - 8\,y + 15.$$

L'azienda, per contratto, deve produrre ogni settimana almeno 2 unità complessive dei due articoli, ma non ne può produrre più di 20.
Stima di vendere i due articoli ai prezzi P_A e P_B, espressi in migliaia di euro, tali che:

$$P_A=53-0{,}02x-0{,}4y, \quad P_B=40-0{,}5x-0{,}03y.$$

Stabilire se esiste:
a) una produzione che permetta all'azienda di ridurre al minimo il costo totale;
b) una produzione che le assicuri il ricavo massimo.
c) Stabilire inoltre se, producendo 10 unità di A e 10 unità di B in una settimana, l'azienda ci guadagna o lavora in perdita.

[**R.** a) min = € 6000 per x=1, y=1; b) non esiste; c) l'azienda guadagna € 460.000]

Differenziale totale (nn. 19-24):

19. Calcolare il differenziale totale della funzione f(x,y), precisando se c'è qualche punto in cui essa non ammette differenziale, sapendo che:

a) $f(x,y) = x + y$. b) $f(x,y) = \dfrac{1}{x+y}$. c) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x-y}$. d) $f(x,y) = \ln(x+y)$.

e) $f(x,y) = x + \sqrt{y}$. f) $f(x,y) = \sqrt{x} + y$. g) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x+y}}{x-y}$. h) $f(x,y) = e^{x+y}$.

20. Considerata la funzione f(x,y), calcolare una sua approssimazione nel punto (a,b) utilizzando il differenziale e verificare la bontà dell'approssimazione mediante uno strumento di calcolo automatico. Si sa che:

a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $(a,b) = (12{,}271; 5{,}356)$.
b) $f(x,y) = \ln(2x+y)$, $(a,b) = (2{,}36; 3{,}58)$.
c) $f(x,y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$, $(a,b) = (13{,}701; 7{,}649)$.
d) $f(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$, $(a,b) = (9{,}773; 16{,}362)$.

21. Un cilindro circolare retto ha raggio di base di 5 cm ed altezza di 12 cm. Sapendo che il raggio di base aumenta di 0,38 cm e l'altezza di 0,13 cm, di quanto aumenta l'area laterale del cilindro? Di quanto aumenta il volume?
Trovare delle approssimazioni degli aumenti richiesti utilizzando il differenziale e verificare la bontà delle approssimazioni ottenute calcolando gli stessi aumenti mediante uno strumento di calcolo automatico

[**R.** $\Delta A_L \approx 33{,}04\ cm^2$; $\Delta V \approx 160{,}521\ cm^3$]

22. Un conduttore avente resistenza di 12 Ω è sottoposta ad una tensione di 9 V. Di quanti ampère aumenta l'intensità della corrente che attraversa il conduttore se la sua resistenza aumenta di 0,35 Ω e la tensione aumenta di 0,29 V? [**R.** $\Delta i \approx 2{,}2$ mA]

23. È noto che la resistenza R di un conduttore di resistenza specifica ρ dipende dalla lunghezza L del conduttore e dalla sezione S secondo la seguente legge:

$$R=\rho\frac{L}{S}\,.$$

Ammesso che la lunghezza vari della quantità infinitesima dL e la sezione di dS, qual è la variazione della resistenza? $\left[\mathbf{R.}\ dR=\frac{\rho}{S^2}(S\,dL-L\,dS)\right]$

24. Due resistenze elettriche, R_1 ed R_2, sono collegate in parallelo. È noto che la resistenza equivalente R è tale che:

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\,.$$

Di quanto varia la resistenza R se le due resistenze variano delle quantità infinitesime dR_1 e dR_2?

$$\left[\mathbf{R.}\ dR=\frac{1}{(R_1+R_2)^2}\left(R_2^2\,dR_1+R_1^2\,dR_2\right)\right]$$

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

DOMANDE

1. Come si definisce una funzione reale di due variabili reali ?

2. Da quale parte di piano è costituito il dominio della funzione $f(x,y)=\sqrt{x}+\sqrt{y}$?

3. Considerata una funzione reale di due variabili reali f(x,y), accade sempre che $f''_{xy}=f''_{yx}$?

4. Quali condizioni si devono verificare affinché una funzione reale di due variabili reali f(x,y) abbia un massimo nel punto (x_0,y_0)? Quali condizioni affinché abbia un minimo in tale punto? Quali condizioni affinché non abbia massimo né minimo? Quando non si può dire nulla in merito?

5. In quali punti la funzione $f(x,y)=\frac{x+y}{x-y}$ non ammette differenziale totale?

RISPOSTE

1. Si definisce funzione reale di due variabili reali una relazione che ad ogni coppia ordinata di numeri reali, scelta in un conveniente sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$, associa uno ed un solo valore reale.

2. Dovendo essere contemporaneamente $x\geq 0$ ed $y\geq 0$, il dominio è costituito dal primo quadrante degli assi coordinati, compresi i punti dei semiassi positivi delle ascisse e delle ordinate e compresa l'origine.

3. No. In realtà la circostanza non si verifica sempre, ma si verifica tutte le volte che esistono f'_x, f'_y, f''_{xy} ed inoltre f''_{xy} è continua. Infatti in questo caso esiste anche f''_{yx} e si ha $f''_{xy}=f''_{yx}$.

4. Anzitutto deve accadere che nel punto la funzione ammetta derivate parziali prime e seconde e che le derivate parziali prime siano entrambe nulle. Una volta verificate queste condizioni, se accade che le derivate parziali seconde sono continue nel punto, si considera l'hessiano di f nel punto (x_0,y_0): $H(x_0,y_0)=f''_{xx}(x_0,y_0)f''_{yy}(x_0,y_0)-\left(f''_{xy}(x_0,y_0)\right)^2$

a) Se $H(x_0,y_0)>0$ allora nel punto c'è certamente o un massimo o un minimo. Precisamente:

- se $f''_{xx}(x_0,y_0)<0$ (nel qual caso anche $f''_{yy}(x_0,y_0)<0$) c'è un massimo
- se $f''_{xx}(x_0,y_0)>0$ (nel qual caso anche $f''_{yy}(x_0,y_0)>0$) c'è un minimo;

b) Se $H(x_0,y_0)<0$ allora nel punto non c'è massimo né minimo.

c) Se, infine, $H(x_0,y_0)=0$, non si può concludere nulla riguardo al punto (x_0,y_0).

5. La funzione in esame non ammette differenziale in tutti i punti (x,y) tali che $x=y$.