

Prerequisiti:

- Primi elementi di probabilità e statistica.
- Nozioni di calcolo combinatorio.
- Rappresentazione di punti, rette e curve in un piano cartesiano.

Questa unità interessa tutte le scuole ad eccezione del Liceo Artistico. Gli Istituti Tecnici e gli Istituti Professionali ne affronteranno lo studio in linea di massima nel 2° biennio, i Licei nella 5^a classe.

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:

- *definire una variabile aleatoria*
- *calcolare la media e la deviazione standard di una variabile aleatoria*
- *definire il concetto di gioco equo*
- *definire una distribuzione di probabilità*
- *riconoscere, rappresentare e utilizzare la distribuzione binomiale, servendosi eventualmente di uno strumento di calcolo automatico*
- *fornire qualche esempio di distribuzione continua*

79.1 Variabile aleatoria.

79.2 Distribuzioni di probabilità.

79.3 Distribuzione binomiale.

79.4 Distribuzioni discrete e distribuzioni continue.

Verifiche.

Una breve sintesi per domande e risposte.

Complementi: Probabilità geometriche e metodo Monte Carlo.

Distribuzioni di probabilità

Unità 79

79.1 VARIABILE ALEATORIA

79.1.1 Consideriamo l’esperimento che consiste nel lanciare due dati, ciascuno con le facce numerate da 1 a 6. L’esito di ogni lancio è l’uscita di una coppia ordinata di numeri, ciascuno compreso fra 1 e 6 inclusi. La funzione S che ad ogni lancio associa la somma dei due numeri usciti può assumere evidentemente i valori interi da 2 a 12 inclusi. Essi però non hanno la stessa probabilità di essere assunti da S . Posto, infatti, che gli eventi elementari siano equiprobabili (come dire che le facce dei dadi hanno la stessa probabilità di uscire) e tenendo presente la tabella 1, le probabilità con cui i valori suddetti, cioè i valori:

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12,

sono assunti dalla funzione S risultano essere rispettivamente:

$$\frac{1}{36} \text{ ' } \frac{2}{36} \text{ ' } \frac{3}{36} \text{ ' } \frac{4}{36} \text{ ' } \frac{5}{36} \text{ ' } \frac{6}{36} \text{ ' } \frac{5}{36} \text{ ' } \frac{4}{36} \text{ ' } \frac{3}{36} \text{ ' } \frac{2}{36} \text{ ' } \frac{1}{36} \text{ '}$$

E, come si può facilmente controllare, la loro somma vale 1.

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

TAB. 1

La funzione S è una *variabile aleatoria*. In generale:

Si chiama **variabile aleatoria** (o **casuale** o **stocastica**) una funzione X che, ad ognuno degli eventi casuali incompatibili E_1, E_2, \dots, E_n di probabilità p_1, p_2, \dots, p_n tali che:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1,$$

associa rispettivamente i numeri reali x_1, x_2, \dots, x_n .

Possiamo rappresentarla in questo modo:

$$[1] \quad X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix} \quad \left(\sum_{i=1}^n p_i = 1 \right)$$

Per indicare che è uguale a p_i la probabilità che la variabile aleatoria X assuma il valore x_i si scrive:

$$P[X=x_i] = p_i.$$

La più semplice variabile aleatoria discreta è la *variabile aleatoria di Bernoulli*⁽¹⁾ di parametro p . È suscettibile dei soli valori 1 e 0, che assume con probabilità rispettivamente p e $q=1-p$. Si può indicare nel modo seguente:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1-p \end{pmatrix}.$$

Per esempio, abbiamo una variabile aleatoria di Bernoulli di parametro p se, nel lancio di una moneta “Testa-Croce”, p è la probabilità che esca “Testa” (non necessariamente uguale ad $1/2$, come ad

¹ **Bernoulli**, Jakob, matematico svizzero, 1654-1705.

esempio in una moneta “truccata”), per cui è $q=1-p$ quella che esca “Croce”, ed all’uscita di “Testa” o di “Croce” si attribuisce rispettivamente valore “1” o valore “0”.

Considerata una variabile aleatoria X – come quella rappresentata dalla [1] – si definisce **speranza matematica** di X la quantità $M(X)$ tale che:

$$[2] \quad M(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i .$$

Con riferimento alla variabile aleatoria di Bernoulli, si ha $M(B)=p$.

Siccome $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, la [2] può essere scritta anche in questo modo:

$$M(X) = \frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i}{\sum_{i=1}^n p_i} .$$

E questo giustifica il seguente fatto:

La speranza matematica della variabile aleatoria X coincide con la media aritmetica ponderata dei valori x_1, x_2, \dots, x_n assunti da X , quando si prendono come pesi le rispettive probabilità p_1, p_2, \dots, p_n .

Poiché la media aritmetica suddetta si chiama anche *media* (o *valor medio*) della variabile aleatoria X , concludiamo che:

La speranza matematica di una variabile aleatoria si identifica con la sua **media**.

È chiamata anche **valore atteso**. Ciò perché:

La media di una variabile aleatoria rappresenta il valore che meno si discosta dal valore che la variabile aleatoria ha la maggior probabilità di assumere.

Per sintetizzare: **speranza matematica** di una variabile aleatoria X , **media** di X , **valore atteso** di X sono sinonimi.

Risolvi il seguente esercizio.

La variabile aleatoria X assume i valori 1, 2, 3, 4, n . I primi 4 con probabilità rispettive $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$. Determinare n sapendo che il valore atteso di X è $\frac{31}{16}$.

79.1.2 Il concetto di speranza matematica svolge un ruolo importante nel caso delle scommesse.

Consideriamo, al riguardo, un gioco in cui un giocatore ha la probabilità p_1 di perdere la somma S_1 e la probabilità $p_2=1-p_1$ di vincere la somma S_2 . Ebbene, possiamo prendere in considerazione la variabile aleatoria G , i cui eventi sono le somme che il giocatore può vincere, e cioè $-S_1$ (poiché in realtà è una perdita) ed S_2 , con probabilità p_1 e p_2 rispettivamente, vale a dire:

$$G = \begin{pmatrix} -S_1 & S_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix} .$$

Poiché $p_1+p_2=1$, G è una variabile aleatoria. La sua speranza matematica è:

$$M(G) = -S_1 p_1 + S_2 p_2 .$$

Essa non è altro che il guadagno medio del giocatore. Il gioco si dice *equo* se $M(G)=0$. Dunque:

Un gioco si dice equo se il guadagno medio del giocatore è nullo.

Si desume facilmente che, in un gioco equo, risulta:

$$S_1 p_1 = S_2 p_2 .$$

Vale a dire:

In un gioco equo, il prodotto dell'importo che un giocatore può perdere per la probabilità di perderlo è uguale a prodotto di quello che può vincere per la probabilità di vincerlo.

D'altro canto, la relazione $S_1 p_1 = S_2 p_2$ può essere messa nella forma:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{p_2}{p_1},$$

ragion per cui:

In un gioco equo, il rapporto tra l'importo che un giocatore può perdere e quello che può vincere è uguale al rapporto inverso tra le rispettive probabilità di perdere o di vincere.

Ti proponiamo un paio di esercizi.

1. Giochi a dadi. Precisamente sono lanciati due dadi, le cui facce, numerate in entrambi da 1 a 6, hanno la stessa probabilità di uscire. Ogni volta che esce una coppia di numeri uguali vinci 10 euro, ogni volta che esce una coppia di numeri diversi vinci x euro se la loro somma è minore di 7, altrimenti perdi 12 euro. Quanto deve valere x affinché il gioco sia equo?
2. Partecipi al gioco a premi "Chi vuol essere milionario" e sei giunto a quota 30000 euro. Se sbagli la prossima domanda scendi a 20000 euro, se la indovini sali a 70000. La domanda è un quesito a 4 alternative con una sola risposta corretta. Non hai la più pallida idea di quale possa essere la risposta giusta. Decidi di rispondere ugualmente, scegliendo a caso. La speranza matematica del tuo guadagno è positiva, negativa o nulla?

79.1.3 Oltre alla media $M(X)$ di una variabile aleatoria X , è utile conoscere il modo con cui i valori assunti da X si discostano dalla media. L'indice adatto allo scopo è, come per le variabili statistiche, la **deviazione standard**, indicata con $\sigma(X)$ o anche con **dev(X)**. Per determinarne l'espressione sono necessarie alcune considerazioni, simili in tutto e per tutto a quelle svolte a suo tempo per le variabili statistiche. Anzitutto prendiamo in esame gli scarti della variabile X dalla sua media $M(X)$. Vale a dire il seguente sistema di numeri:

$$x_1 - M(X), x_2 - M(X), \dots, x_n - M(X),$$

i quali si presentano con le medesime probabilità:

$$p_1, p_2, \dots, p_n,$$

con cui si presentano i corrispondenti valori assunti da X . Di modo che la funzione Y , che ad ogni evento associa quei numeri con le suddette probabilità, è essa stessa una variabile aleatoria: si chiama **scarto** (o **scostamento** o **deviazione**) della variabile X dalla sua media.

La prima idea, per valutare come mediamente i valori di X si discostano dalla loro media $M(X)$, sarebbe di calcolare la media di Y . Tempo sprecato, poiché $M(Y) = 0$. Cosa che puoi dimostrare facilmente da solo. Questo significa che gli scostamenti positivi e quelli negativi si controbilanciano.

Allora, per avere l'informazione suddetta, si ricorre ad una variabile aleatoria collegata, sì, ad Y ma nella quale i segni degli scostamenti non hanno influenza.

Questa variabile si chiama **quadrato dello scarto** e si indica con Y^2 . Può essere rappresentata nel modo seguente, dove per comodità si è posto μ al posto di $M(X)$:

$$Y^2 = \begin{pmatrix} (x_1 - \mu)^2 & (x_2 - \mu)^2 & \dots & (x_n - \mu)^2 \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}.$$

La media di Y^2 , vale a dire la media dei quadrati degli scarti, si chiama **varianza** della variabile aleatoria X e di solito si indica con la scrittura $\sigma^2(X)$ o anche con **var(X)**. Pertanto:

$$\text{var}(X) = \sigma^2(X) = M(Y^2) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - M(X))^2.$$

Già questo valore è un indice che permette di valutare come le determinazioni della variabile aleatoria X si disperdono rispetto alla media $M(X)$. Tuttavia, per ragioni di omogeneità con le determinazioni di X , si preferisce servirsi in sua vece della radice quadrata della varianza di X : è proprio questo valore è la **deviazione standard**. Dunque:

$$\text{dev}(X) = \sigma(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^n p_i (x_i - M(X))^2}.$$

Per esempio, ancora con riferimento alla variabile aleatoria di Bernoulli di parametro p , si ha:

$$\sigma(B) = \sqrt{p(1-p)}.$$

Possiamo fare un paio di considerazioni ragionando sulla formula precedente:

- Poniamo che restino invariate le probabilità p_i : quanto più piccoli sono gli scarti $x_i - M(X)$ (quanto minori cioè sono gli scostamenti delle determinazioni di X dalla media) tanto più piccola è la deviazione standard e viceversa.
- Ammettiamo che restino invariate le determinazioni x_i della variabile aleatoria X : quanto più piccole sono le probabilità degli scarti $x_i - M(X)$ aventi il maggior valore assoluto (cioè quanto più piccole sono le probabilità delle x_i che maggiormente si discostano da $M(X)$) tanto più piccola è la deviazione standard e viceversa.

ESERCIZI.

1. Considera l'esperimento del lancio di due dadi con le facce numerate da 1 a 6, aventi la stessa probabilità di uscire. Indicata con S la somma dei punti usciti, prova che si ha: $\sigma(S) \approx 2,42$.
2. Nel lancio di due dadi con le facce numerate da 1 a 6, aventi la stessa probabilità di uscire, la funzione F associa ad ogni lancio:
 - a) il numero 1 se i due numeri usciti sono entrambi pari;
 - b) il numero 2 se uno dei due numeri è pari e l'altro è un divisore di 3;
 - c) il numero 3 se entrambi i numeri sono dispari;
 - d) il numero 4 nei casi rimanenti.

Spiega perché la funzione F è una variabile aleatoria e di essa calcola la media e la deviazione standard.

[R. ...; 2,33; 1,027]

79.2 DISTRIBUZIONI DI PROBABILITÀ

79.2.1 Consideriamo la variabile aleatoria generica X rappresentata dalla [1].

L'insieme dei numeri p_1, p_2, \dots, p_n , la cui somma è uguale ad 1, corrispondenti ai valori x_1, x_2, \dots, x_n che può assumere X , si chiama **distribuzione di probabilità** della variabile aleatoria X (o, più semplicemente, **distribuzione di X**).

La media, la deviazione standard e la varianza della variabile aleatoria X sono chiamate anche *media*, *deviazione standard* e *varianza* della relativa distribuzione di probabilità.

In un piano cartesiano ortogonale (solitamente non monometrico), in cui in ascisse si prendono le x_i ed in ordinate le p_i , il grafico della distribuzione di X è costituito dagli n punti isolati di coordinate (x_i, p_i) ,

con i che varia da 1 ad n .

In figura (Fig. 1) è rappresentata la distribuzione della variabile aleatoria X tale che:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

Quanto vale la media di tale distribuzione? Quanto la sua deviazione standard?

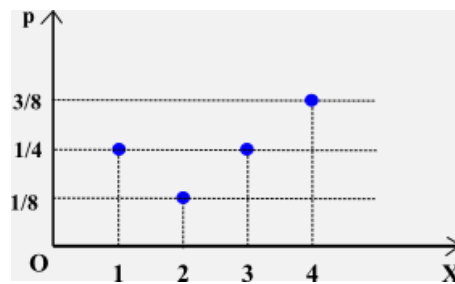


FIG. 1

79.2.2 Ci occuperemo tra breve di una delle più importanti distribuzioni di probabilità, ma prima vogliamo fare un cenno alla cosiddetta *distribuzione uniforme*. Vale la seguente definizione:

Una variabile aleatoria X si dice **uniforme** quando le probabilità p_i ($i=1,2,\dots,n$) con cui si presentano le sue determinazioni x_1, x_2, \dots, x_n sono uguali fra loro; per cui, dovendo essere uguale ad 1 la loro somma, ciascuna di esse vale $1/n$.

La distribuzione di tale variabile si dice, a sua volta, **distribuzione uniforme**.

In figura 2 è rappresentata la distribuzione della variabile aleatoria uniforme X suscettibile dei valori 1, 2, 3, 4, 5, 6 con probabilità $p_1=p_2=p_3=p_4=p_5=p_6=1/6$.

Il modello che viene in mente è la distribuzione della variabile che ad ogni lancio di un dado associa il numero che contrassegna la faccia uscita, supponendo ovviamente che il dado non sia truccato e le sue facce siano numerate da 1 a 6.

Quanto vale la media di tale distribuzione di probabilità? Quanto la sua deviazione standard?

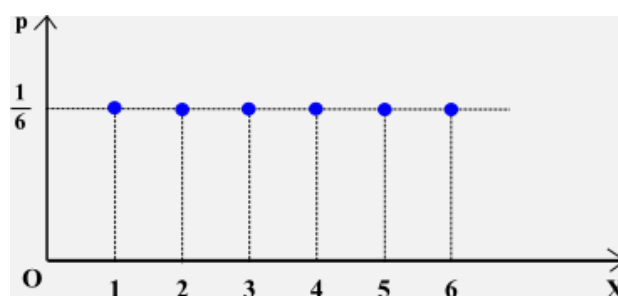


FIG. 2

Ti proponiamo un paio di esercizi.

- 1) Dimostrare che la media della distribuzione di probabilità della variabile aleatoria X suscettibile dei valori 1, 2, 3, ..., n , ciascuno con probabilità $\frac{1}{n}$ è $\frac{n+1}{2}$.
- 2) Qual è la probabilità che sia uguale a 2 la 3^a cifra decimale del logaritmo naturale di un numero reale positivo, scelto a caso?

79.3 DISTRIBUZIONE BINOMIALE ⁽²⁾**79.3.1** Cominciamo col risolvere questo problema.

• **PROBLEMA.** Calcolare la probabilità che, su 5 lanci di una moneta “testa-croce”, esca 3 volte “testa”, ammesso che le due facce della moneta abbiano la stessa probabilità di uscire.

RISOLUZIONE. Per mezzo di un grafo che schematizzi i possibili casi che si verificano nell’esperimento dei 5 lanci, si trova che il numero dei casi possibili è 32, mentre quello dei casi favorevoli all’evento “esce 3 volte testa” è 10. Per cui la probabilità cercata è $p_3=10/32$. Lasciamo a te questo calcolo, compresa la costruzione del grafo.

Noi invece ci proponiamo di arrivare al risultato con un altro procedimento. Per comodità diciamo E l’evento “esce testa”. Se esso si presentasse nei primi tre lanci, e di conseguenza negli altri due si presenta l’evento contrario \bar{E} : “non esce testa”, si avrebbe questa sequenza: E E E \bar{E} \bar{E} .

Ora, siccome gli eventi sono indipendenti, la probabilità che si verifichi questo fatto è:

$$p' = p(E) \cdot p(E) \cdot p(E) \cdot p(\bar{E}) \cdot p(\bar{E});$$

ossia, posto $p(E)=p$ e $p(\bar{E})=q$ (con $q=1-p$):

$$p' = p^3 q^2.$$

In realtà non importa che l’evento E si manifesti nei primi 3 lanci. Ciò che interessa è che esso si verifichi esattamente 3 volte. Per cui vanno bene tutte le sequenze che si ottengono da E E E \bar{E} \bar{E} con una permutazione dei suoi elementi; come dire che queste sequenze sono tante quante le permutazioni di 5 oggetti dei quali uno si ripete 3 volte ed uno si ripete $5-3=2$ volte. Sappiamo che queste sono in numero di $\frac{5!}{3!(5-3)!}$, numero che è uguale al coefficiente binomiale $\binom{5}{3}$. Inoltre ognuna di queste sequenze ha la stessa probabilità $p^3 q^2$ già vista di verificarsi. Sicché, per il principio delle probabilità totali, la probabilità p_3 che su 5 lanci esca esattamente 3 volte “testa”, è la somma di $\binom{5}{3}$ termini uguali a $p^3 q^2$; vale a dire:

$$[3] \quad p_3 = \binom{5}{3} p^3 q^{5-3}.$$

Osserviamo adesso che nel caso specifico è: $p=p(E)=\frac{1}{2}$ e $q=1-p=\frac{1}{2}$, di conseguenza:

$$p_3 = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{10}{32}.$$

Abbiamo ottenuto naturalmente lo stesso risultato trovato per mezzo del grafo. Ma in modo più complicato.

79.3.2 Qualcuno potrebbe maliziosamente insinuare che il nuovo procedimento non sia altro che un virtuosismo dei matematici, fatto apposta per complicarsi la vita e soprattutto per complicarla agli studenti. Non è esattamente così. Il fatto è invece che questo procedimento, a differenza del primo, può essere facilmente generalizzato al caso di un numero n anche molto grande di prove e di un numero qualunque k di volte (con $k \leq n$) in cui un dato evento deve verificarsi. Basta ripetere il procedimento medesimo, mettendo n al posto di 5 e k al posto di 3, con un’unica condizione imprescindibile: che l’esperimento, effettuato sempre nelle stesse condizioni, dia luogo a due soli eventi, E e \bar{E} , il primo di probabilità p ed il secondo di probabilità $q=1-p$. Ebbene, la probabilità p_k che, su n prove ripetute nelle stesse condizioni, l’evento E si manifesti k volte è:

² Questo paragrafo è opzionale per l’Istituto Tecnico, settore Economico.

$$[4] \quad p_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Questa formula, ottenuta generalizzando la [3], risolve quello che comunemente si chiama **problema delle prove ripetute**.

79.3.3 Consideriamo adesso un esperimento tale che, in n prove ripetute nelle medesime condizioni, ciascuna modellabile con una variabile aleatoria di Bernoulli di parametro p , l'evento E si presenti k volte, per cui la sua probabilità è il valore p_k dato dalla [4]. Indicata con B la funzione che al numero k associa la probabilità che l'evento E si presenti k volte in tale esperimento e che indichiamo con $P[B=k]$, si ha pertanto:

$$P[B = k] = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Allora, in corrispondenza degli $n+1$ valori interi di k crescenti da 0 ad n si hanno i seguenti $n+1$ valori di $P[B=k]$:

$$\binom{n}{0} p^0 q^n, \binom{n}{1} p^1 q^{n-1}, \binom{n}{2} p^2 q^{n-2}, \dots, \binom{n}{n-2} p^{n-2} q^2, \binom{n}{n-1} p^{n-1} q^1, \binom{n}{n} p^n q^0.$$

Se la somma di questi numeri, vale a dire $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, fosse uguale ad 1 la funzione B sarebbe una variabile aleatoria. Di fatto, ricordando lo sviluppo del binomio di Newton, ossia: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$, possiamo scrivere: $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p+q)^n$ e siccome $p+q=1$, questa somma vale per l'appunto 1. Concludiamo pertanto che la funzione B è effettivamente una variabile aleatoria.

La funzione B tale che:

$$P[B = k] = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad (q=1-p)$$

è detta **variabile aleatoria binomiale** di ordine n e di parametro p .

Si è soliti indicarla con la scrittura: $B(n, p)$ o, se c'è luogo a confusione, con $\text{Bin}(n, p)$.

La sua distribuzione di probabilità, cioè il sistema degli $n+1$ numeri:

$$\binom{n}{0} p^0 q^n, \binom{n}{1} p^1 q^{n-1}, \binom{n}{2} p^2 q^{n-2}, \dots, \binom{n}{n-2} p^{n-2} q^2, \binom{n}{n-1} p^{n-1} q^1, \binom{n}{n} p^n q^0,$$

generato dall'espressione $\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, quando a k si attribuiscono successivamente i valori interi da 0 ad n , si chiama **distribuzione binomiale** (o anche **distribuzione bernoulliana**⁽³⁾).

Sostanzialmente, una distribuzione binomiale (o di Bernoulli) è una funzione che definisce la probabilità che un evento casuale si verifichi un certo numero k di volte quando un esperimento è eseguito un numero n di volte ($n \geq k$), a condizione che in ogni ripetizione dell'esperimento l'evento elementare abbia la stessa probabilità p di accadere e ovviamente probabilità $q=1-p$ di non accadere. Ognuna delle ripetizioni dell'esperimento è chiamata "prova di Bernoulli".

79.3.4 Può essere interessante la rappresentazione cartesiana della [4], il cui grafico è evidentemente costituito da $n+1$ punti isolati, dei quali uno disposto sul semiasse positivo delle ordinate (quello corrispondente al valore $k=0$) e gli altri collocati nel primo quadrante.

Disegniamo (Fig. 3) il grafico quando $n=7$ e $p=1/2$. Sei invitato a costruirlo in altri casi, come

³ Prende il nome da Jakob Bernoulli.

$n=2,3,4,5,6$ sempre con $p=1/2$.

Constaterai che in tutti questi casi (nei quali, lo ripetiamo, $p=0,5$) la rappresentazione cartesiana della [4] presenta una simmetria assiale rispetto alla retta di equazione $x=n/2$: si dice che la distribuzione di probabilità è *simmetrica*.

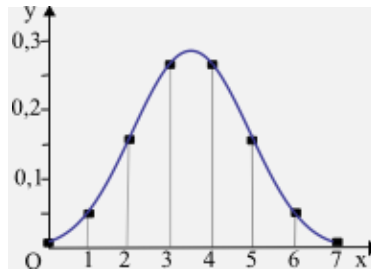


FIG. 3

Se invece $p \neq 0,5$ la distribuzione di probabilità è *asimmetrica*. Precisamente si ha una *asimmetria destra* se $p < 0,5$ (Fig. 4, dove $p=0,2$ ed $n=10$) ed una *asimmetria sinistra* se $p > 0,5$ (Fig. 5, dove $p=0,8$ ed $n=10$).

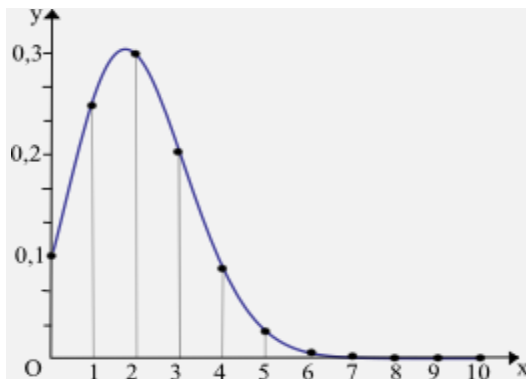


FIG. 4

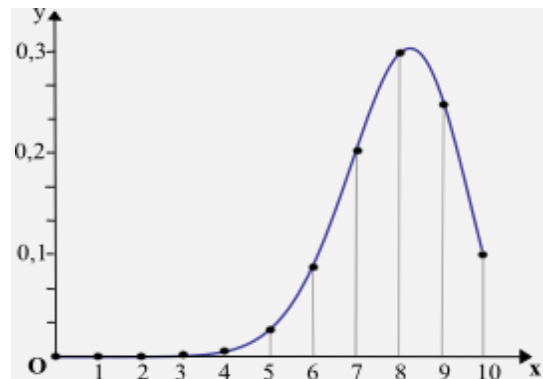


FIG. 5

In generale una distribuzione di probabilità si dice *simmetrica* se esiste una retta rispetto alla quale il grafico che la rappresenta è per l'appunto simmetrico. Altrimenti si dice *asimmetrica*. In particolare si ha una *simmetria destra* (o *positiva*) se il grafico presenta una coda che si allunga verso destra e si ha una *asimmetria sinistra* (o *negativa*) se il grafico presenta una coda che si allunga verso sinistra.

ESERCIZI.

- Rappresenta graficamente la distribuzione di probabilità di ciascuna delle seguenti variabili aleatorie binomiali:
 - nel lancio di un dado, ripetuto 5 volte, esce un numero maggiore di 2;
 - nell'estrazione di un numero della tombola, ripetuto 6 volte, esce un divisore di 90;
 - nel lancio di due dadi, ripetuto 6 volte, escono due numeri la cui somma non è minore di 5;
 - da un'urna contenente 24 palline, tra cui 7 bianche e 5 nere, se ne estraggono due entrambe bianche o entrambe nere, senza reinserimento. L'esperimento è ripetuto 7 volte;
 - una ditta produce pezzi di ricambio per automobili con un procedimento che provoca il 2% di pezzi difettosi. Su 7 pezzi, presi a caso, 1 è difettoso.
- Piero si trova tra le mani un questionario formato da 30 quesiti a scelta multipla, ciascuno con 4 alternative, di cui una sola è corretta. Purtroppo è scritto in tedesco e Piero non ci capisce niente. Decide

ugualmente di dare le risposte, ma in modo del tutto casuale. La tabella 2 mostra le probabilità approssimate che ha Piero di indovinare determinati numeri di risposte corrette.

- Verifica la correttezza di qualcuno dei risultati forniti dalla tabella.
- Calcola la probabilità che ha Piero di indovinare al più 7 risposte corrette.
- Calcola la probabilità che ha Piero di indovinare non meno di 10 risposte corrette.

Numero risposte corrette	Probabilità %	Numero risposte corrette	Probabilità %	Numero risposte corrette	Probabilità %
0	0,018	6	14,546	12	2,906
1	0,179	7	16,624	13	1,341
2	0,863	8	15,931	14	0,543
3	2,685	9	12,981	15	0,193
4	6,042	10	9,087	16	0,060
5	10,473	11	5,507	17	0,017

La probabilità di indovinare un numero di risposte superiore a 17 è 0,004%.

Tab. 2

79.3.5 Per calcolare la media $M(B)$ e la deviazione standard $\sigma(B)$ della variabile aleatoria binomiale $B(n,p)$ si potrebbe ricorrere alla definizione ma è preferibile utilizzare due formule apposite, le seguenti:

$$M(B) = np, \quad \sigma(B) = \sqrt{npq}.$$

Sorvoliamo sulla loro dimostrazione⁽⁴⁾, ma un esempio s'impone.

- ESERCIZIO.** Supponi di dover rispondere ad un questionario formato da 30 quesiti a scelta multipla, ciascuno con 5 alternative ed una sola risposta corretta. Decidi di scegliere le risposte a caso. A quanti quesiti mediamente pensi di aver risposto correttamente?

RISOLUZIONE. La scelta di rispondere a caso ai 30 quesiti implica che per ogni quesito hai probabilità $p=1/5$ di rispondere correttamente. Si tratta dunque di calcolare la media della variabile binomiale $B(30, 1/5)$. Risulta evidentemente: $M(B)=30 \cdot (1/5)=6$. Pertanto, con la scelta delle risposte casuali, in media si

risponde correttamente a 6 quesiti. La deviazione standard è: $\sigma(B)=\sqrt{30 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}} \approx 2,19$.

- ESERCIZIO DA RISOLVERE.** Giacomo è alle prese con un test formato da 30 quesiti a scelta multipla, ciascuno con 4 alternative di risposta, di cui una ed una soltanto è corretta. Giacomo sa che ad ogni risposta corretta corrisponde il punteggio 3, ad ogni risposta errata il punteggio -1 e ad ogni risposta non data il punteggio 0.

- A 10 quesiti Giacomo sa dare la risposta corretta.
- Riguardo ad altri 10 quesiti non sa individuare l'alternativa corretta, ma è certo che 2 delle 4 alternative sono errate. Decide di scegliere a caso fra le altre 2 alternative.
- Per 6 dei rimanenti 10 quesiti non sa qual è l'alternativa corretta, ma è certo che una di esse è errata. Decide di scegliere a caso fra le altre 3.
- Sui rimanenti 4 quesiti non sa proprio che pesci pigliare, ma decide ugualmente di sceglierne una a caso. Quale punteggio Giacomo si aspetta di ottenere? [R. 42]

79.3.6 Un esercizio per riepilogare.

⁴ Chi avesse comunque interesse a conoscere queste dimostrazioni può consultare, gratuitamente e su questo medesimo sito, la cartella "Integrazione 2", file "Integrazione 2 – Unità 28-88", N° 23.

• **ESERCIZIO.** Si ripete per 40 volte l'esperimento di lanciare due dadi con le facce numerate da 1 a 6, aventi la stessa probabilità di uscire. Calcolare:

- quante volte escono, in media, due facce la cui somma è 7;
- la probabilità che per 5 volte la somma dei due numeri sia 7;
- la probabilità che la somma sia 7 per 5 volte al più;
- la probabilità che la somma sia 7 per più di 5 volte;
- la probabilità che la somma sia 7 per un numero di volte compreso fra 3 e 10, estremi inclusi.

RISOLUZIONE. Nel lancio di due dadi si possono presentare 36 casi, in 6 dei quali la somma dei due numeri usciti è 7. Pertanto la probabilità che, in un lancio, esca la somma 7 è: $p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

a) Il numero delle volte in cui, mediamente in $n=40$ lanci, la somma dei due numeri è 7 è:

$$M = np = 40 \cdot \frac{1}{6} \approx 6,67.$$

b) La probabilità che, in 40 lanci, la somma sia 7 esattamente per 5 volte è:

$$P[B=5] = \binom{40}{5} \left(\frac{1}{6}\right)^5 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{40-5} \approx 14,32\%.$$

c) La probabilità che, in 40 lanci, la somma sia 7 per 5 volte al più è:

$$P[B \leq 5] = \sum_{k=0}^5 \binom{40}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{40-k} \approx 32,39\%.$$

d) La probabilità che, in 40 lanci, la somma 7 esca per più di 5 volte è l'opposta di quella che esca al più 5 volte e perciò:

$$P[B > 5] = 1 - P[B \leq 5] \approx 1 - 0,3239 \approx 67,61\%.$$

e) La probabilità che, in 40 lanci, la somma 7 esca un numero di volte compreso fra 3 e 10 inclusi è:

$$P[3 \leq B \leq 10] = \sum_{k=3}^{10} \binom{40}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{40-k} \approx 91,43\%.$$

Ci sembra doveroso precisare che tutti i precedenti risultati sono stati ottenuti utilizzando uno strumento di calcolo automatico o, per meglio dire, un idoneo software matematico.

79.4 DISTRIBUZIONI DISCRETE E DISTRIBUZIONI CONTINUE

79.4.1 La variabile aleatoria di Bernoulli e la variabile aleatoria binomiale sono esempi di **variabili aleatorie discrete**. Così come è una variabile aleatoria discreta la variabile uniforme definita in 79.2.2. Più precisamente sono variabili aleatorie *finite* dal momento che i valori assunti da tali variabili costituiscono un insieme finito. Le loro distribuzioni sono chiamate **distribuzioni discrete**.

Si parla ancora di variabile aleatoria discreta e di distribuzione discreta se l'insieme dei valori che la variabile assume è un insieme *infinito numerabile* ⁽⁵⁾.

Un esempio è costituito dalla variabile $G(p)$, di parametro p (con $0 \leq p \leq 1$) tale che:

$$P[G = n] = p(1-p)^{n-1},$$

la quale ha come modello reale:

la probabilità che un evento, avente probabilità p di verificarsi, si verifichi esattamente alla n -esima prova dopo $n-1$ insuccessi.

⁵ Ricordiamo che un insieme infinito si dice *numerabile* se può essere messo in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri naturali.

Che si tratti di una variabile aleatoria è giustificato dal fatto che $\sum_{k=1}^{\infty} (p(1-p)^{k-1}) = 1$. Cosa che si dimostra facilmente dopo aver constatato che $\sum_{k=1}^{\infty} (p(1-p)^{k-1})$ è la somma di infiniti termini in progressione geometrica di primo termine p e ragione $1-p$. Anzi, è proprio in base a questo fatto che la variabile si chiama **variabile aleatoria geometrica** (di parametro p). La sua distribuzione (Fig. 6), $p(n) = P[G=n]$, si chiama **distribuzione geometrica**.

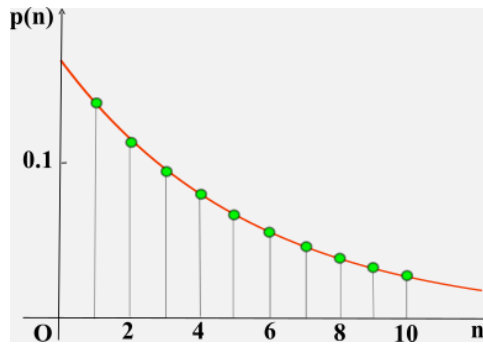


FIG. 6

Il valor medio $M(G)$ e la deviazione standard $\sigma(G)$ di una variabile aleatoria geometrica G di parametro p sono dati dalle formule seguenti:

$$M(G) = \frac{1}{p}, \quad \sigma(G) = \frac{\sqrt{1-p}}{p}.$$

Noi non ne proponiamo la dimostrazione, ma se qualcuno vuole cimentarsi su quella della prima formula (la dimostrazione della seconda è molto più complessa) può essergli utile un suggerimento. Precisamente, tenendo presente la precedente formula [2], si ha:

$$M(G) = \sum_{n=1}^{\infty} np(1-p)^{n-1}.$$

E da qui in avanti la dimostrazione diventa un interessante esercizio sulle progressioni geometriche ⁽⁶⁾.

Chiudiamo con la distribuzione geometrica, proponendoti un paio di esercizi e sono gli unici su quest'argomento. Non ce ne saranno altri nella sezione "verifiche".

1. Si lancia più volte una moneta le cui facce hanno la stessa probabilità di uscire.
 - a) Qual è la probabilità che la faccia "testa" esca al 4° lancio per la prima volta?
 - b) Qual è, mediamente, il numero di lanci che bisogna effettuare affinché esca "testa"?
 - c) Qual è la probabilità che la faccia "testa" esca al 4° lancio sapendo che non è uscita nei tre lanci precedenti?
 - d) Qual è la probabilità che la faccia "testa" esca almeno una volta nei primi 4 lanci?

[R. a) $\frac{1}{16}$; b) 2; c) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{15}{16}$]
2. Si lanciano più volte due dadi con le facce numerate da 1 a 6 aventi la stessa probabilità di uscire.
 - a) Qual è la probabilità che la somma dei due numeri usciti sia uguale a 6 al 3° lancio per la prima volta?
 - b) Qual è, mediamente, il numero di lanci che bisogna effettuare affinché esca la somma 6?
 - c) Qual è la probabilità che la somma 6 esca al 3° lancio sapendo che non è uscita nei due lanci prece-

⁶ Vedere precedente nota 4.

denti?

d) Qual è la probabilità che la somma 6 esca almeno una volta nei primi 3 lanci?

[R. a) $\approx 10,29\%$; b) 7,2; c) $\approx 13,88\%$; d) $\approx 36,14\%$]

79.4.2 Una variabile aleatoria si dice dunque **discreta** se l'insieme dei suoi valori è un insieme finito o infinito numerabile.

Ebbene, assieme alla distribuzione di probabilità di una variabile aleatoria discreta X si può prendere in considerazione anche la cosiddetta **funzione di ripartizione** (detta anche **funzione di probabilità cumulata** o **funzione di distribuzione di probabilità** o semplicemente **funzione di probabilità**) di X . Essa è la funzione $F(x)$ tale che:

$$F(x) = P[X \leq x], \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

vale a dire la funzione che ad ogni x reale associa la probabilità che la variabile aleatoria X assuma un valore che non supera x . Si tratta di una funzione definita da \mathbb{R} verso $[0,1]$, non decrescente e continua a destra. Si ha inoltre che $F(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow -\infty$ ed $F(x) \rightarrow 1$ per $x \rightarrow +\infty$.

Per esempio, se la variabile aleatoria X è l'esito del lancio di un dado, le cui facce, numerate da 1 a 6, hanno la stessa probabilità di uscire (e la cui distribuzione è stata rappresentata in figura 2), la funzione di ripartizione di X è la funzione $F(x)$ tale che (Fig. 7):

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{[x]}{6} & \text{se } 1 < x \leq 6 \\ 1 & \text{se } x > 6 \end{cases}$$

dove $[x]$ rappresenta la parte intera di x .

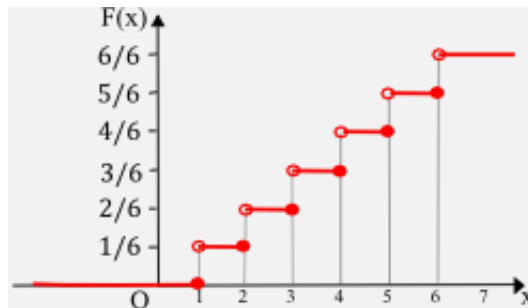


FIG. 7

79.4.3 Una variabile aleatoria si dice invece **continua** se l'insieme dei valori che essa può assumere si identifica con l'insieme \mathbb{R} dei numeri reali.

Se X è una variabile aleatoria continua anche la sua distribuzione di probabilità si dice **continua**. In questo caso svolge un ruolo decisivo una nuova funzione, chiamata **funzione di densità di probabilità** di X . Essa è la funzione $p(x)$ tale che, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$p(x) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1.$$

Questo significa evidentemente che la funzione $p(x)$ è collocata interamente nel semipiano $y \geq 0$ e l'area T sottesa dal suo grafico è uguale ad 1 (Fig. 8).

Una variabile aleatoria continua può assumere un numero infinito di valori, per cui la probabilità che ne assuma uno specifico è 0. Il che però non significa che l'evento sia impossibile, ma solo che la sua

probabilità è 0. Nel caso di una variabile aleatoria continua non ha perciò senso calcolare la probabilità che essa assuma un determinato valore.

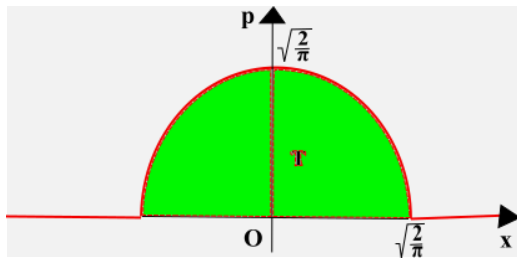


FIG. 8

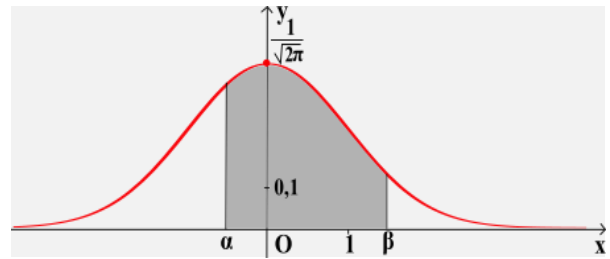


FIG. 9

Ha senso invece il calcolo della probabilità che la variabile assuma un qualsiasi valore entro un determinato intervallo. Ebbene, la probabilità $P[\alpha \leq X \leq \beta]$ che la variabile aleatoria X di densità di probabilità $p(x)$ assuma un valore qualsiasi compreso nell'intervallo $[\alpha, \beta]$ è data dall'area sotto il grafico di $p(x)$ relativa a tale intervallo (Fig. 9). Vale a dire:

$$P[\alpha \leq X \leq \beta] = \int_{\alpha}^{\beta} p(x) dx.$$

Come per le variabili aleatorie discrete anche per quelle continue si parla di valor medio e deviazione standard. Non forniamo le formule che permettono di risalire a tali indici e ci limiteremo a comunicare i loro valori nei casi particolari che prenderemo in esame.

79.4.4 Forniamo due esempi particolari di variabili aleatorie continue.

- Un primo esempio è costituito dalla variabile aleatoria *uniforme*. Precisamente, una variabile aleatoria continua si dice *uniforme* (o *distribuita uniformemente*) se la sua funzione di densità di probabilità $p(x)$ è tale che (Fig. 10):

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{se } x \in [a, b] \\ 0 & \text{se } x \notin [a, b] \end{cases}$$

È semplice constatare che sono soddisfatte entrambe le condizioni per le quali si può parlare di variabile aleatoria continua.

Il valor medio e la deviazione standard di tale variabile aleatoria X sono rispettivamente⁽⁷⁾:

$$M(X) = \frac{a+b}{2}, \quad \sigma(X) = \frac{\sqrt{3}}{6} (b-a).$$

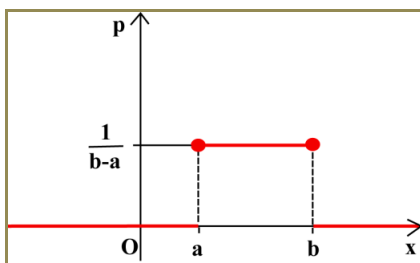


FIG. 10

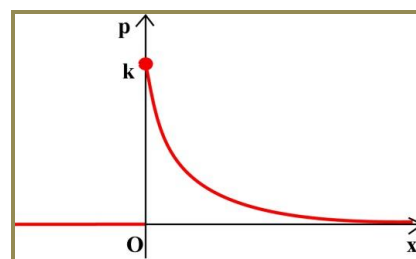


FIG. 11

⁷ Vedere precedente nota 4.

- Un altro esempio di variabile aleatoria continua è costituito dalla **variabile aleatoria esponenziale**. È definita così la variabile aleatoria, la cui densità di probabilità $p(x)$ è tale che (Fig. 11):

$$p(x) = \begin{cases} k e^{-kx} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad (k > 0).$$

È semplice constatare che è soddisfatta la prima delle due condizioni per le quali si può parlare di variabile aleatoria continua. La verifica della seconda condizione non è immediata, ma neppure troppo complicata: la lasciamo a te per esercizio.

Il valor medio e la deviazione standard di tale variabile aleatoria coincidono⁽⁸⁾ con il valore $1/k$.

- 79.4.5** Anche di una variabile aleatoria continua X si può definire la **funzione di ripartizione** (o **funzione di probabilità cumulata** o **funzione di distribuzione di probabilità** o semplicemente **funzione di probabilità**), esattamente come per le variabili aleatorie discrete. Vale a dire:

$$F(x) = P[X \leq x], \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

dove adesso $P[X \leq x] = \int_{-\infty}^x p(x) dx$, essendo $p(x)$ la densità di probabilità di X .

Si tratta pur sempre di una funzione definita da \mathbb{R} verso $[0,1]$, non decrescente e continua. Si ha inoltre che $F(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow -\infty$ ed $F(x) \rightarrow 1$ per $x \rightarrow +\infty$.

Per esempio, con riferimento alla variabile aleatoria uniforme, una volta constatato che si ha:

$$\int_{-\infty}^a p(x) dx = 0, \quad \int_{-\infty}^x p(x) dx = \frac{x-a}{b-a}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1,$$

la funzione di ripartizione di questa variabile aleatoria è la funzione $F(x)$ tale che (Fig. 12):

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{se } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{se } x > b \end{cases}$$

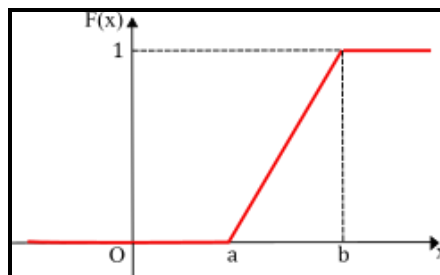


FIG. 12

- 79.4.6** Concludiamo queste brevi considerazioni sulla distribuzione continua con alcuni semplici esercizi che ti invitiamo a risolvere. Sono gli unici che ti proponiamo al riguardo. Non ne troverai altri nella sezione “verifiche”, che sarà completamente dedicata alle variabili discrete.

- 1) Misurando un’asticella con un “metro” graduato in millimetri (mm), si trova una lunghezza compresa fra 810 mm e 811 mm. Se si assume come misura dell’asticella il valore mediano 810,5 mm, l’errore che si commette è una variabile aleatoria distribuita con densità di probabilità uniforme $p(x)$ tale che: $p(x) = k$ se $-0,5 \text{ mm} \leq x \leq 0,5 \text{ mm}$ mentre $p(x) = 0$ se $x < -0,5 \text{ mm}$ oppure $x > 0,5 \text{ mm}$. Calcolare:
- la costante k , il valor medio della variabile aleatoria e la deviazione standard;
 - la probabilità che la misura dell’asticella sia compresa fra 810,2 mm e 810,6 mm;

⁸ Vedere precedente nota 4.

c) la probabilità che la misura dell'asticella sia minore di 810,5 mm.

[R. a) $k=1$, $M(X)=0$, $\text{dev}(X)\approx 0,288$; b) 40%; c) 50%]

2) Un orologio con lancette è caricato a pila elettrica. Quando questa si consuma le lancette si fermano. Sia la posizione in cui si ferma la lancetta dei minuti sia quella in cui si ferma la lancetta delle ore sono variabili aleatorie distribuite con densità di probabilità uniforme $p(x)$ tale che: $p(x)=k$ se $x\in[0,2\pi]$, $p(x)=0$ se $x\notin[0,2\pi]$. Calcolare:

- la costante k , il valor medio della variabile aleatoria e la deviazione standard;
- la probabilità che la lancetta dei minuti si fermi in una posizione fra 15 minuti e 16 minuti;
- la probabilità che la lancetta delle ore si fermi fra le ore 3 e le ore 4;
- la probabilità che la lancetta delle ore si fermi fra le 10 e le 12 e, nel medesimo tempo, la lancetta dei minuti si fermi fra 15 minuti e 25 minuti.

[R. a) ..., $M(X)=\pi$, $\text{dev}(X)\approx 1,813$; b) $1/60$; c) $1/12$; d) $1/36$]

3) Una variabile aleatoria è distribuita con densità di probabilità $p(x)$ tale che: $p(x)=e^{-x}$ se $x\geq 0$ e $p(x)=0$ se $x<0$. Calcolare la probabilità che essa assuma un valore qualsiasi minore di un generico x , con $x>0$.

[R. $P[X\leq x] = 1-e^{-x}$]

4) Una variabile aleatoria X è distribuita con densità di probabilità $p(x)$ tale che:

$$p(x) = \begin{cases} kx & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ -kx + 2k & \text{se } 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{se } x < 0 \text{ oppure } x > 2 \end{cases}$$

dove k è un numero reale positivo. Dopo aver trovato il valore di k , fornire una rappresentazione grafica di $p(x)$. Calcolare quindi la probabilità che X assuma un valore qualsiasi maggiore di $1/2$.

[R. $k=1$; $7/8$]

5) Una variabile aleatoria X è distribuita con densità di probabilità $p(x)$ tale che:

$$p(x) = \begin{cases} 1/4 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ k & \text{se } 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{se } x < 0 \text{ oppure } x > 2 \end{cases}$$

dove k è un numero reale positivo. Dopo aver trovato il valore di k , fornire una rappresentazione grafica di $p(x)$. Calcolare quindi la probabilità che X assuma un valore qualsiasi minore di $3/2$.

[R. $k=3/4$; $5/8$]

6) Sia data la funzione:

$$f(x) = \frac{a}{x^2 + 1}$$

dove a è un parametro reale. Dimostrare che per un solo valore di a essa rappresenta la densità di probabilità di una variabile aleatoria e rappresentare $f(x)$ per tale valore di a .

[R. $a=1/\pi$]

7) Sia data la funzione:

$$f(x) = \frac{a}{(x^2 + 1)^2}$$

dove a è un parametro reale. Dimostrare che per un solo valore di a essa rappresenta la densità di probabilità di una variabile aleatoria e rappresentare $f(x)$ per tale valore di a .

[R. Per il calcolo dell'integrale si suggerisce la sostituzione $x = \tan z$; $a=2/\pi$]

8) Sia data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} kx - \frac{3}{2}x^2 & \text{se } x \in [0,1] \\ 0 & \text{se } x \notin [0,1] \end{cases}$$

essendo k un parametro reale. Dimostrare che per un solo valore di k essa rappresenta la densità di probabilità di una variabile aleatoria e rappresentare $f(x)$ per questo valore di k . Indicata con X tale variabile

le, calcolare:

$$\text{a) } P\left[0 \leq X \leq \frac{1}{2}\right], \quad \text{b) } P\left[X > \frac{1}{3}\right].$$

[R. $k = 3$; a) $1/8$, b) ...]

9) Fornire un modello di distribuzione uniforme discreta ed un modello di distribuzione uniforme continua.

VERIFICHE

Variabile aleatoria (nn. 1-16).

1. Si lanciano due solidi a forma di tetraedro regolare, con le facce numerate da 1 a 4. Tutte le facce hanno la stessa probabilità di uscire. Dopo aver spiegato perché la funzione X che ad ogni lancio associa la somma dei numeri usciti è una variabile aleatoria, calcolare la probabilità che la somma dei due numeri usciti sia:

a) minore di 4; b) compresa fra 3 e 5 inclusi; c) non minore di 6.

Calcolare inoltre la media e la deviazione standard di tale variabile aleatoria.

2. Si lanciano due solidi, uno a forma di cubo con le facce numerate da 1 a 6 e l'altro a forma di tetraedro regolare con le facce numerate da 1 a 4. Si consideri la funzione X che ad ogni lancio associa la somma dei due numeri usciti. Posto che gli eventi in esame siano equiprobabili, spiegare perché la X è una variabile aleatoria. Calcolare quindi la probabilità che la somma dei due numeri usciti sia:

a) minore di 5; b) compresa fra 5 e 8 inclusi; c) maggiore di 8.

Calcolare inoltre la media e la deviazione standard di tale variabile aleatoria.

3. Si estrae uno dei 90 numeri della Tombola. Si consideri la relazione X che ad ogni estrazione associa il valore del numero estratto se questo è un divisore di 90 ed il valore 0 in caso contrario. Dopo aver spiegato perché la X è una variabile aleatoria, calcolare la probabilità che la f assuma un valore:

a) non maggiore di 40; b) compreso fra 50 e 80 inclusi; c) maggiore di 30.

4. Sia X una variabile aleatoria e c una costante positiva. Si indichi con cX la variabile i cui valori si ottengono moltiplicando per c i corrispondenti valori di X . Si dimostri che anche cX è una variabile aleatoria e che risulta:

$$M(cX) = c M(X), \quad \sigma(cX) = c \sigma(X).$$

5. Sia X una variabile aleatoria e c una costante. Si indichi con $X+c$ la variabile i cui valori si ottengono sommando c ai corrispondenti valori di X . Si dimostri che $X+c$ è una variabile aleatoria e che risulta:

$$M(X+c) = M(X) + c, \quad \sigma(X+c) = \sigma(X).$$

6. Sia X una variabile aleatoria. Si indichi con X^2 la variabile i cui valori si ottengono elevando al quadrato i corrispondenti valori di X . Si dimostri che X^2 è una variabile aleatoria. Si giustifichi poi che, in genere, risulta: $M(X^2) \neq [M(X)]^2$. [R. Basta un esempio]

7. Sia X una variabile aleatoria. Dimostrare la seguente formula: $\sigma^2(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$. Dedurne, come applicazione, che la varianza della variabile aleatoria di Bernoulli di parametro p vale $p(1-p)$.

[R. Posto per comodità $M(X) = \mu$, si ha: $\sigma^2(X) = M[(X-\mu)^2] = M(X^2 - 2\mu X + \mu^2) = \dots$]

8. La variabile X è il punto ottenuto nel lancio di un dado con le facce numerate da 1 a 6, aventi la stessa probabilità di uscire. Calcolare la varianza di X ricorrendo alla definizione. Verificare poi che si ottiene lo stesso risultato calcolandola con la formula precedente. [R. $\text{Var}(X) \approx 2,91$]

9. In un sacchetto vi sono 15 palline, di cui 5 bianche. Il giocatore A estrae a caso una pallina e, senza

rimetterla nell'urna, ne estrae una seconda. Egli vince 300 euro se le due palline estratte sono entrambe bianche, perde 100 euro se non lo sono. Il gioco è equo? E se non lo è, è vantaggioso per il giocatore A o no?

10. Un'urna contiene 20 palline, di cui 5 bianche. Un giocatore estrae a caso una pallina e, dopo averla rimessa nell'urna, ne estrae una seconda. Egli punta 100 euro. Calcolare quanto dovrebbe guadagnare affinché il gioco sia equo, in ciascuna delle seguenti situazioni, nelle quali egli vince se: **a)** entrambe le palline estratte sono bianche; **b)** nessuna delle palline estratte è bianca; **c)** una ed una sola delle palline estratte è bianca.
11. Un'urna contiene 50 palline, delle quali 20 sono bianche, 18 nere e 12 rosse. Un giocatore estrae a caso una dopo l'altra tre palline e ogni volta la pallina estratta viene rimessa nell'urna. Egli punta 100 euro. Calcolare quanto dovrebbe guadagnare affinché il gioco sia equo, in ciascuna delle seguenti situazioni, nelle quali egli vince se: **1)** le tre palline estratte sono bianche; **2)** le tre palline estratte sono nere; **3)** almeno due delle palline estratte sono bianche. [R. ...; 3) €184]
12. Un'urna contiene 50 palline, delle quali 25 sono bianche, 15 nere e 10 rosse. Un giocatore estrae una dopo l'altra tre palline senza rimetterle nell'urna. Egli punta 100 euro. Calcolare quanto dovrebbe guadagnare affinché il gioco sia equo, in ciascuna delle seguenti situazioni, nelle quali egli vince se: **a)** le tre palline estratte sono nere; **b)** almeno due delle tre palline estratte sono nere; **c)** due e due soltanto delle tre palline estratte sono nere; **d)** la prima e la terza pallina sono rosse, la seconda no; **e)** le tre palline estratte sono dello stesso colore. [R. a) ...; b) € 374,6; c) € 433,3; d) ...; e) € 581,7]
13. Se il gioco del Lotto fosse equo (cosa che invece non è, poiché fortemente sbilanciato a favore dello Stato), calcolare quante volte lo Stato dovrebbe pagare la posta ad un giocatore che realizzasse: **a)** un singolo; **b)** un ambo; **c)** un terno; **d)** una quaterna; **e)** una cinquina.
[R. 1) 17; 2) 399,5; 3) 11.747; 4) 511.037; 5) 43.949.267]
14. Spiegare perché, nel seguente esperimento, la funzione X è una variabile aleatoria e calcolarne la media e la deviazione standard:
Nell'estrazione casuale di un numero della Tombola, X associa ad ogni numero estratto: il numero dei divisori di 10 se esso è pari e multiplo di 3; il numero dei divisori di 30 se è dispari e multiplo di 3; il numero dei divisori di 50 se è un numero primo diverso da 3; il numero dei divisori di 70 in ogni altro caso.
[R. 1/6, 1/6, 23/90, 37/90]
15. Idem per il seguente esperimento. Un'urna contiene 20 palline, di cui 6 bianche e 4 rosse. Si estrae a caso una pallina e, senza rimetterla nell'urna, se ne estrae una seconda. Pierino guadagna: 10 euro se le due palline estratte sono bianche; 20 euro se sono rosse; 15 euro se la prima è bianca e la seconda è rossa; 15 euro se la prima è rossa e la seconda è bianca. Egli perde invece la puntata, pari a 5 euro in ogni altro caso.
La funzione X associa ad ogni doppia estrazione il guadagno relativo (positivo se è una vincita, negativo se è una perdita) di Pierino.
16. Idem per il seguente esperimento. Nel gioco della Roulette (a 37 numeri, da 0 a 36: lo "0" è verde, 18 numeri sono rossi e 18 neri). Pierino punta una certa somma $3S$. Egli riscuote: S se esce uno dei 18 numeri rossi; $8S$ se esce uno dei primi 4 numeri neri; $36S$ se esce lo 0. In ogni altro caso perde la posta.
La funzione X associa ad ogni numero estratto il guadagno relativo di Pierino.

Distribuzioni di probabilità (nn. 17-20 – Si suggerisce l'uso di un foglio elettronico).

17. Le facce di un dado truccato, contrassegnate con i numeri da 1 a 6, escono con le probabilità qui sot-

to specificate:

faccia	1	2	3	4	5	6
probabilità	1/4	7/24	1/6	1/6	1/24	1/12

Spiegare perché la funzione, che ad ogni lancio del dado associa la probabilità che esca il numero che contrassegna la faccia uscita, è una variabile aleatoria. Fornire la rappresentazione grafica della sua distribuzione di probabilità e calcolarne la media e la deviazione standard. [R. ...; $\approx 2,7$; $\approx 1,5$]

18. Determinare la distribuzione di probabilità della variabile aleatoria, che associa ad ogni lancio di un dado il numero che contrassegna la faccia uscita (si suppone che le facce del dado siano numerate da 1 a 6 ed abbiano la stessa probabilità di uscire). Fornire la rappresentazione grafica della distribuzione trovata. Calcolarne inoltre la media e la deviazione standard. [R. ...; 3,5; $\approx 1,7$]
19. Con riferimento allo stesso dado descritto nell'esercizio n. 17, si consideri la funzione che ad ogni doppio lancio del dado associa la somma dei due numeri usciti. Dopo aver dimostrato che si tratta di una variabile aleatoria, fornire la rappresentazione grafica della sua distribuzione di probabilità e calcolarne la media e la deviazione standard.
20. Si lanciano tre monete "testa-croce", le cui facce hanno le medesime probabilità di uscire. Si consideri la funzione che ad ogni lancio associa il numero di "teste" uscite. Dopo aver spiegato perché si tratta di una variabile aleatoria, fornire la rappresentazione grafica della sua distribuzione di probabilità e calcolarne la media e la deviazione standard.

Distribuzione binomiale (nn. 21-36 – Si suggerisce l'uso di un idoneo software matematico).

21. Calcolare la probabilità che, in 100 lanci di un dado, la faccia contrassegnata dal numero "1" esca esattamente:
- a) 10 volte; b) 2 volte; c) 98 volte; d) 16 volte.
- Si suppone che le facce del dado, contrassegnate con i numeri da 1 a 6, abbiano la stessa probabilità di uscire.
- [R. a) $\approx 2,14\%$; b) $\approx 2,4 \cdot 10^{-4}\%$; c) $\approx 1,9 \cdot 10^{-7}\%$; d) $\approx 65,94\%$]
22. Calcolare la probabilità che, in 200 lanci di una moneta, la faccia "testa" esca esattamente:
- a) 100 volte; b) 50 volte; c) 150 volte; d) 10 volte.
- Si suppone che le facce della moneta abbiano la stessa probabilità di uscire.
- [R. a) $\approx 5,63\%$; b) $\approx 2,8 \cdot 10^{-11}\%$; c) ...; d) $\approx 1,4 \cdot 10^{-42}\%$]
23. Calcolare la probabilità che, in 50 lanci di una coppia di dadi, la somma dei numeri che compaiono sulle facce:
- a) per 5 volte sia uguale a 7; b) per 4 volte sia uguale a 10;
 c) per 6 volte sia uguale a 14; d) per una volta sia uguale a 12.
- Si suppone che le facce dei dadi, contrassegnate entrambe con i numeri da 1 a 6, abbiano la stessa probabilità di uscire.
- [R. a) $\approx 7,45\%$; b) $\approx 20,29\%$; c) $\approx 11,57\%$; d) $\approx 34,93\%$]
24. Per 50 volte si estrae a caso un numero della Tombola. Calcolare la probabilità che esso:
- a) per 12 volte sia un numero primo; b) per 25 volte sia un numero pari;
 c) per 30 volte sia un multiplo di 3; d) per 5 volte sia un divisore di 90.
- [R. a) $\approx 11,95\%$; b) $\approx 11,23\%$; c) $\approx 6,9 \cdot 10^{-3}\%$; d) $\approx 16,37\%$]
25. Rappresentare graficamente la distribuzione di probabilità della seguente variabile aleatoria binomiale:

- 1) Nel lancio di un dado “onesto”, ripetuto per 6 volte, esce un numero minore di 5.
 2) Nell'estrazione casuale di un numero della tombola, ripetuto per 5 volte, esce un multiplo di 7.
 3) Nel lancio simultaneo di due dadi “onesti”, ripetuto 8 volte, escono due numeri la cui somma non è minore di 5.
 4) Da un'urna contenente 20 palline, di cui 6 bianche e 5 nere, se ne estraggono a caso due entrambe bianche o entrambe nere. L'esperimento è ripetuto 7 volte.
 5) Una ditta fabbrica pezzi di ricambio per automobili con un procedimento che determina il 2,5% di pezzi difettosi. Su 60 pezzi, presi a caso, 1 è difettoso.
26. Con riferimento agli esperimenti dell'esercizio precedente, considerati nello stesso ordine, calcolare quante volte in media:
 1) esce un numero minore di 5;
 2) esce un multiplo di 7;
 3) escono due numeri la cui somma non è minore di 5;
 4) si estraggono due palline entrambe bianche o entrambe nere;
 5) su 60 pezzi, presi a caso, 1 è difettoso.
 Calcolare inoltre la deviazione standard della variabile aleatoria binomiale esaminata.
 [R. 1) 4; 0,35. 2) 0,78; 0,81. ...]
27. Due dadi “onesti” vengono lanciati simultaneamente 6000 volte. Calcolare quante volte, in media, escono due numeri la cui somma è almeno 10. Calcolare anche la deviazione standard della variabile aleatoria binomiale associata all'esperimento. [R. 1000; $\approx 28,87$]
28. Si consideri l'esperimento consistente nel lancio simultaneo di tre dadi con le facce numerate da 1 a 6, aventi la stessa probabilità di uscire.
 1. A) Giustificare che la relazione S, che ad ogni lancio associa la somma dei tre numeri usciti, è una variabile aleatoria.
 B) Fornire la rappresentazione grafica della distribuzione di probabilità di S.
 C) Determinare il risultato più atteso e la deviazione standard di S.
 2. A) Calcolare la probabilità p_k che, in 200 lanci, esca k volte la somma 10 e, in particolare, utilizzando un idoneo software matematico, ricavare:
 a) $P[S \leq 8]$, b) $P[4 \leq S \leq 10]$, c) $P[S > 8]$.
 B) Calcolare quante volte, in media su 200 lanci, esce la somma 10.
 [R. ... ; 2B) Bisogna tener presente che in un lancio (dei tre dadi) la somma 10 esce con probabilità $p = 27/216 = 1/8$, per cui ...]
29. Si supponga che sia il 20% la probabilità che una certa coppia di genitori abbia un figlio biondo. Quella coppia ha 5 figli. Calcolare la probabilità che: a) due figli (e due soltanto) siano biondi; b) almeno due figli siano biondi.
 Calcolare anche: c) il valore più probabile, d) la deviazione standard.
 [R. a) $\approx 25,6\%$; b) $\approx 26,3\%$; c) 1 figlio biondo; d) 0,89 figli biondi]
30. La probabilità che, in una data famiglia, una persona viva più di 70 anni è del 60%. Ammesso che quella famiglia sia composta da 8 persone, calcolare la probabilità che: a) la metà esatta dei componenti superi i 70 anni di età; b) non più della metà superi i 70 anni.
 Calcolare anche: c) il valore più probabile, d) la deviazione standard.
 [R. a) $\approx 23,2\%$; b) $\approx 40,6\%$; c) 4,8 persone; d) 1,4 persone]
31. Ad una classe di studenti viene somministrata una serie di 25 quesiti, ciascuno del tipo “scelta multipla a 4 alternative con una sola risposta esatta”. Uno studente decide di segnare a caso le risposte.

Calcolare la probabilità che egli fornisca: **a)** 12 risposte esatte; **b)** al più 7 risposte esatte. Calcolare anche: **c)** l'esito più probabile, **d)** la deviazione standard.

[R. a) $\approx 0,74\%$; b) $\approx 72,65\%$; c) 6,25 risposte esatte; d) 2,16 risposte esatte]

- 32.** Controlli accurati hanno mostrato che il 7% delle lampadine fabbricate da una ditta sono difettose. Posto che un acquirente compri 8 di quelle lampadine, calcolare la probabilità che: **a)** al più due di esse siano difettose; **b)** nessuna sia difettosa.

Calcolare inoltre: **c)** l'esito più probabile, **d)** la deviazione standard.

[R. a) $\approx 9,85\%$; b) $\approx 55,96\%$; c) 0,56 lampadine difettose; d) 0,72 lampadine difettose]

- 33.** La probabilità di trovare un analfabeta, in una certa comunità, è del 15%. Prendendo a caso 700 persone di quella comunità, calcolare la probabilità che gli analfabeti siano un numero:

a) minore di 100; **b)** compreso fra 100 e 120 inclusi.

[R. $p_a \approx 28,30\%$; $p_b \approx 66,45\%$]

- 34.** Un'urna contiene 30 palline, di cui 18 bianche. Si esegue il seguente esperimento per 200 volte: si estrae casualmente una pallina dall'urna e, senza rimettervela, se ne estrae una seconda. Calcolare la probabilità che le due palline estratte siano entrambe bianche per:

a) almeno 80 volte; **b)** al più 65 volte; **c)** non meno di 65 e non più di 75 volte.

[R. $p_a \approx 8,85\%$; $p_b \approx 23,77\%$; $p_c \approx 58,44\%$.]

- 35.** Su 100 studenti che s'iscrivono alla prima classe di una scuola secondaria di 2° grado, 30 non conseguono il diploma. Calcolare la probabilità che, prendendo a caso 120 studenti iscritti ad una di tali prime classi, di essi non conseguano il diploma:

a) almeno il 30%; **b)** al più 1/3 degli studenti;

c) non meno del 25% ma non più del 35%.

[R. $p_a \approx 53,44\%$; $p_b \approx 81,57\%$; $p_c \approx 80,51\%$]

- 36.** Da un'urna si estrae a caso uno dei 90 numeri della Tombola: se è pari si mette da parte, se è dispari si rimette nell'urna; quindi si estrae un secondo numero.

1. Calcolare la probabilità che:

A) entrambi i numeri estratti siano dispari;

B) il secondo numero estratto sia pari.

2. A) Per ognuna delle due situazioni calcolare il risultato più atteso e la deviazione standard.

3. Immaginando di ripetere 10 volte l'esperimento, calcolare la probabilità che:

A) non più di 3 volte entrambi i numeri estratti siano dispari;

B) almeno 5 volte il secondo numero estratto sia pari.

[R. 1A) 1/4, 1B) $\approx 49,719\%$; ...; 3A) $\approx 77,58\%$, 3B) $\approx 61,61\%$]

- 37.** C'è il fondato sospetto che una certa macchina produca pezzi difettosi. Per stabilire in quale percentuale sul totale dei pezzi prodotti, le maestranze decidono di controllare 100 pezzi scelti a caso e scoprono che 2 sono difettosi.

a) Quale percentuale di pezzi difettosi si può stimare che la macchina produca sul totale dei pezzi prodotti?

b) Qual è la probabilità che su 100 pezzi prodotti ne siano difettosi esattamente 2?

c) Qual è la probabilità che su 1000 pezzi prodotti ne siano difettosi 20?

d) Qual è la probabilità che su 100 pezzi prodotti ne siano difettosi più di 2?

[R. a) ...; b) $\approx 27,34\%$; c) $\approx 8,97\%$; d) $\approx 32,33\%$]

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

DOMANDE.

1. È vero che una variabile aleatoria è una funzione che assume valori del tutto casuali al variare della variabile indipendente?
2. È vero che, nel lancio di un dado, la funzione che associa il valore a all'uscita di un numero primo e il valore b all'uscita di un numero composto, è una variabile aleatoria?
3. È vero che la speranza matematica di una variabile aleatoria è la media aritmetica ponderata dei valori che essa assume quando si prendano come pesi le rispettive probabilità?
4. Quanto valgono la media e la varianza di una variabile aleatoria, suscettibile dei valori 1 e 0 con probabilità rispettivamente $1/5$ e $4/5$?
5. Nel gioco della ROULETTE (a 37 numeri da 0 a 36: lo "0" verde, 18 numeri sono rossi e 18 neri), se punto 10 euro sull'uscita del rosso e vinco, guadagno 10 euro. Il gioco è equo?
6. Quando un variabile aleatoria si dice uniforme?
7. Cos'è una distribuzione di probabilità?
8. Lancio tre monete e vinco se escono almeno due "teste". La probabilità che, in 10 lanci, vinca non più di 4 volte è: $0,5^{10} \sum_{k=0}^4 \binom{10}{k}$. È vero?
9. Ti viene somministrato un questionario formato da 40 quesiti a scelta multipla con 4 alternative, di cui una sola corretta. Per ogni quesito risolto correttamente ottieni 3 punti, per ogni quesito risolto in maniera errata ottieni -1 punti, per ogni risposta non data ottieni 0 punti. Tu decidi di rispondere a caso a tutte le domande, mentre il tuo compagno decide di non rispondere a nessuna domanda. È vero che il punteggio più probabile per te è lo stesso punteggio che verrà attribuito al tuo compagno?
10. Quando una distribuzione di probabilità si dice discreta? Quando continua? Fornisci qualche esempio di distribuzione continua.

RISPOSTE.

1. No. Una variabile aleatoria (o casuale) è una funzione che assume determinati valori x_i con determinate probabilità p_i tali che la somma di queste probabilità è 1.
2. No. In realtà un numero primo (2-3-5) esce con probabilità $3/6$ e un numero composto (4-6) esce con probabilità $2/6$ e la somma di queste due probabilità non è 1. In effetti è stata trascurata la possibilità che esca il numero "1", che non è primo né composto.
3. La risposta è affermativa. Infatti, ricordando che $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, si ha:

$$M(x) = \sum_{i=1}^n p_i x_i = \frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i}{\sum_{i=1}^n p_i}.$$
4. La media della variabile aleatoria B in esame è $M(B)=1/5$, mentre la varianza è $\text{Var}(B)=4/25$.
5. Poiché guadagno la stessa somma che punto, il gioco sarebbe equo se avessi uguali probabilità di vincere che di perdere. Considerato ora che nella roulette ci sono 37 numeri, 18 dei quali sono rossi e 18 neri, mentre lo "0" è verde, ho probabilità $18/37$ di vincere e probabilità $19/37$ di perdere. Quindi il gioco non è equo.
6. Una variabile aleatoria si dice uniforme se le sue determinazioni hanno le medesime probabilità. Si capisce che la somma delle probabilità delle determinazioni della variabile deve essere uguale ad 1 perché si possa parlare appunto di variabile aleatoria.

7. Distribuzione di probabilità di una variabile aleatoria X è l'insieme dei numeri p_1, p_2, \dots, p_n tali che la loro somma sia uguale ad 1, corrispondenti delle determinazioni x_1, x_2, \dots, x_n di X .
8. La probabilità che vinca in un lancio delle tre monete (cioè la probabilità che escano almeno due “teste”) è $1/2$. Quindi la probabilità che, in 10 lanci, vinca non più di 4 volte (ossia che vinca 0 volte oppure 1 volta o 2 volte o 3 volte o 4 volte) è:

$$\sum_{k=0}^4 \binom{10}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{10-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \sum_{k=0}^4 \binom{10}{k}.$$

La risposta alla domanda è dunque affermativa.

9. È così. Il tuo compagno, infatti, non rispondendo ad alcuna domanda, otterrà punteggio 0. Tu, rispondendo a caso, hai la probabilità di ottenere $\frac{1}{4} \cdot 40 = 10$ risposte esatte e, ovviamente, 30 risposte sbagliate. Dunque il tuo punteggio più probabile sarà $10 \times 3 + 30 \times (-1) = 0$.
10. Una distribuzione di probabilità di una variabile aleatoria X si dice *discreta* quando l'insieme dei valori che può assumere X è un insieme finito o infinito numerabile. Si dice invece *continua* quando tale insieme si identifica con l'insieme dei numeri reali. Un esempio di distribuzione continua è costituito dalla distribuzione continua uniforme; un altro esempio dalla distribuzione continua esponenziale.

COMPLEMENTI: PROBABILITÀ GEOMETRICHE E METODO MONTE CARLO ⁽⁹⁾

1. Quando parliamo di **probabilità geometrica** dobbiamo considerare un sistema di punti formanti una figura F (una superficie, una linea, un solido), di misura definita, all'interno della quale è contenuta un'altra figura F' , essa pure di misura determinata (anche nulla, eventualmente). Ebbene, scelto casualmente un punto della figura F , la probabilità p che esso appartenga alla figura F' è:

$$p = \frac{\text{misura di } F'}{\text{misura di } F}.$$

- ESEMPIO 1. Se la figura F è un dato cerchio ed F' è il quadrato inscritto in esso, indicato per comodità con r il raggio del cerchio, scelto a caso un punto di F , la probabilità che esso appartenga ad F' è:

$$p = \frac{\text{area quadrato}}{\text{area cerchio}} = \frac{(r\sqrt{2})^2}{\pi r^2} = \frac{2}{\pi} \approx 63,66\%.$$

- ESEMPIO 2. Se la figura F è un triangolo equilatero ed F' è uno dei suoi lati, indicata per comodità con L la lunghezza del lato del triangolo, scelto a caso uno dei punti del contorno del triangolo, la probabilità che esso appartenga al lato considerato è:

$$p = \frac{\text{lunghezza lato}}{\text{perimetro}} = \frac{L}{3L} = \frac{1}{3}.$$

- ESEMPIO 3. Se la figura F è un cubo ed F' è la sfera inscritta in esso, indicata per comodità con L la lunghezza dello spigolo del cubo, scelto a caso un punto del cubo, la probabilità che esso appartenga alla sfera è:

$$p = \frac{\text{volume sfera}}{\text{volume cubo}} = \frac{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{L}{2}\right)^3}{L^3} = \frac{\pi}{6} \approx 52,36\%.$$

Un esercizio per te, tratto dall'esame di Stato 2008, indirizzo scientifico sperimentale, sessione ordinaria:

⁹ Questo paragrafo è opzionale.

Siano dati un cono equilatero e la sfera in esso inscritta. Si scelga a caso un punto all'interno del cono. Si determini la probabilità che tale punto risulti esterno alla sfera.

2. Abbiamo avuto occasione in passato di proporci un problema, la cui soluzione può essere trovata “anche” seguendo un procedimento basato sulla probabilità geometrica. Riprendiamo questo problema, le cui formulazione e risoluzione sono attribuite al matematico francese **Émile Lemoine** (1840-1912).

• PROBLEMA. Disponi di un bastoncino. A caso lo dividi in tre parti. Qual è la probabilità che queste parti costituiscano i lati di un triangolo?

RISOLUZIONE. Indichiamo con a la lunghezza del bastoncino e con x ed y le lunghezze di due dei tre pezzi in cui esso è casualmente ripartito, la lunghezza del terzo pezzo è evidentemente $a-(x+y)$. Per la possibilità del problema deve risultare: $0 < x < a$, $0 < y < a$, $0 < x+y \leq a$.

Queste tre disequazioni individuano la superficie del triangolo colorata in figura 13.

I casi favorevoli al verificarsi dell'evento sono espressi dalle seguenti disequazioni:

$$x < y + (a - (x + y)), \text{ cioè: } x < \frac{a}{2}; \quad y < x + (a - (x + y)), \text{ cioè: } y < \frac{a}{2}; \quad a - (x + y) < x + y, \text{ cioè: } x + y > \frac{a}{2}.$$

Queste altre condizioni individuano il triangolino colorato fucsia di figura 14.

Il problema si traduce allora nei seguenti nuovi termini:

«Scelto a caso un punto del triangolo “giallo”,
quant'è la probabilità che esso sia interno al triangolo fucsia?»

Poiché il triangolo “fucsia” è la quarta parte del triangolo “giallo”, ne consegue che la probabilità cercata è:

$$p = \frac{1}{4}.$$

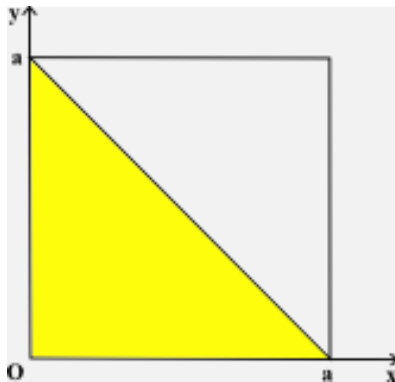


FIG. 13

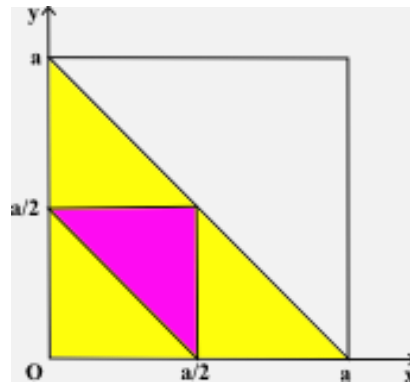


FIG. 14

3. Modifichiamo appena un po' l'enunciato del problema precedente, ottenendo un nuovo problema che pure si può risolvere con considerazioni di probabilità geometrica.

• PROBLEMA. Disponi di un bastoncino ed a caso lo dividi in due parti. Scelta a caso una delle due parti, la dividi a caso ancora in due parti. Qual è la probabilità che le tre parti in cui è stato diviso il bastoncino costituiscano i lati di un triangolo?

RISOLUZIONE (Indicazioni). Se dopo la prima suddivisione la scelta casuale cade sul pezzo più corto non c'è triangolo. Bisogna allora supporre che quella scelta (casuale) cada sul pezzo più lungo e ciò accade con probabilità $1/2$.

A questo punto indichiamo con a la lunghezza del bastoncino, con x la lunghezza del pezzo più lungo dopo la prima suddivisione e con y uno dei due pezzi il cui si è suddiviso casualmente il pezzo lungo x . Le tre parti in cui il bastoncino risulta diviso hanno quindi le seguenti lunghezze: $a-x$, y , $x-y$.

Per la possibilità del problema, in seguito alla scelta casuale del pezzo più lungo, deve risultare:

$$\frac{a}{2} < x < a, \quad 0 < y < x.$$

I casi favorevoli all'evento (esistenza del triangolo) sono tali che:

$$x > \frac{a}{2}, \quad y < \frac{a}{2}, \quad x - y < \frac{a}{2}.$$

Fatte le debite considerazioni, si trova che la probabilità dell'esistenza del triangolo, dopo la prima suddivisione, è $1/3$.

La probabilità dell'esistenza del triangolo è pertanto:

$$p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

4. In realtà, il primo problema di probabilità geometrica è stato il cosiddetto **problema dell'ago di Buffon**. Si tratta di una questione posta nel 1777 nell'opera *Essai d'Arithmétique morale* dal naturalista e matematico francese **Georges-Louis Leclerc**, conte di **Buffon** (1707-1788), ma risolta correttamente circa un secolo dopo.

• **PROBLEMA DELL'AGO DI BUFFON.** Sia dato in un piano un insieme di rette parallele equidistanti e sia D la distanza comune. Un "ago" di lunghezza assegnata L ($L < D$) viene fatto cadere "a caso" sul piano. Calcolare la probabilità che esso intersechi una delle rette dell'insieme dato.

Per esempio, in figura 15 sono rappresentate 5 situazioni: in 2 di esse l'ago interseca una retta, in 3 no.

RISOLUZIONE. Indichiamo con x l'angolo che l'ago forma con la direzione delle rette (evidentemente:

$0 \leq x < \pi$) e con y la distanza del punto medio M dell'ago dalla retta più vicina (ovviamente: $0 \leq y \leq D/2$ – Fig. 16). Detto per inciso, quando diciamo che l'ago cade a caso sul piano intendiamo affermare che x ed y sono valori casuali ed indipendenti.

Le possibili posizioni dell'ago, determinate dai valori x ed y , sono date dai punti interni ad un rettangolo di lati lunghi $\frac{D}{2}$ e π , la cui area A è evidentemente $\frac{\pi D}{2}$. Le posizioni dell'ago favorevoli al verificarsi dell'evento (l'ago incide una retta) sono quelle per cui risulta $0 \leq y \leq \frac{L}{2} \sin x$.

La situazione, rappresentata in figura 17, porta a concludere che la probabilità p cercata è uguale al rapporto fra l'area A' sotto il grafico della curva $y = \frac{L}{2} \sin x$, relativa all'intervallo $[0, \pi]$ e l'area A del rettangolo suddetto. L'area A' può essere calcolata con gli strumenti dell'analisi matematica e si trova:

$$A' = \int_0^{\pi} \frac{L}{2} \sin x \, dx = \frac{L}{2} [-\cos x]_0^{\pi} = L.$$

Pertanto risulta: $p = \frac{2L}{\pi D}$.

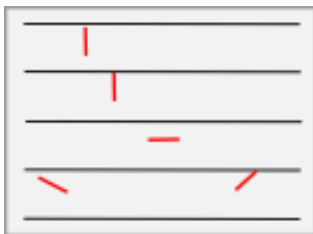


FIG. 15

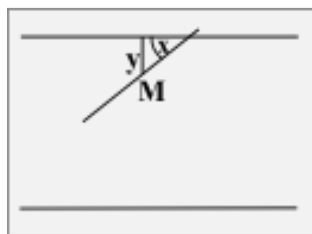


FIG. 16

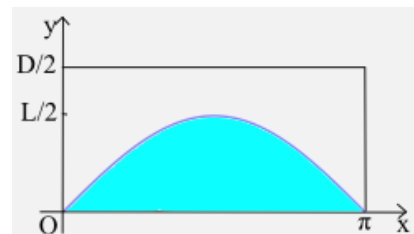


FIG. 17

5. Un altro problema interessante, la cui risoluzione può essere trovata ricorrendo alla probabilità geometrica è il seguente.

- **PROBLEMA DELL'INCONTRO**⁽¹⁰⁾. Due persone A e B si danno appuntamento in un dato posto fra le 12 e le 13; la prima attende 20 minuti poi se ne va. Che probabilità vi è che A e B si incontrino se essi arrivano a caso nell'ora fra le 12 e le 13 e i tempi di arrivo sono indipendenti, cioè se il tempo di arrivo di una persona non influenza in alcun modo quello dell'altra?

RISOLUZIONE. Siano allora x l'istante di arrivo di una delle due persone sul luogo dell'appuntamento ed y l'istante di arrivo dell'altra, entrambi compresi fra le ore 12 e le ore 13. Affinché l'incontro fra le due persone avvenga è necessario e sufficiente che risulti: $|x-y| \leq 20$ (MINUTI).

Ora tutte le possibilità sono espresse dai punti del quadrato Q rappresentato in figura 18, mentre le possibilità favorevoli all'evento sono espresse dai punti del quadrato tali che $-20 \leq x-y \leq 20$: punti che sono rappresentati dalla regione S .

Pertanto la probabilità p cercata è: $p = \frac{\text{area}(S)}{\text{area}(Q)} = \frac{60^2 - 40^2}{60^2} = \frac{5}{9}$.

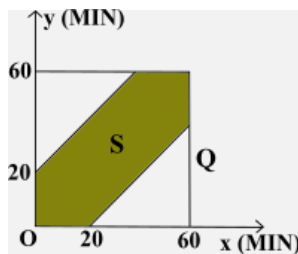


FIG. 18

6. Un problema di probabilità geometrica molto interessante è quello che è passato alla storia come “paradosso di Bertrand”, posto dal matematico francese **Joseph Louis François Bertrand** (1822-1900) nel suo libro *Calcul des probabilités* (1889). Il fatto degno di nota, per cui si parla di “paradosso”, è che Bertrand diede soluzioni diverse di questo problema e sembrava che fossero tutte “buone”: cosa che ovviamente creava sconcerto. Venne spiegato in seguito che non di soluzioni di uno stesso problema si trattava, bensì delle soluzioni di problemi diversi, per cui, in realtà, il paradosso non esiste. Ce ne vogliamo occupare a fondo. Incominciamo ad enunciare il problema e, di seguito, a descrivere le diverse soluzioni.

- **PROBLEMA: IL PARADOSSO DI BERTRAND.** Calcolare la probabilità che una corda, scelta casualmente in un cerchio, abbia lunghezza maggiore del lato del triangolo equilatero inscritto nel cerchio.

RISOLUZIONE. Indichiamo una volta per tutte con O il centro del cerchio e con r il suo raggio.

- **Soluzione 1.** La corda è determinata se si conosce il suo punto medio.

Si fissa allora un punto M del cerchio e si conduce per esso la corda AB perpendicolare al diametro passante per M (Fig. 17). Siccome il lato del triangolo equilatero inscritto nel cerchio ha distanza da O uguale ad $r/2$, la corda AB è più lunga del lato del triangolo se $OM < r/2$, vale a dire se il punto M è interno al cerchio concentrico a quello dato, ma avente raggio uguale ad $r/2$. In figura 19, la corda $A'B'$ è in posizione favorevole, la corda $A''B''$ non lo è. Pertanto la probabilità cercata è:

$$p = \frac{\text{area cerchio interno}}{\text{area cerchio esterno}} = \frac{\pi \left(\frac{r}{2}\right)^2}{\pi r^2} = \frac{1}{4}.$$

- **Soluzione 2.** La corda è determinata se si conosce un suo estremo.

Si fissa allora un punto A della circonferenza e si conduce per esso la retta t tangente al cerchio (Fig. 20). I due lati AP e AQ del triangolo equilatero inscritto nel cerchio e aventi come vertice comune A individuano,

¹⁰ Tratto da Boris V. Gnedenko, *Teoria della probabilità*, Roma, Editori Riuniti, ristampa 1987, pag. 36.

con la retta t , tre angoli uguali di ampiezza $\pi/3$. Solo se la corda AB è interna all'angolo $P\hat{A}Q$, risulta maggiore del lato del triangolo. In figura 18, la corda AB' è in posizione favorevole, la corda AB'' non lo è. Siccome la posizione favorevole si ha quando il punto B è un punto dell'arco PQ , la cui lunghezza è $2\pi r/3$, la probabilità cercata è:

$$p = \frac{\text{lunghezza arco } PQ}{\text{lunghezza circonferenza}} = \frac{\frac{2}{3}\pi r}{2\pi r} = \frac{1}{3}.$$

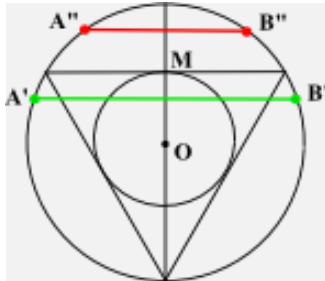


FIG. 19

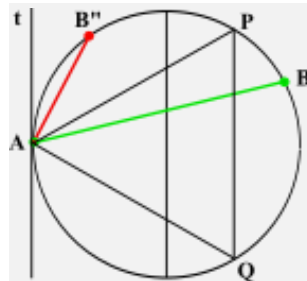


FIG. 20

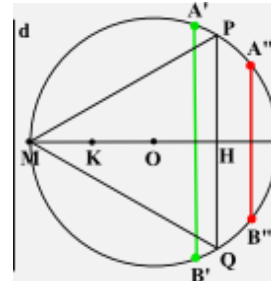


FIG. 21

- **Soluzione 3.** La corda è determinata se si conosce la sua direzione.

Si fissa allora una direzione d e si traccia il diametro MN perpendicolare ad essa. Nel triangolo equilatero MPQ , inscritto nel cerchio, sia H il punto medio di PQ e K il punto simmetrico di H rispetto ad O (Fig. 21). Sia inoltre C il punto in cui la corda AB interseca il diametro condotto per M . Solo se C è un punto interno al segmento HK , la corda AB è più lunga del lato del triangolo. In figura 19, la corda $A'B'$ è in posizione favorevole, la corda $A''B''$ non lo è. D'altro canto, HK è lungo quanto il raggio del cerchio. La probabilità cercata è pertanto:

$$p = \frac{\text{lunghezza } HK}{\text{lunghezza } MN} = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}.$$

Ritorniamo allora sulla domanda implicita nelle considerazioni d'apertura: perché non si può parlare di tre soluzioni dello stesso problema, ma di tre problemi diversi?

Il fatto è che la scelta "casuale" della corda può avvenire non in una sola maniera, ma in modi diversi e non equivalenti e noi ne abbiamo descritto tre. Ma, una volta che sia stato precisato in qual modo deve essere operata tale scelta, il problema risulta ben posto e ammette una sola soluzione.

7. Ritorniamo per un momento sul problema dell'ago di Buffon: possiamo pensare di effettuare concretamente un numero elevato N di prove e contare il numero n delle volte in cui l'ago incide una retta. Si può allora assumere come "stima" della probabilità p il rapporto n/N . Ebbene, confrontando questo valore di p con l'altro fornito dalla relazione trovata prima, si ha:

$$\frac{n}{N} \approx \frac{2L}{\pi D}$$

da cui segue una stima di π , che è tanto migliore quanto maggiore è N :

$$\pi \approx \frac{2NL}{nD}.$$

Un altro modo di ottenere una stima di π , è di bombardare con un numero elevato N di "proiettili" una superficie quadrata di area 1 e di contare il numero n di quelli che cadono internamente al cerchio inscritto nel quadrato (Fig. 22).

Siccome la probabilità p che uno dei proiettili sia interno al cerchio è:

$$p = \frac{\text{area cerchio}}{\text{area quadrato}} = \frac{\pi \left(\frac{1}{2}\right)^2}{1} = \frac{\pi}{4}$$

mentre una “stima” di questa probabilità è n/N , allora evidentemente:

$$\frac{\pi}{4} \approx \frac{n}{N} \quad \text{da cui segue : } \pi \approx \frac{4n}{N}.$$

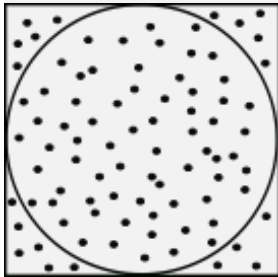


FIG. 22

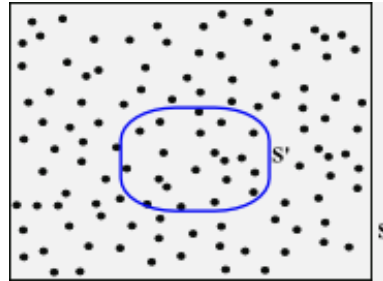


FIG. 23

Si capisce che, se questo esperimento si esegue per una superficie S qualsiasi di area A , all'interno della quale è contenuta una superficie S' di area A' (Fig. 23), ripetendo le considerazioni precedenti si ottiene:

$$A' \approx \frac{n}{N} A$$

ed è un modo sperimentale di ottenere una “stima” dell'area A' , che è tanto più buona quanto maggiore è il numero N . Si capisce soprattutto che il metodo è esaltato dalla possibilità di eseguire l'esperimento mediante una simulazione al computer.

Questo metodo di calcolo approssimato sperimentale, basato sulla probabilità geometrica o, più in generale, su simulazioni statistiche, le cui potenzialità erano emerse fin dalla fine del Settecento, trovò, a dire il vero, una sua formalizzazione solo durante la seconda guerra mondiale, all'interno del Progetto Manhattan, progetto che portò gli USA a costruire la prima bomba atomica nei laboratori di Los Alamos (New Mexico). Tra gli studiosi che fecero parte di questo progetto, diretto dal fisico statunitense **Robert Oppenheimer** (1904-1967), vi furono:

- l'italiano **Enrico Fermi** (1901-1954), che per primo comprese l'importanza della simulazione nei fenomeni statistici e la utilizzò per scoprire le interazioni nucleari dei neutroni;
- **John Von Neumann** (1903-1957), di origine ungherese, e **Stanislaw M. Ulam** (1909-1984), di origine polacca, ai quali si deve la formalizzazione del metodo di calcolo suddetto;
- **Nicholas Constantine Metropolis** (1915-1999), di origine greca, che avrebbe dato significativi contributi al metodo e l'avrebbe denominato **Metodo Monte Carlo**.

Chi avesse voglia di consolidare le proprie conoscenze riguardo a questo argomento e nel contempo affinare le competenze in geometria può cimentarsi nella risoluzione dei seguenti esercizi. I quali, pur richiedendo il calcolo delle probabilità di certi eventi, sono sostanzialmente esercizi di geometria.

1. Calcolare la probabilità che, preso a caso un punto interno ad un rettangolo, esso risulti interno all'ellisse inscritta nel rettangolo. [R. $\pi/4$]
2. Si scelga a caso un punto interno ad un'ellisse: si determini la probabilità che risulti esterno al quadrilatero avente per vertici i vertici dell'ellisse. [R. $\approx 36,34\%$]
3. Le diagonali di un rombo stanno nel rapporto $3/4$. Si scelga a caso un punto interno al rombo: si determini la probabilità che risulti esterno al cerchio inscritto nel rombo. [R. $\approx 24,60\%$]

4. È dato un triangolo isoscele. Calcolare la probabilità che, scelto a caso un punto della sua base, la somma delle sue distanze dai lati uguali sia: **a)** uguale all'altezza del triangolo relativa ad uno dei lati uguali; **b)** maggiore di tale altezza; **c)** minore di tale altezza.
5. Calcolare la probabilità che, scelto a caso un punto interno ad un triangolo equilatero, la somma delle sue distanze dai lati del triangolo sia: **a)** uguale all'altezza del triangolo; **b)** maggiore dell'altezza del triangolo; **c)** minore dell'altezza del triangolo.
6. Si scelga a caso un punto P all'interno di un triangolo equilatero il cui lato ha lunghezza 3. Si determini la probabilità che la distanza di P da ogni vertice sia maggiore di 1.
[Tratto dall'esame di Stato 2007, indirizzo scientifico sperimentale, sessione ordinaria] [R. $\approx 59,69\%$]
7. Si considerino i cerchi C' e C'' rispettivamente circoscritto ed inscritto in un quadrato. Preso a caso un punto interno al cerchio C' , è vero o è falso che sono uguali la probabilità che esso risulti esterno al cerchio C'' e quella che risulti interno ad esso?
8. Sia ABC un triangolo equilatero e sia DEFG il quadrato inscritto in esso in modo che il lato DE sia parallelo al lato BC. Scelto a caso un punto interno al triangolo, è più probabile che esso sia interno o esterno al quadrato?
9. Calcolare la probabilità che, presi a caso due punti interni ad un segmento, la loro distanza superi la metà del segmento stesso. [R. $p=1/4$]
10. Generalizzando il problema precedente, calcolare che la probabilità che, presi a caso due punti interni ad un segmento di lunghezza assegnata a, la loro distanza sia maggiore della lunghezza b, con $b < a$. [R. $\left(\frac{a-b}{a}\right)^2$]
11. Si consideri il segmento AB, lungo a. Presi casualmente due punti C e D interni ad esso (con $AC < AD$). Calcolare la probabilità che risulti: $\overline{AC} + \overline{DB} > a/2$. [R. $3/8$]
12. Considerato il segmento AB, si prendano casualmente due punti C e D interni ad esso (con $AC < AD$). Calcolare la probabilità che i segmenti AC, CD, DB siano i lati di un triangolo isoscele.
13. Su una circonferenza si fissi un punto A. Calcolare la probabilità che, scelta casualmente una corda avente un estremo in A, essa sia più lunga del lato: a) del quadrato inscritto nella circonferenza; b) del pentagono regolare inscritto nella circonferenza. [R. a) $1/2$; b) $3/5$]
14. Tra le corde di un cerchio aventi una data direzione, calcolare la probabilità di trovarne una che sia meno lunga del lato dell'esagono regolare inscritto nel cerchio. [R. $\approx 13,40\%$]
15. Calcolare la probabilità che, presi a caso due punti di una circonferenza, il minore dei due archi che li ha come estremi non sia più lungo di una semicirconferenza. [R. $3/4$]
16. Si sceglie a caso un punto interno ad un cubo. Qual è la probabilità che esso sia interno all'ottaedro avente i vertici nei centri delle facce del cubo? [R. $\approx 35,35\%$]
17. Si sceglie a caso un punto interno ad un tetraedro regolare. Qual è la probabilità che esso sia interno anche al tetraedro avente i vertici nei centri delle facce del tetraedro dato? [R. $1/27$]
18. Un rettangolo è tale che una dimensione è il doppio dell'altra.
a) Spiegare perché il cerchio, la cui circonferenza ha lunghezza uguale al semiperimetro del rettangolo e centro nel centro del rettangolo, è tutto contenuto nel rettangolo medesimo.
b) Calcolare il rapporto fra l'area del cerchio e quella del rettangolo.
c) Supposto di sparare casualmente dei proiettili contro la superficie rettangolare e ammesso che 140 di essi cadano internamente al rettangolo, si calcoli il numero probabile di proiettili caduti all'interno della circonferenza. [R. ...; c) 50]

19. Contro una superficie a forma di triangolo equilatero sono sparati casualmente dei proiettili, 100 dei quali cadono internamente al triangolo. Quanti sono i proiettili che probabilmente sono caduti all'interno del cerchio inscritto nel triangolo? [R. 60]
20. I lati di un triangolo sono proporzionali ai numeri 2, 3, 4. Contro la superficie triangolare sono sparati casualmente dei proiettili e 100 di essi cadono internamente al triangolo. Qual è il numero probabile di proiettili che cadono all'interno del cerchio inscritto nel triangolo? [R. 45]
21. Contro una superficie a forma di semicerchio sono scagliati a caso dei proiettili, 40 dei quali cadono internamente al semicerchio. Qual è il numero probabile di proiettili caduti dentro la superficie quadrata inscritta nel semicerchio? [R. 20]
22. In un cerchio di centro O è inscritto l'esagono $ABCDEF$ tale che gli angoli $A\hat{O}B$, $C\hat{O}D$, $E\hat{O}F$ sono retti e gli angoli $B\hat{O}C$, $D\hat{O}E$, $F\hat{O}A$ sono uguali.
- Calcolare le ampiezze degli angoli $B\hat{O}C$, $D\hat{O}E$, $F\hat{O}A$ e quelle degli angoli interni dell'esagono.
 - Dimostrare che i lati dell'esagono sono due a due paralleli.
 - Calcolare il rapporto fra l'area dell'esagono e quella del cerchio.
 - Supposto di sparare casualmente dei proiettili contro la superficie del cerchio e ammesso che 90 di essi cadano internamente ad essa, si calcoli quanti di essi probabilmente sono caduti all'esterno dell'esagono.
- [R. ...; d) 25]
23. In una piramide quadrangolare regolare è inscritto un prisma retto avente per base la sezione della piramide con il piano equidistante dalla sua base e dal vertice.
- Calcolare il rapporto fra la base del prisma e quella della piramide.
 - Se il volume del prisma è V qual è quello della piramide?
 - Preso a caso un punto interno alla piramide, qual è la probabilità che sia esterno al prisma?
 - Ammesso che all'interno della piramide siano distribuiti casualmente 200 pallini da caccia, quanti di essi sono situati probabilmente all'interno del prisma?
- [R. ...; c) 5/8; d) 75]