

Prerequisiti:

- Possedere i concetti di costo, ricavo, profitto.

Questa unità riguarda il 2° biennio del solo indirizzo Trasporti e Logistica dell'Istituto Tecnico, settore Tecnologico.

Riguarda anche il settore Economico dell'Istituto Tecnico, che però se ne occuperà nella 5ª classe.

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità gli allievi devono saper:

- *spiegare in cosa consiste un problema di scelta, un problema di scorte, il metodo del PERT*
- *risolvere problemi di scelta sia in condizioni di certezza sia in condizioni di incertezza*
- *risolvere problemi relativi alla gestione delle scorte di magazzino*
- *risolvere problemi con il metodo del PERT*

83.1 Problemi di scelta in condizioni di certezza.

83.2 Problemi di scelta in condizioni di incertezza.

83.3 Il problema delle scorte.

83.4 Il PERT.

Verifiche.

Una breve sintesi per domande e risposte.

**Nozioni di
ricerca operativa**

Unità 83

83.1 PROBLEMI DI SCELTA IN CONDIZIONI DI CERTEZZA

83.1.1 Un'azienda o un'impresa (edile, commerciale, agricola, eccetera) hanno a che fare continuamente con problemi del tipo seguente, anche se formulati in maniera generica:

- è conveniente produrre un certo articolo e, in caso affermativo, in quale quantità?
- è più conveniente servirsi di una ditta o di un'altra per l'acquisto di certo materiale?
- come comportarsi per ridurre al minimo le spese per l'organizzazione del trasporto delle merci?
- fra più tipi di produzione quali e in che misura assicurano all'impresa il maggior profitto?

Problemi del genere sono chiamati **problemi di scelta** (o **di decisione** o anche **di ottimizzazione**).

Ricette magiche per risolverli non ne esistono. La matematica, tuttavia, mette a disposizione degli operatori strumenti sofisticati che, utilizzati con sano buon senso, quantomeno forniscono loro degli utili modelli di riferimento, sulla base dei quali orientare nel migliore dei modi possibili le decisioni inerenti all'organizzazione della vita aziendale; con il chiaro obiettivo di rendere massimo il profitto e minimi i costi di produzione, di utilizzare al meglio i mezzi impiegati e di realizzare un volume di vendite che garantisca il massimo ricavo.

Quando si studia un programma di azione per risolvere un problema di decisione si dice che si fa **programmazione**.

Qualcosa sull'argomento ti abbiamo già mostrato in passato, specialmente per quanto attiene al primo degli interrogativi suddetti. Al riguardo ti rinviamo allo studio dell'unità 69. Qui vogliamo ampliare e approfondire le tue conoscenze e abilità in materia, occupandoci anche degli altri interrogativi.

83.1.2 Incominciamo con un problema che abbiamo già affrontato in passato nel contesto della risoluzione dei sistemi lineari, ma che adesso ci fa comodo riprendere.

- **PROBLEMA.** Un'impresa edile ha bisogno di certo materiale. Lo può acquistare da due ditte diverse alle seguenti condizioni:
 - ditta D': prezzo unitario € 4; spesa fissa di trasporto € 50;
 - ditta D'': prezzo unitario € 3,5; spesa fissa di trasporto € 70.

Stabilire da quale ditta è più conveniente acquistare.

RISOLUZIONE. Accenniamo rapidamente alla risoluzione.

Traduciamo il problema in uno schema matematico. A questo riguardo chiamiamo x il numero delle unità di materiale da acquistare ed y la spesa, in euro, che bisogna sostenere. Si ottengono facilmente le seguenti relazioni:

- ditta D': $y = 4x + 50$,
- ditta D'': $y = 3,5x + 70$.

Utilizzando la rappresentazione grafica delle due funzioni (Fig. 1), dopo aver constatato che i due grafici si intersecano nel punto di coordinate (40, 210), si rileva subito che:

- se $x=40$ è indifferente acquistare da D' o da D'';
- se $x<40$ è più conveniente acquistare da D';
- se $x>40$ è più conveniente acquistare da D''.

Qualche volta le funzioni possono essere più di due e non lineari, ma comunque dipendenti da una sola variabile. Il metodo di risoluzione è lo stesso visto sopra nel caso di due funzioni, pur con qualche complicazione in più.

Qualche volta, invece, di funzioni che traducono il problema ce n'è una soltanto, ma si tratta in genere

di stabilire per quali valori della variabile indipendente essa è positiva o nulla o negativa. E anche per quale valore è minima o massima. Sono tutte questioni che l'analisi matematica permette di affrontare e risolvere facilmente.

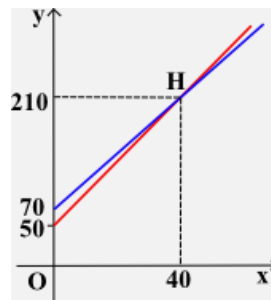


FIG. 1

83.1.3 Il problema precedente è stato trattato come se la variabile indipendente (numero x delle unità di materia da acquistare) variasse con continuità o, detto in altre parole, come se si trattasse di un *problema continuo*.

In realtà quella variabile può assumere solo valori interi (e positivi). Ragion per cui si tratta di un *problema discreto*. Per la sua risoluzione non sarebbe necessaria la rappresentazione grafica delle funzioni, ma basterebbe compilare una tabella in cui siano riportati i valori che assumono le due funzioni via via che aumenta il valore della variabile indipendente e trarre quindi le necessarie conseguenze.

In effetti, se questa modalità di risoluzione è conveniente quando il numero dei valori possibili della variabile indipendente è piuttosto limitato, lo è un po' meno se ciò non è. In questo caso è preferibile trattare il problema come se fosse continuo e adattare la soluzione al caso discreto. Per esempio, se una soluzione fosse $x=34,6$ si accetterà come soluzione $x=34$ o $x=35$ a seconda delle situazioni.

Ad ogni modo, volendo trattare come discreto il problema di cui ci stiamo occupando, la tabella da compilare, ancorché limitata ad alcuni valori di x , è quella sottostante (Tab. 1). Da essa si evince la stessa conclusione che abbiamo registrato sopra.

Numero unità materiale da acquistare: x	Spesa (€) con ditta D': $y=4x+50$	Spesa (€) con ditta D'': $y=3,5x+70$	Ditta più conveniente
...
30	170	175	D'
...
39	206	206,5	D'
40	210	210	indifferente
41	214	213,5	D''
...
50	250	245	D''
...

TAB. 1

83.1.4 Nel problema precedente ed in quelli analoghi, indipendentemente dal fatto che siano discreti o continui, i dati assegnati sono sicuri, inequivocabili e le conseguenze sono del tutto prevedibili giacché predeterminate dai dati medesimi.

Questi problemi sono denominati *problemi di scelta in condizioni di certezza*.

83.2 PROBLEMI DI SCELTA IN CONDIZIONI DI INCERTEZZA

83.2.1 Quando i dati assegnati dipendono, in tutto o in parte, da fenomeni casuali, il cui verificarsi perciò non è sicuro ma solo probabile, neanche le conseguenze possono essere predeterminate con sicurezza e di esse si può dare solo una valutazione probabilistica.

Questi problemi sono denominati *problemi di scelta in condizioni di incertezza*.

Ci sono diversi criteri operativi per la risoluzione di tali problemi. Ne descriveremo tre:

- *criterio del valor medio*;
- *criterio del valor medio con valutazione del rischio*;
- *criterio del pessimista*.

Lo faremo prendendo in esame un problema concreto. D'altro canto, le procedure che illustreremo hanno valore generale e non dipendono dal particolare problema.

- **PROBLEMA.** La produzione di un certo manufatto può avvenire seguendo tre procedimenti alternativi, sintetizzati nella tabella sottostante (Tab. 2):

	Procedimento P1	Procedimento P2	Procedimento P3
Spesa fissa mensile (€)	75.100	76.400	91.000
Costo produzione per pezzo (€)	25	23	21

TAB. 2

Il prezzo di vendita di ogni pezzo è di € 160. Il numero dei pezzi venduti mensilmente varia comportandosi come una variabile casuale, secondo la tabella seguente ⁽¹⁾ (Tab. 3). Quale processo produttivo procura all'azienda il maggior profitto?

Numero pezzi venduti	500	550	610	680	730
Probabilità	0,06	0,18	0,45	0,21	0,10

TAB. 3

83.2.2 Risolviamo il problema col primo criterio, il *criterio del valor medio*.

RISOLUZIONE. Calcoliamo per prima cosa il profitto $G(x)$, espresso in euro, in funzione dei pezzi x venduti, tenendo presente che esso è uguale al ricavo (che è comunque $160x$) diminuito del costo complessivo, che dipende invece dal procedimento seguito. Si ha precisamente:

- $G_1(x) = 160x - (75.100 + 25x) = 135x - 75.100$;
- $G_2(x) = 160x - (76.400 + 23x) = 137x - 76.400$;
- $G_3(x) = 160x - (91.000 + 21x) = 139x - 91.000$.

Compiliamo adesso, con l'ausilio di un foglio elettronico, una tabella a doppia entrata (Tab. 4) che riassume i guadagni in base alle varie alternative (nel caso specifico: tre procedimenti di produzione) ed in base agli eventi casuali (nella circostanza: numero dei pezzi venduti).

Nell'ultima colonna della tabella riportiamo le probabilità degli eventi in questione e nell'ultima riga registriamo il valor medio M_k di ciascuna della k alternative (nel nostro caso, in cui $k=3$: guadagni medi M_1, M_2, M_3 che l'azienda può realizzare).

¹ Che si tratti di una variabile casuale è dimostrato dal fatto che la somma delle probabilità degli eventi è 1

Eventi: Numero pezzi venduti	Alternative			Probabilità
	Procedimento P1	Procedimento P2	Procedimento P3	
500	-7600	-7900	-11500	0,06
550	-850	-1050	-3550	0,18
610	7250	7170	5990	0,45
680	16700	16760	17120	0,21
730	23450	23610	25070	0,10
Valor medio M_k	8505,5	8444,1	7468,7	

TAB. 4

Il lavoro preparatorio è finito. Si possono trarre le conclusioni.

Si assume come alternativa più favorevole all'azienda quella che presenta il valore medio più favorevole. Nel caso specifico, in cui si richiede la realizzazione del maggior profitto (*problema di massimo*), l'alternativa più favorevole è quella che corrisponde al procedimento P1, che è quello che determina il valor medio maggiore.

Naturalmente, se si fosse trattato di calcolare una spesa sostenuta dall'azienda, l'alternativa più favorevole sarebbe stata quella cui corrisponde il valor medio minore (*problema di minimo*).

83.2.3 Risolviamo lo stesso problema con il *criterio del valor medio con valutazione del rischio*.

RISOLUZIONE. Si procede dapprima esattamente come nel caso del criterio del valor medio fino ad ottenere la tabella 4. A questo punto la tabella è integrata con una ulteriore riga in cui è registrata la deviazione standard σ_k delle varie alternative (nel caso nostro sono tre: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$).

Si può trarre una prima conclusione, benché il caso sia veramente eccezionale: se i valori medi M_k sono uguali allora si sceglie come alternativa più favorevole quella cui corrisponde la minore deviazione standard che, essendo quella che presenta la minore dispersione, presenta anche il minor rischio.

Si può constatare (Tab. 5) che questa eventualità non si verifica nel caso che stiamo esaminando.

Se, evento più probabile, i valori medi non sono tutti uguali, ma comunque alcuni sono uguali fra loro, fra le alternative che hanno valori medi uguali si scartano quelle che hanno deviazione standard maggiori (il motivo è il medesimo spiegato sopra). In questo modo rimangono alternative aventi valori medi tutti diversi fra loro.

A questo punto si fissa in maniera soggettiva il *rischio* accettabile. Esso è quantificato da un numero reale r tale che $0 < r \leq 1$ (per esempio: $r=1$ significa 100% di rischio; $r=0,5$ significa 50% di rischio; $r=0,1$ significa 10% di rischio). Si riporta in una nuova riga, a completamento della tabella 4, la cosiddetta *propensione al rischio*, espressa dalla grandezza: $L_k = r M_k$.

Nel caso del nostro problema, supposto di aver fissato come rischio $r=50\%$, la nuova tabella è quella sottostante (Tab. 5).

Eventi: Numero pezzi venduti	Alternative			Probabilità
	Procedimento P1	Procedimento P2	Procedimento P3	
500	-7600	-7900	-11500	0,06
550	-850	-1050	-3550	0,18
610	7250	7170	5990	0,45
680	16700	16760	17120	0,21
730	23450	23610	25070	0,10

valor medio M_k	8505,5	8444,1	7468,7	
deviazione standard σ_k	8274,2	8396,7	9745,2	
propensione al rischio L_k	4252,7	4222,0	3734,3	

TAB. 5

Si traggono le conclusioni. Si scartano, perché ritenute troppo rischiose, le alternative per le quali la deviazione standard supera la propensione al rischio e si prendono in considerazione le sole alternative per le quali risulta $\sigma_k \leq L_k$. Tra queste alternative si sceglie poi quella più favorevole. Questa è l'alternativa cui corrisponde il maggior valor medio se si tratta di un problema di massimo (massimizzare il profitto o il ricavo) ed il minor valor medio se si tratta di un problema di minimo (minimizzare una spesa o una perdita).

Con riferimento al problema in questione, che è un problema di massimo, si constata che, fissato il rischio al 50%, la deviazione standard di ogni alternativa è maggiore della corrispondente propensione al rischio: le alternative sono tutte da scartare.

Se però si fosse fissato il massimo rischio, $r=1=100\%$, i valori della propensione al rischio L_k sarebbero coincisi con le rispettive medie M_k . In questo caso si sarebbe scartata solo l'alternativa P3, mentre delle altre due si sarebbe scelta l'alternativa P1, cui corrisponde il maggior valor medio.

83.2.4 Risolviamo infine lo stesso problema con il *criterio del pessimista*.

RISOLUZIONE. Con questo criterio è irrilevante che si conoscano o no le probabilità degli eventi: tanto non se ne tiene conto. In effetti, come nei casi precedenti, si costruisce una tabella a doppia entrata come la tabella 4, ma senza la riga dei valori medi, che non interessa prendere in considerazione con questo criterio.

Il criterio del pessimista assume nomi diversi a seconda che si tratti di un problema di massimo oppure di un problema di minimo:

- nel caso di un *problema di massimo* si chiama più propriamente **criterio maxi-min**, vale a dire *massimo dei minimi*: si sceglie il valore minimo in ogni alternativa e tra tali minimi si sceglie il massimo; l'alternativa che gli corrisponde è quella favorevole;
- nel caso di un *problema di minimo* si denomina invece **criterio mini-max**, vale a dire *minimo dei massimi*: si sceglie il valore massimo in ogni alternativa e tra tali massimi si sceglie il minimo; l'alternativa che gli corrisponde è quella favorevole.

Nel nostro problema, che, lo ripetiamo ancora una volta, è un problema di massimo, si sceglie il valore minimo di ogni alternativa. Con riferimento alla tabella 3, tali minimi sono nell'ordine:

$$-7600, -7900, -11500.$$

Tra tali minimi si sceglie il massimo, che è -7600 . Quindi il processo di produzione più favorevole è, secondo questo criterio, P1.

83.2.5 Alcune osservazioni conclusive.

- È solo un caso che nella risoluzione del nostro problema di riferimento, il criterio del valor medio, quello del valor medio con valutazione del rischio (almeno in un caso) e quello del pessimista abbiano portato al medesimo risultato, la scelta dello stesso procedimento di produzione. Non sempre è così.
- Il criterio del valor medio è basato sulle probabilità degli eventi. Probabilità che sono però sogget-

tive, anche se in genere sono valutate sulla base di esperienze precedenti. Ragion per cui la scelta giudicata più favorevole in base al ragionamento potrebbe non esserla nei fatti. Lo sarà solo se le probabilità effettive coincidono con quelle ipotizzate.

- Il criterio del valore medio con valutazione del rischio è basato, oltre che sulle probabilità degli eventi, sulla scelta del rischio che l'azienda intende correre. Si tratta di assegnare comunque valori soggettivi a determinati parametri. Questo potrebbe portare a scelte apparentemente favorevoli, ma sbagliate nei fatti.
- Insomma, i problemi di scelta in condizione di incertezza, quale che sia il criterio di risoluzione seguito, non trovano soluzioni univoche e incontestabili e hanno insito un ovvio grado di incertezza ed un certo coefficiente di rischio, dal quale non è possibile prescindere.
- Un'ultima considerazione. Quelli che noi abbiamo affrontato sono denominati solitamente *problemi di scelta con effetti immediati*. Si distinguono dai cosiddetti *problemi di scelta con effetti differiti*, dei quali però non possiamo occuparci. Avrà modo di occuparsene chi proseguirà gli studi universitari in ambito economico.

Ti proponiamo il seguente esercizio di riepilogo.

Nella tabella sottostante (Tab. 6) sono registrati i valori che la variabile aleatoria X associa a ciascuno degli eventi incompatibili $E1, E2, E3, E4, E5$. Tali eventi si manifestano con modalità differenti secondo 4 alternative: $A1, A2, A3, A4$.

La colonna delle probabilità degli eventi risulta incompleta: completarla.

Determinare quindi l'alternativa più favorevole nel caso in cui si debba:

a) massimizzare X , b) minimizzare X ,

seguendo tutti e tre i criteri studiati (nel caso della valutazione del rischio, fissare $r=50\%$).

Mettere a confronto i risultati ottenuti con i diversi criteri.

Eventi	Alternative				Probabilità
	A1	A2	A3	A4	
E1	120	90	110	70	0,22
E2	80	115	95	90	?
E3	90	65	85	120	0,19
E4	110	80	120	60	0,17
E5	70	110	60	105	0,25

TAB. 6

83.3 IL PROBLEMA DELLE SCORTE ⁽²⁾

83.3.1 Il problema delle scorte o, detto per esteso, il **problema della gestione delle scorte di magazzino**, è un problema con cui devono misurarsi le aziende sia manifatturiere che commerciali:

- le prime per la necessità di disporre di adeguate quantità di materie prime, necessarie per la produzione dei prodotti di loro competenza;
- le seconde per la necessità di disporre di idonei quantitativi delle merci da vendere, indispensabili per soddisfare le esigenze dei clienti.

Prima di capire in cosa consista il problema e come possa essere affrontato e risolto, bisogna rendersi

² L'argomento è opzionale per il settore Economico dell'Istituto Tecnico.

conto di come varia in un determinato intervallo di tempo (un anno, un mese, una settimana) la quantità di merce giacente in magazzino. Ecco, questa variazione può essere del tutto irregolare e dipendere da fattori imprevedibili e imponderabili. Inoltre non è detto che le cose vadano alla stessa maniera in due intervalli di tempo differenti.

Mostriamo mediante un grafico, a titolo di esemplificazione, come potrebbe variare la quantità di merce giacente in un magazzino in tre periodi successivi, di uguale ampiezza (Fig. 2). L'andamento mostra che nel secondo periodo c'è addirittura un lasso di tempo in cui il magazzino è vuoto. Come dire che passa un certo tempo fra lo svuotamento del magazzino e le nuove consegne.

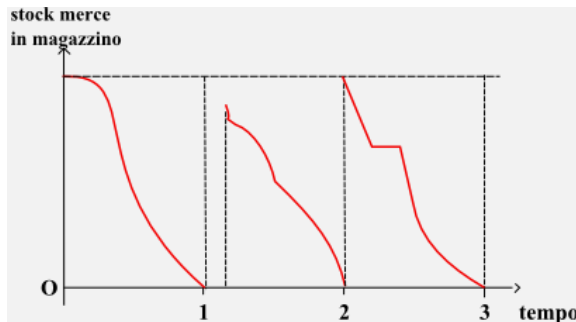


FIG. 2

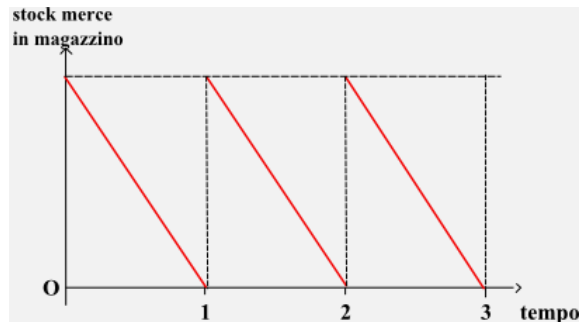


FIG. 3

Questo andamento così irregolare mostra che il magazzino via via si svuota, ma non si possono fare ragionamenti plausibili. Per questo si rende necessario semplificare le cose, assumendo delle ipotesi sull'andamento delle scorte. Le ipotesi che solitamente si fanno sono le seguenti:

- non ci sono tempi morti fra lo svuotamento del magazzino e le nuove consegne;
- lo svuotamento del magazzino avviene uniformemente nel tempo e le consegne sono fatte ad intervalli regolari e uguali;
- la quantità di merce che arriva ad ogni consegna è costante nel tempo.

Il grafico che visualizza questa situazione è quello di una funzione periodica, decrescente (in ogni periodo), lineare a tratti (Fig. 3). Si tratta ovviamente di una situazione ideale: i suoi risultati non coincidono esattamente con quelli della situazione reale, ma vi sono tanto più vicini quanto più le condizioni della situazione reale sono prossime a quelle della situazione ideale. E comunque, svolgono un importante ruolo di orientamento nei comportamenti dell'azienda.

In conclusione, le aziende manifatturiere e commerciali hanno la necessità di conservare in magazzino una quantità di merce, adeguata alle esigenze di lavoro ed alla capienza del magazzino, per un determinato intervallo di tempo, durante il quale la merce via via diminuisce e, appena il magazzino si svuota, deve essere subito riempito.

Ora, tutto questo ha un costo, che dipende sostanzialmente da due fattori (oltre al costo per l'acquisto della merce ed alle spese di trasporto):

- costo di ordinazione; 2) costo di magazzinaggio.

83.3.2 Se indichiamo con y il costo sostenuto dall'azienda per l'approvvigionamento in un intervallo di tempo (solitamente un anno), con C' il costo di ordinazione e con C'' quello di magazzinaggio, entrambi riferiti allo stesso intervallo di tempo (un anno), risulta:

$$y = C' + C''.$$

Bisogna allora esplicitare C' e C'' , esprimendoli in funzione della quantità x di merce da ordinare e immagazzinare ogni volta (x è espressa in unità di capacità, per esempio in metri cubi).

- Calcolo del costo di ordinazione C' .

Se sono effettuate N ordinazioni nel periodo di tempo preso in considerazione (un anno), risulta evidentemente: $C' = NS$, essendo S la spesa che bisogna affrontare in ogni ordinazione.

Tale spesa S dipende da vari elementi (telefonate, mediazioni, spese di rappresentanza, eccetera) ma non dipende dalla quantità di merce che si ordina: si tratta perciò di una costante rispetto ad x .

Per sapere quanto vale N bisogna conoscere la quantità di merce che si suppone di dover ordinare nel periodo ipotizzato (un anno). Se questa quantità è Q , si ha: $N = Q/x$. Di conseguenza:

$$C' = S \frac{Q}{x}.$$

- Calcolo del costo di magazzinaggio C'' .

Indichiamo con s il costo, nel periodo in questione (un anno), dell'unità di quantità di merce immagazzinata. Tale costo dipende da vari fattori (deperimento della merce, vigilanza, eccetera) ma non dipende dalla quantità di merce immagazzinata: si tratta perciò di una costante rispetto ad x . C'' dipende tuttavia dalla quantità di merce che giace in magazzino. Sennonché questa quantità è variabile nel tempo. Si suppone allora che C'' sia direttamente proporzionale alla quantità di merce $m(x)$ che giace mediamente in magazzino durante un periodo. Il costo complessivo è perciò $C'' = s \cdot m(x)$. Avendo supposto che lo svuotamento del magazzino avvenga uniformemente, ne consegue che $m(x)$ si può assumere uguale alla media aritmetica della quantità di merce che giace in magazzino all'inizio del rifornimento (che è pari alla quantità x ordinata e immagazzinata) e di quella che c'è alla fine del periodo (che è 0 dal momento che il magazzino si è svuotato). Dunque $m(x) = x/2$. Pertanto:

$$C'' = s \frac{x}{2}.$$

In definitiva il costo totale per l'approvvigionamento in un periodo (un anno), non considerando il costo della merce e le spese di trasporto, è dato dalla seguente funzione:

$$y = S \frac{Q}{x} + s \frac{x}{2}.$$

Naturalmente l'impresa o l'azienda hanno interesse a rendere minimo questo costo. Per cui, tenendo presente che la quantità di merce che può essere immagazzinata non può superare la capacità C del magazzino, **il modello matematico che risolve il problema delle scorte è il seguente:**

Rendere minima la funzione (detta *funzione obiettivo*):

$$y = \frac{s}{2}x + S \frac{Q}{x}$$

sotto la condizione $0 < x \leq C$, essendo:

- **y il costo complessivo per il rifornimento del magazzino in un periodo stabilito (generalmente un anno), al netto delle spese sostenute per l'acquisto della merce e per il trasporto;**
- **Q la quantità complessiva di merce ordinata e immagazzinata in un periodo di tempo (un anno);**

- **C** la capacità del magazzino;
- **x** la quantità di merce che bisogna ordinare e immagazzinare ad ogni rifornimento;
- **s** la spesa (fissa) sostenuta per immagazzinare una quantità unitaria di merce;
- **S** la spesa (fissa) sostenuta per una singola ordinazione.

83.3.3 Alcune considerazioni squisitamente matematiche sulla funzione obiettivo. Notiamo anzitutto che le grandezze coinvolte – S, Q, s, x – sono tutte positive. Questo ha come conseguenza che ogni valore di y è positivo e perciò il grafico della funzione è interamente contenuto nel primo quadrante degli assi. Un minimo di riflessione porta poi a concludere che questo grafico è un ramo di iperbole avente come asintoti le rette di equazione $x=0$ (asse y) e $y=\frac{s}{2}x$, passanti entrambe per l'origine O del sistema cartesiano di riferimento (Oxy).

Il minimo corrisponde perciò al punto in cui tale ramo d'iperbole ha tangente orizzontale, ammesso però che questo punto cada tra 0 e C (Fig. 4).

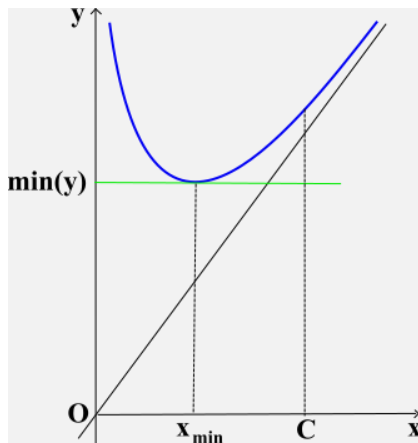


FIG. 4

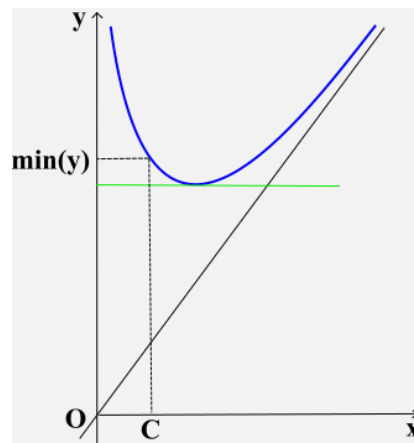


FIG. 5

In realtà al minimo si può pervenire in vari modi ed in particolare utilizzando le cosiddette proprietà elementari. Basta constatare che si tratta di rendere minima la somma delle due quantità positive $\frac{s}{2}x$ e $S\frac{Q}{x}$, il cui prodotto, $\frac{s}{2}x \cdot S\frac{Q}{x}$ è uguale alla costante $\frac{1}{2}SQ$. La somma, per una nota proprietà, è allora minima quando le due quantità che si sommano sono uguali, vale a dire quando risulta: $\frac{s}{2}x = S\frac{Q}{x}$. Il che accade per:

$$x = x_{\min} = \sqrt{\frac{2SQ}{s}}.$$

In corrispondenza si ha:

$$\min(y) = \frac{s}{2} \sqrt{\frac{2SQ}{s}} + SQ \sqrt{\frac{s}{2SQ}} = \sqrt{2sSQ}.$$

Qualora il punto in cui l'iperbole ha tangente orizzontale non dovesse cadere nell'intervallo $]0, C[$, il minimo si ha in corrispondenza di C (Fig. 5).

83.3.4 Un problema su questo argomento può far capire meglio come vanno le cose.

- **PROBLEMA.** Un'impresa manifatturiera necessita di 67.600 m^3 di materia prima in un anno. Vuole programmare un piano di ordinazioni, che comporti la minima spesa, sapendo che il magazzino di cui dispone ha una capacità di 1500 m^3 , che ogni ordinazione ha un costo fisso di € 25 e che il costo annuo di magazzinaggio è di 2 €/m^3 . Quale piano determina il minor costo per l'impresa nell'ipotesi che lo smaltimento della merce avvenga con modalità uniforme? Precisamente: a) Quanta merce deve essere ordinata per ogni rifornimento? b) Qual è il costo del rifornimento (non considerando i costi per l'acquisto della merce e per il trasporto)? c) Quante ordinazioni devono essere fatte in un anno?

RISOLUZIONE. Si possono seguire due procedimenti.

1) Si costruisce la funzione obiettivo e si trova che è la seguente:

$$y = x + \frac{1.690.000}{x}.$$

Si tratta di renderla minima sotto la condizione $0 < x \leq 1500$. A conti fatti, si trova:

$$x_{\min} = 1300 \text{ (m}^3\text{)}, \quad \min(y) = 2600 \text{ (€)}.$$

Il numero delle ordinazioni è:

$$N = \frac{67600}{1300} = 52.$$

Come dire che il piano ottimale prevede che l'impresa faccia 52 ordinazioni l'anno (circa una alla settimana), ordinando ogni volta 1300 m^3 di merce, con un costo totale di magazzinaggio di € 2600.

2) Il secondo procedimento si basa sull'applicazione, *sic et simpliciter*, delle formule trovate sopra:

$$x_{\min} = \sqrt{\frac{2SQ}{s}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 25 \cdot 67600}{2}} = 1300 \text{ (m}^3\text{)}; \text{ accettabile giacché minore di } 1500 \text{ (m}^3\text{)};$$

$$\min(y) = \sqrt{2sSQ} = \sqrt{2 \cdot 25 \cdot 67600} = 2600 \text{ (€)}.$$

Il numero delle ordinazioni si calcola come sopra.

- **OSSERVAZIONE.** Se, nello stesso problema, la capacità C di magazzino fosse minore di 1300 m^3 , mettiamo per esempio $C = 1000 \text{ m}^3$, una volta trovato (con uno dei due procedimenti) che quello che doveva essere il minimo, cioè 1300 m^3 , è per l'appunto maggiore di C , ebbene quel valore di 1300 m^3 non può essere accettato ovviamente ed il minimo di merce da ordinare è in questo caso uguale alla capacità del magazzino, vale a dire proprio 1000 m^3 .

Il corrispondente costo di magazzinaggio, ricorrendo alla funzione obiettivo, è:

$$\min(y) = y(1000) = 1000 + \frac{1.690.000}{1000} = 2690 \text{ (€)}.$$

In tal caso, inoltre, il numero annuo di ordinazioni è: $N = \frac{67600}{1000} = 67,6$.

83.4 IL PERT

83.4.1 Con la proposta di lavoro che ci accingiamo a fare potresti avere l'impressione che stiamo giocando o che vogliamo fare di te un cuoco. Per la verità, se così fosse, non ci sarebbe nulla di male, ma non è questa la nostra finalità e ti preghiamo perciò di seguirci con attenzione e pazienza.

Ci impegniamo dunque nell’elaborazione di una ricetta e precisamente nella preparazione di un risotto ai funghi per 4 persone. Ipotizziamo di disporre degli ingredienti necessari, che sono i seguenti: 320 g di riso, 40 g di funghi porcini secchi, 1 litro circa di brodo di carne, 50 g di parmigiano grattugiato, 100 cl di vino bianco secco, 1 cipolla piccola, 1 spicchio d’aglio, 1 noce di burro, sale, pepe, olio di semi, 2 padelle e 2 pentolini.

La seguente tabella (Tab. 7) fornisce l’elenco delle attività necessarie a preparare il risotto e la loro relativa durata.

TAB. 7 – Preparazione di un risotto ai funghi (4 porzioni): elenco attività e relativa durata (in minuti).

Attività	Descrizione	Durata (minuti)	Attività immediatamente precedenti
A	Scaldare 1 litro d’acqua in un pentolino	10	---
B	Mettere i funghi (secchi) a bagno nell’acqua calda	10	A
C	Asciugare i funghi e tagliarli a tocchi	2	B
D	Scaldare il brodo di carne	10	---
E	Capare uno spicchio d’aglio e metterlo a soffriggere in una padella contenente olio di semi	4	---
F	Aggiungere i funghi e far rosolare	3	C-E
G	Sfumare con vino bianco secco e lasciar cuocere	2	F
H	Aggiungere due mestoli di brodo di carne e coprire	0,5	D
I	Lasciar cuocere, aggiustando con sale e pepe	10	G-H
L	Spegnere e mettere da parte	0	I
M	Capare la cipolla e tagliarla a fettine sottili	2	---
N	Far sciogliere una noce di burro in una padella	1	---
P	Aggiungere la cipolla e farla rosolare	2	M-N
Q	Aggiungere il riso (320 g) e farlo tostare, rigirandolo in continuazione	3	P
R	Coprire con brodo di carne	0,5	D
S	Lasciar cuocere	2	Q-R
T	Aggiungere i funghi che erano stati messi da parte	0,5	L-S
U	Continuare a lasciar cuocere, aggiungendo il brodo di carne poco alla volta e dopo che quello aggiunto in precedenza si è asciugato	15	T
V	Aggiungere il parmigiano e mantecare	1,5	U
Z	Il risotto è pronto per essere servito	0	V

Ciò che ci interessa, di questa ricetta, è calcolare il tempo complessivo dell’operazione e valutare se c’è modo di minimizzarlo.

Il modo migliore per fare ciò è di trasformare la tabella in un grafo reticolare, fatto cioè di “frecce” e tondini” (detti più propriamente *archi* e *nodi*). Gli archi rappresentano le attività, i nodi rappresentano l’inizio e/o la fine di un’attività (Fig. 6).

Ogni nodo si dice che rappresenta un *evento* ed è contrassegnato con un numero intero compreso fra 0 (inizio dell’operazione) ed n (fine dell’operazione – nel caso specifico n=15). A fianco di ogni attività che si svolge in un determinato lasso di tempo è indicata, in parentesi tonde, la durata dell’attività medesima (**l’unità di misura dei tempi è la stessa per tutte le attività**). Gli archi tratteggiati rappresen-

tano un'attività di durata nulla: stanno semplicemente ad indicare quale fra due attività contigue precede l'altra. A fianco di tali attività non è indicata la durata, che per l'appunto è 0.

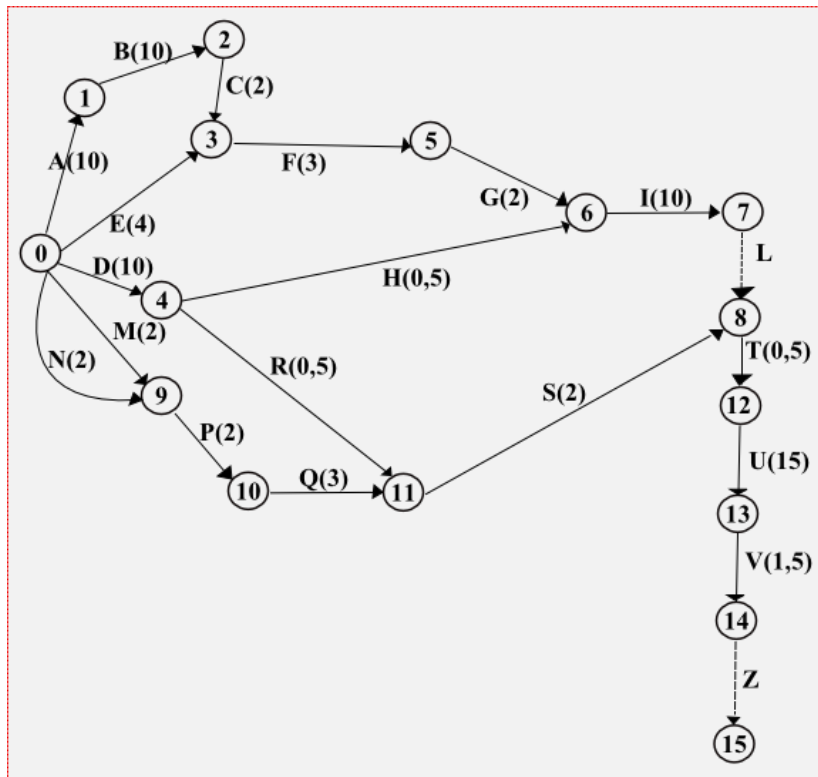


FIG. 6

83.4.2 Utilizzando il reticolo si può determinare il cosiddetto *percorso critico*: è chiamata così la successione delle attività che richiede il tempo più lungo per la realizzazione del progetto.

Per questo è necessario calcolare il tempo massimo che intercorre fra due eventi.

Per esempio, fra gli eventi 0 ed 1 non c'è dubbio che il tempo massimo è uguale alla durata dell'attività A, vale a dire 10 minuti.

Ma per calcolare il tempo massimo fra gli eventi 0 e 3 bisogna osservare che ci sono due percorsi: uno è il percorso diretto 0-3 che richiede un tempo pari alla durata dell'attività E (cioè 4 minuti), un altro è il percorso 0-1-2-3, la cui durata è uguale alla somma delle durate delle attività A, B, C (e perciò: $10+10+2=22$ minuti). Quindi il tempo massimo fra gli eventi 0 e 3 è 22 minuti.

In situazioni più complesse di quella che stiamo descrivendo esistono strategie sofisticate che permettono di calcolare il tempo massimo fra due qualsiasi attività, ma nel nostro caso bastano pochi conti e un po' d'attenzione.

Si trova così che il tempo massimo fra gli eventi 0 e 11 è quello relativo al cammino 0-4-11 ed è uguale a 10,5 minuti; mentre il tempo massimo fra gli eventi 0 e 6 è quello relativo al percorso 0-1-2-3-5-6 ed è uguale a $22+3+2=27$ minuti.

Di modo che il tempo massimo fra gli eventi 0 e 8 è quello relativo al cammino 0-1-2-3-5-6-7-8 ed è uguale a $27+10+0=37$ minuti.

Infine il tempo massimo fra l'evento iniziale 0 e quello finale 15 è uguale a $37+0,5+15+1,5+0=54$ minuti ed è quello relativo al cammino 0-1-2-3-5-6-7-8-12-13-14-15, ossia quello determinato dalla se-

guente successione di attività (in parentesi, a fianco di ogni attività, sono indicati i numeri che contrassegnano il nodo iniziale e quello finale dell'attività):

A(0,1)-B(1,2)-C(2,3)-F(3,5)-G(5,6)-I(6,7)-**L(7,8)**-T(8,12)-U(12,13)-V(13,14)-**Z(14,15)**.

Quelle contrassegnate in rosso sono attività di durata nulla.

È questo il *percorso critico*. E, soprattutto, il tempo relativo a tale percorso è la durata complessiva della realizzazione della ricetta.

Se i tempi fissati per ogni attività sono inalterabili, non c'è modo ovviamente di ridurre quella durata, ma se quei tempi sono solo delle stime, sulle quali si può in qualche modo intervenire, allora è possibile trovare delle strategie che consentano di minimizzare tale durata complessiva.

83.4.3 Il metodo che abbiamo descritto ha come finalità di tenere sotto controllo le attività di un qualsiasi progetto. Esso consente, in ultima analisi, di individuare in un reticolo la successione più critica delle attività da seguire per la realizzazione del progetto, vale a dire la sequenza di attività che ha la durata massima. Che si tratti di un progetto banale (ricetta del risotto) o di un progetto complesso (organizzazione di un ufficio, costruzione di un palazzo, organizzazione del lavoro di una ditta di trasporti, ecc.) le cose vanno sostanzialmente allo stesso modo. È inoltre indifferente che i tempi coinvolti siano minuti, ore, giorni, settimane, mesi o anni, purché nella registrazione delle durate sia usata sempre la stessa unità di misura.

Il metodo che abbiamo descritto va sotto il nome di PERT (acronimo per *Program Evaluation and Review Technique*, Programma di valutazione e tecnica di revisione).

Il metodo PERT è stato progettato per la prima volta dalla US Navy per consentire il coordinamento del lavoro di migliaia di persone coinvolte nella costruzione di missili con testate nucleari POLARIS (1958), con l'obiettivo di ridurre i tempi di costruzione. Per un po' rimase un segreto militare, ma da quando fu rivelato (1960) diventò uno strumento di controllo nella progettazione sia in campo industriale che commerciale.

83.4.4 Non ci soffermiamo sullo studio delle modalità che consentono di ridurre la durata massima di realizzazione di un progetto né sulla conseguente necessità di procedere ad una revisione del progetto medesimo. Facciamo invece un breve cenno all'ipotesi che le durate delle attività per la realizzazione di un progetto non siano certe ma solo probabili. In questo caso c'è un ovvio margine di incertezza di cui bisogna tener conto e siccome non è possibile conoscere con certezza il tempo di realizzazione del progetto, diventa interessante conoscere la probabilità che esso sia realizzato entro un limite di tempo prefissato.

Ebbene, quando le durate delle varie attività A_k sono aleatorie (il che, ad onor del vero, accade quasi sempre se non addirittura sempre), la teoria insegna che bisogna prendere in considerazione, per la durata di ogni A_k , tre valori:

- la *stima più ottimistica*, cioè la durata dell'attività nel caso in cui tutto ha funzionato alla perfezione; indichiamo con \mathbf{a}_k questo valore;
- la *stima più pessimistica*, cioè la durata dell'attività nel caso in cui tutto è andato storto; indichiamo con \mathbf{b}_k questo valore;
- la *stima più probabile*, che è la durata media dell'attività ipotizzando, sulla base delle esperienze precedenti, che tale durata si distribuisca come una variabile aleatoria normale; indichiamo tale va-

lore con m_k .

La teoria insegna pure che la stima più attendibile della durata dell'attività A_k è il valore t_k tale che:

$$[1] \quad t_k = \frac{a_k + b_k + 4m_k}{6}$$

con una deviazione standard σ_k tale che:

$$[2] \quad \sigma_k = \frac{b_k - a_k}{6}.$$

La teoria insegna inoltre che la somma delle durate delle singole attività del percorso critico è assimilabile ad una variabile aleatoria normale, avente media μ uguale alla somma $\sum_k t_k$ delle stime più attendibili delle durate delle singole attività A_k del percorso critico e deviazione standard σ uguale a

$$\sqrt{\sum_k \sigma_k^2}.$$

Fissato allora uguale a t il tempo massimo entro il quale si vuole realizzare il progetto, possiamo calcolare la probabilità $P[T \leq t]$ che il tempo T di realizzazione del progetto non superi t . Precisamente, ipotizzando che sia $t > \mu$ (Fig. 7), si ha:

$$P[T \leq t] = 0,5 + P[\mu \leq T \leq t] = 0,5 + P\left[0 \leq N \leq \frac{t - \mu}{\sigma}\right],$$

avendo indicato con N la variabile normale standardizzata.

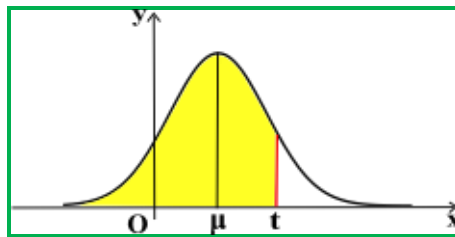


FIG. 7

Forniamo un esempio, prendendo in considerazione ancora una volta la ricetta del risotto, e riportiamo in una tabella (Tab. 8) quelle che si suppongono essere le varie stime della durata delle attività del percorso critico. Detto per inciso, quelle che a suo tempo abbiamo considerato come le durate effettive delle singole attività sono in effetti le stime più attendibili t_k .

TAB. 8 – Stime della durata (in minuti) delle attività del percorso critico.

Attività del percorso critico	a = Stima più ottimistica	b = Stima più pessimistica	m = Stima più probabile	t_k = Stima più attendibile	σ_k^2 = Varianza
$A_1=A(0,1)$	8,5	11,3	10,05	10	49/225
$A_2=B(1,2)$	7,0	11,0	10,50	10	4/9
$A_3=C(2,3)$	1,2	3,0	1,95	2	9/100
$A_4=F(3,5)$	2,5	4,5	2,75	3	1/9
$A_5=G(5,6)$	1,5	2,5	2,00	2	1/36
$A_6=I(6,7)$	9,4	10,6	10,00	10	1/25
$A_7=T(8,12)$	0,4	0,7	0,47	0,5	1/400
$A_8=U(12,13)$	13,0	16,0	15,25	15	1/4
$A_9=V(13,14)$	1,0	3,0	1,25	1,5	1/9
Totali	44,5	62,6	54,22	54	4661/3600

Fissato adesso come tempo massimo per la realizzazione del progetto (la ricetta del risotto nel caso dell'esempio) il tempo $t = 56$ minuti, la probabilità che il tempo T di realizzazione del progetto non superi t è:

$$P[T \leq t] = 0,5 + P\left[0 \leq N \leq \frac{t - \mu}{\sigma}\right],$$

essendo $\mu = 54$ e $\sigma = \sqrt{\frac{4661}{3600}} \approx 1,13$. Ragion per cui:

$$P[T \leq 56] = 0,5 + P\left[0 \leq N \leq \frac{56 - 54}{1,13}\right] = 0,5 + P[0 \leq N \leq 1,7];$$

tenendo ora presente la tabella della distribuzione normale standardizzata, risulta: $P[0 \leq N \leq 1,7] \approx 0,46$; pertanto: $P[T \leq 56] \approx 0,96$. Vale a dire: è di circa il 96% la probabilità che il progetto (la ricetta del risotto) sia realizzato in un tempo non superiore a 56 minuti. È ovviamente del 4% la probabilità che il tempo di realizzazione sfondi il tetto di 56 minuti.

83.4.5 Se è abbastanza semplice trovare il percorso critico di un PERT una volta che è stato costruito il grafo reticolare, non è invece banale questa costruzione partendo dalla tabella delle attività. Allo scopo di fornire qualche suggerimento in più proponiamo un altro problema, ancorché generico e non riferito ad alcuna situazione concreta.

- **PROBLEMA 1.** Con riferimento al piano di progettazione sintetizzato nella tabella sottostante (Tab. 9), costruire il grafo reticolare e determinare il percorso critico e la durata massima di realizzazione del progetto.

TAB. 9 – Piano di progettazione

Attività	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L
Durata (giorni lavorativi)	5	7	3	6	2	4	4	8	2	0
Attività immediatamente precedenti	---	A	---	A	B-C	B-C	D-E	B-C	F	G-H-I

RISOLUZIONE. Per la costruzione del reticolo vale sostanzialmente un'unica regola fondamentale: quando due o più attività sono le attività immediatamente precedenti di un'altra (esempio: G, H, I rispetto ad L) allora gli archi che le rappresentano hanno come nodo finale lo stesso nodo che, a sua volta, è nodo iniziale dell'attività che segue (Fig. 8, per l'esempio considerato).

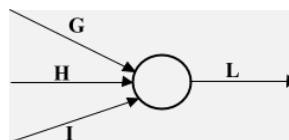


FIG. 8

Se si tiene presente questa regola le difficoltà di costruzione del reticolo sono ridotte al minimo. Si può poi partire, nella costruzione, dal nodo iniziale dell'intero reticolo, contrassegnato dal numero 0; oppure andare a ritroso partendo dall'ultimo nodo del reticolo. Sono due procedimenti più o meno equivalenti. Ovviamente, dopo aver costruito un abbozzo del reticolo, lo stesso può essere migliorato sul piano estetico.

La figura 9, costruita tenendo presenti le precedenti note, rappresenta il reticolo correlato alla tabella 9.

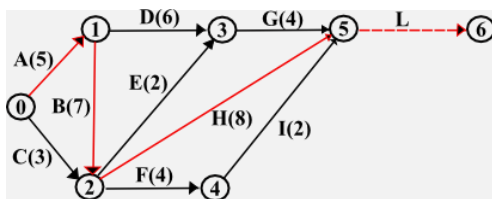


FIG. 9

In tale figura alcuni archi sono rimarcati in rosso: individuano esattamente il percorso critico. Si evince che la durata massima di realizzazione del progetto è di 20 giorni lavorativi.

• PROBLEMA 2. Con riferimento al problema 1, si supponga che le durate delle attività siano le stime più attendibili delle durate medesime. Si supponga inoltre che le stime più ottimistiche siano ridotte del 15% rispetto ad esse e quelle più pessimistiche siano aumentate del 20%.

- a) Calcolare le stime più probabili delle durate delle attività del percorso critico.
- b) Ammesso che sia stato stabilito il limite massimo di 22 giorni lavorativi, qual è la probabilità che il progetto sia realizzato entro tale limite?

RISOLUZIONE.

a) Lasciamo a te il calcolo delle stime richieste. Basta tener presente la formula [1]. Ti forniamo i risultati, che sintetizziamo nella tabella sottostante (Tab. 10), non prima di aver segnalato che il percorso critico (contrassegnato in rosso in figura 9) è il percorso 0-1-2-5-6.

Attività del percorso critico	A	B	H
Stime più probabili	4,9	6,9	7,9

TAB. 10

b) Una volta constatato che la media μ delle durate del percorso critico è $\mu=20$ giorni e trovato che la deviazione standard è $\sigma \approx 0,68$ la probabilità cercata è:

$$P[T \leq 22] = 0,5 + P\left[0 \leq N \leq \frac{22 - \mu}{\sigma}\right] = 0,5 + P\left[0 \leq N \leq \frac{22 - 20}{0,68}\right] = 0,5 + P[0 \leq N \leq 1,46].$$

Ossia, tenendo presente la tabella della distribuzione normale standardizzata, la quale permette di calcolare che $P[0 \leq N \leq 1,46] \approx 0,42$, si trova: $P[T \leq 22] \approx 92\%$.

VERIFICHE ⁽³⁾

Problemi di scelta in condizioni di certezza (nn. 1-11):

1. Ad un circo equestre, che vuole esibirsi in una certa città, l'ENEL, per il pagamento dell'energia elettrica, propone tre alternative:
 - A₁: € 0,16 per kwh più una spesa fissa giornaliera di € 1;
 - A₂: € 0,165 per kwh più una spesa fissa giornaliera di € 0,8;
 - A₃: € 0,17 per kwh senza altre spese.

³ I problemi (o gli esercizi) contrassegnati col simbolo ® sono risolti (totalmente o parzialmente) e la risoluzione è situata nella cartella "Integrazione 2", file "Matematica – Integrazione 2, unità 28-88", pubblicata in questo medesimo sito e scaricabile gratuitamente.

Stabilire qual è la tariffa più conveniente per il circo.

2. Per il trasporto di una certa merce, una ditta può scegliere tra due proposte di pagamento:

P_1 : 0,22 €/km più una spesa fissa di € 12;

P_2 : 0,26 €/km più una spesa fissa di € 10.

Qual è la proposta più economica per l'azienda?

3. La produzione di un certo manufatto può avvenire seguendo due procedimenti, sintetizzati nella seguente tabella:

	Procedimento P_1	Procedimento P_2
Costo di produzione	€ 0,25 al pezzo	€ 0,23 al pezzo
Spesa fissa giornaliera	€ 10	€ 11
Prezzo di vendita	€ 0,60 al pezzo	€ 0,60 al pezzo

Stabilire quale procedimento comporta il maggior guadagno per la ditta produttrice.

4. Per la produzione di una certa merce una fabbrica può seguire due procedimenti – A, B – tali che, detto C_u il costo complessivo medio giornaliero (in migliaia di euro per quintale) necessario per produrre la quantità Q (in quintali) di quella merce, risulti:

• con il procedimento A : $C_u = 8Q - Q^2$,

• con il procedimento B : $C_u = \frac{Q^2}{2} - 6Q + 32$.

Stabilire qual è il procedimento più conveniente per la fabbrica, posto che la produzione non possa superare i 7 quintali di merce al giorno.

[R. meglio A se $0 < Q < 4$ oppure $\frac{16}{3} < Q \leq 7$]

5. Un certo numero x di manufatti può essere ottenuto giornalmente con tre metodi diversi di produzione – A, B, C – tali che, detto y l'utile giornaliero in migliaia di euro, si ha rispettivamente:

$$A) y = -x^2 + 5x, \quad B) y = -x^2 + 2x + 6, \quad C) y = 4.$$

Stabilire qual è il metodo di produzione che procura il maggior guadagno alla ditta produttrice.

6. Un grossista può acquistare della merce da due fornitori, i quali gli praticano i seguenti prezzi:

- fornitore A: 12 €/kg più una quota fissa di € 900 per il trasporto;

- fornitore B: 10 €/kg più una quota fissa di € 1500 per il trasporto.

a) Da quale fornitore si servirà il grossista per ottimizzare il costo?

b) Per quale quantitativo di merce non importa chi sia il fornitore?

7. Su un'autovettura predisposta "a benzina" si vuole installare un impianto "a gasolio". La benzina costa 1,885 euro al litro e il gasolio 1,786 euro al litro. Il costo dell'impianto è di € 2500, la tassa annua per il bollo per l'auto a benzina di € 490, quella per l'auto a gasolio di € 580. La vettura percorre mediamente 13 km con un litro di carburante, quale che esso sia.

Trovare qual è il minimo numero di chilometri che si devono percorrere mediamente in un anno affinché risulti conveniente l'installazione dell'impianto a gasolio, posto che, dopo l'installazione, si prevede che si possano percorrere complessivamente 150.000 km.

8. Un capitale C può essere investito per t anni ad un interesse semplice del 6% o ad un interesse composto del 4%. Quale dei due regimi di capitalizzazione è più conveniente?

[R. Ad interesse semplice per $0 < t < 20,335$; indifferente per $t \approx 20,335$ anni; ...]

9. Un'azienda produce un articolo con un costo medio di produzione di € 2,3 ed una spesa fissa mensi-

le di € 2700. Sapendo che l'articolo viene venduto a 3,8 euro al pezzo, calcolare quanti pezzi bisogna produrre e vendere in un mese affinché l'azienda non subisca un passivo. [R. almeno 1800]

10. Per la produzione di una certa merce un'azienda paga mensilmente € 2950 per spese varie (fitto locali, assicurazione, manutenzione macchinari, consumo di energia elettrica). Il costo di produzione di x quintali di merce, espresso in euro, è dato dall'espressione: $\frac{1}{2}x^2 - 40x$. La merce è venduta al prezzo di 12 €/q.
- Quanti quintali di merce devono essere prodotti affinché il costo complessivo sia minimo?
 - Qual è tale costo minimo?
 - Quanti quintali di merce devono essere prodotti affinché il profitto sia massimo?
 - Quant'è questo guadagno?
 - Entro quali limiti di produzione non c'è deficit per l'azienda?
- [R. a) 40 q; b) € 2150; c) 650 q; d) € 13950; e) all'incirca $50,8 q < x < 1449,1 q$]
11. Un'azienda produce un bene in unità indivisibili (per es.: autovetture, biciclette, scarpe, vestiti, pacchi di pasta, confezioni di bottiglie acqua minerale, confezioni di bottiglie di vino, ecc.). Il costo medio di produzione, per acquisto di materia prima e lavorazione, è di 400 euro al pezzo con una spesa fissa mensile di € 28.000, mentre il prezzo di vendita dipende dal numero n dei pezzi venduti secondo la seguente legge: $p(n) = 5000 - 18n$ (euro). Tenendo presente che l'azienda non può produrre più di 200 pezzi al mese, quale produzione le assicura il massimo guadagno e quant'è questo guadagno? In tal caso qual è il prezzo unitario di vendita? [R. 128 pezzi; € 291.088; 2696 euro/unità]
12. Una ditta produce un bene in unità indivisibili che vende in confezioni da 400 pezzi. Il prezzo di vendita è di 63 euro al pezzo per le prime 2 confezioni, mentre è scontato del 10% per le successive 2 confezioni, di un ulteriore 10% per la 5^a e la 6^a confezione e di un altro 10% per le confezioni successive. La ditta deve sostenere per la produzione del bene, una spesa fissa di € 8000, cui va aggiunto il costo di € 45 per ogni pezzo prodotto, ma non può produrre più di 10 confezioni per settimana. Calcolare il numero di confezioni che la ditta deve vendere per realizzare il massimo guadagno e trovare qual è questo guadagno. [R. 6; € 20.080]

Problemi di scelta in condizioni di incertezza (nn. 13-17):

13. Nella tabella sottostante sono registrati i valori che la variabile aleatoria X associa a ciascuno degli eventi incompatibili E_1, E_2, E_3, E_4 di probabilità precisate nell'ultima colonna della tabella. Tali eventi si manifestano con modalità differenti secondo 3 alternative: A_1, A_2, A_3 . Determinare l'alternativa più favorevole nel caso in cui si debba: a) massimizzare X , b) minimizzare X , seguendo tutti e tre i criteri studiati (nel caso della valutazione del rischio, fissare $r=50\%$). Mettere a confronto i risultati ottenuti con i diversi criteri.

Eventi	Alternative			Probabilità
	A1	A2	A3	
E1	385	290	310	0,26
E2	292	315	295	0,27
E3	308	265	285	0,29
E4	325	280	320	0,18

14. Una ditta può produrre beni seguendo due procedimenti alternativi:
- un procedimento comporta una spesa fissa mensile di € 48.000 ed un costo unitario di € 40;

- un altro procedimento comporta una spesa fissa mensile di € 54.000 ed un costo unitario di € 38.

Il bene prodotto è venduto a 136 euro al pezzo, ma il numero dei pezzi venduti mensilmente non è costante ma si comporta come una variabile aleatoria con le specifiche della tabella sottostante. Dopo aver completato questa tabella, trovare quale processo produttivo procura all'azienda il maggior profitto. Mettere a confronto i criteri di risoluzione conosciuti (nel caso di valutazione del rischio porre $r=60\%$).

Numero pezzi venduti	410	430	450	480	500	510
Probabilità	0,05	0,12	0,28	0,31	0,16	?

15. Risolvere lo stesso problema precedente supponendo che le probabilità dei pezzi venduti siano quelli registrati nella tabella sottostante e ponendo $r=50\%$ nel caso di valutazione del rischio.

Probabilità	0,08	0,14	0,30	0,25	0,17	?
-------------	------	------	------	------	------	---

16. Un'impresa industriale ottiene da due differenti fornitori le seguenti condizioni di acquisto di energia elettrica:

F1: 2,22 €/kwh più una spesa fissa bimensile di € 70;

F2: 2,25 €/kwh più una spesa fissa bimensile di € 50.

L'impresa, che lavora 5 giorni alla settimana, da lunedì a venerdì, valuta, sulla base di precedenti esperienze, che i consumi di energia elettrica nei 5 giorni lavorativi si distribuiscono come una variabile aleatoria con le specifiche riportate nella tabella sottostante. Dopo aver completato questa tabella, trovare da quale fornitore è più conveniente servirsi. Mettere a confronto i criteri di risoluzione conosciuti (nel caso di valutazione del rischio porre $r=70\%$).

Giorno	LUN	MAR	MER	GIO	VEN
Consumo (in kwh)	1200	1160	1280	1215	1195
Probabilità	0,12	0,18	?	0,24	0,14

17. Risolvere lo stesso problema precedente supponendo che le probabilità dei pezzi venduti siano quelli registrati nella tabella sottostante e ponendo $r=50\%$ nel caso di valutazione del rischio.

Probabilità	0,09	0,15	?	0,25	0,22
-------------	------	------	---	------	------

Problema delle scorte (nn. 18-21):

18. Un'impresa industriale ha valutato che ha bisogno di acquistare 3840 m³ di merce in un anno. Programma un piano di rifornimento che comporti il minimo costo. Assumendo che lo svuotamento del magazzino avvenga con andamento uniforme e tenendo presente che il magazzino ha una capacità di magazzinaggio di 500 m³, che ogni ordinazione ha un costo fisso di € 120 e che il costo annuo di magazzinaggio è di 4 €/m³, calcolare:

- a) quanta merce deve essere ordinata ad ogni rinnovo della scorta;
- b) qual è il costo di un rifornimento (escludendo il costo della merce e del trasporto);
- c) quante ordinazioni devono essere fatte in un anno.

[R. a) 480 m³; b) € 1920; c) 8]

19. Risolvere lo stesso problema precedente ma sotto l'ipotesi che la capacità del magazzino sia di 400 m³. [R. a) 400 m³; b) € 1952; c) 9,6]
20. Una ditta commerciale vende beni in unità indivisibili, che tiene a disposizione in un magazzino che può contenere al massimo 4000 unità. Le spese di magazzinaggio di ogni unità ammontano mediamente a 3 euro l'anno. La ditta ha valutato che, per poter soddisfare le necessità della clientela, ha bisogno annualmente di 92.000 unità del bene commerciato. Sapendo che ogni ordinazione comporta una spesa fissa di € 150 (escluse le spese per l'acquisto della merce e per il trasporto) e ipotizzando che lo svuotamento del magazzino avvenga con modalità uniforme, nell'ipotesi che il costo per il rifornimento sia ridotto al minimo, calcolare:
- quante unità devono essere ordinate ad ogni rinnovo delle scorte;
 - qual è il costo di un'ordinazione;
 - quale intervallo di tempo intercorre fra due ordinazioni successive.
- [R. a) 3033; b) € 9099,45; c) circa 12 giorni]
21. Risolvere lo stesso problema precedente ma sotto l'ipotesi che la capacità del magazzino sia di 2500 unità.

Il PERT (nn. 22-28):

22. Nella tabella sottostante sono registrate le stime più ottimistiche, quelle più pessimistiche e quelle più probabili delle durate (esprese in giorni lavorativi) delle attività del percorso critico di un piano di progettazione.

Stime delle durate (esprese in giorni lavorativi) delle attività del percorso critico

Attività	Stime più ottimistiche	Stime più pessimistiche	Stime più probabili
A ₁	61	82	75
A ₂	57	71	63
A ₃	7	9	8
A ₄	2	2	2
A ₅	73	98	84
A ₆	11	22	15

- Calcolare le stime più attendibili delle durate delle predette attività.
- Amnesso che sia stato fissato il limite di 260 giorni lavorativi per la realizzazione del progetto, qual è la probabilità che questo limite sia superato?

[R. a) 73,8; 63,3; 8; 2; 84,5; 15,5. b) circa 2%]

23. Nella tabella sottostante sono registrate le stime più probabili delle durate (esprese in ore) delle attività del percorso critico di un piano di progettazione.

Stime delle durate più probabili (esprese in ore) delle attività del percorso critico

Attività	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅
Stime più probabili	38	7	24	15	18

Rispetto ad esse, le stime più ottimistiche sono ridotte del 13% mentre quelle più pessimistiche sono aumentate del 19%.

- Calcolare le stime più attendibili delle durate delle predette attività.

b) Ammesso che sia stato fissato il limite di 105 ore per la realizzazione del progetto, qual è la probabilità che questo limite sia superato?

24. Con riferimento al piano di progettazione sintetizzato nella tabella sottostante, costruire il grafo reticolare e determinare il percorso critico e la durata massima di realizzazione del progetto.

Piano di progettazione

Attività	Durata (giorni lavorativi)	Attività immediatamente precedenti
A	3	---
B	5	---
C	0	A
D	12	A
E	10	C
F	9	B
G	7	D-E-F
H	10	G
I	0	D-E-F
L	18	I
M	2	H-L

25. Con riferimento al medesimo problema precedente, si supponga che le durate delle attività siano le stime più attendibili delle durate medesime. Si supponga inoltre che le stime più probabili delle stesse durate siano quelle riportate nella tabella sottostante, mentre le stime più ottimistiche siano ridotte del 12% rispetto a queste.

Stime più probabili delle durate (in giorni lavorativi) delle attività varie

Attività	A	B	D	E	F	G	H	L	M
Durata	3,2	4,7	11,5	10,3	9,2	6,5	9,5	17,2	2,0

- a) Calcolare le stime più pessimistiche delle durate delle attività del percorso critico.
 b) Ammesso che sia stato stabilito il limite massimo di 35 giorni lavorativi, qual è la probabilità che il progetto sia realizzato entro tale limite?

[R. a) 7,064; 9,104; 23,72; 2,24. b) circa 75%]

26. Con riferimento al piano di progettazione sintetizzato nella tabella sottostante, costruire il grafo reticolare e determinare il percorso critico e la durata massima di realizzazione del progetto.

Piano di progettazione

Attività	Durata (giorni lavorativi)	Attività immediatamente precedenti
A	6	---
B	8	A
C	9	---
D	4	C
E	12	C
F	7	B-D
G	10	B-D
H	5	F
I	0	E-F-G

27. Con riferimento al medesimo problema precedente, si supponga che le durate delle attività siano le stime più attendibili delle durate medesime. Si supponga inoltre che, rispetto ad esse, le stime più ottimistiche delle stesse durate siano ridotte del 14% mentre quelle più pessimistiche siano aumentate del 12%.
- Calcolare le stime più probabili delle durate delle attività del percorso critico.
 - Amnesso che sia stato stabilito il limite massimo di 27 giorni lavorativi, qual è la probabilità che il progetto sia realizzato entro tale limite?
28. **Ⓜ** La realizzazione di un determinato progetto richiede il completamento di 6 attività che per comodità denominiamo A, B, C, D, E, F, tra di loro interdipendenti. Le attività A, B e D richiedono ciascuna 5 giorni lavorativi, ma A e B possono essere avviate solo dopo che C è stata completata almeno per metà e D solo dopo che A è stata completata almeno per 1/5. L'attività C richiede 4 giorni ma può partire solo dopo che E è stata completata. Le attività E ed F richiedono ciascuna 6 giorni, ma E può essere avviata solo dopo che F è stata completata almeno per 1/3. Costruire il grafo reticolare e determinare il percorso critico e la durata complessiva per la realizzazione del progetto.
- [R. Conviene scomporre le attività A, C e F ciascuna in due parti opportune: A'(1) e A''(4), C'(2) e C''(2), F'(2) e F''(4). ... ; 16 gg]

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

DOMANDE.

- Un'azienda produce un articolo con un costo medio di produzione di € 1,8 ed una spesa fissa mensile di € 1800. Sapendo che l'articolo viene venduto a 2,5 euro al pezzo, quanti pezzi bisogna produrre e vendere in un mese affinché l'azienda guadagni almeno 1.000 euro ?
- Quando un problema di scelta si dice *discreto*? Quando si dice *continuo*?
- Qual è la differenza fra un problema di scelta in condizioni di certezza ed uno in condizioni di incertezza?
- Elenca i criteri, a te noti, per la risoluzione di un problema di scelta in condizioni di incertezza.
- Quale problema risolve il cosiddetto criterio max-min? Come funziona?
- È vero che nella risoluzione di un problema di scelta in condizioni di incertezza, l'alternativa più favorevole dipende dal criterio seguito?
- Quale modello matematico risolve il problema della gestione delle scorte di magazzino?
- Un'azienda deve programmare un piano di approvvigionamento che comporti la spesa minima per il magazzino. È vero che la risoluzione più economica consiste nell'ordinare tanta merce quanta ne può contenere il magazzino?
- Cos'è il percorso critico del PERT?
- Nella valutazione di un progetto con il metodo del PERT si trova che la stima più attendibile della durata delle attività del percorso critico è 25 giorni lavorativi, con una deviazione standard di 3 giorni lavorativi. Posto che sia stato fissato come termine ultimo 27 giorni per la realizzazione del progetto, qual è la probabilità che effettivamente il tempo di realizzazione non superi quel tetto?

RISPOSTE.

1. Si calcola il guadagno mensile dell'azienda: $G(x)=2,5x-(1,8x+1800)$, essendo x il numero dei pezzi prodotti e venduti. Deve essere soddisfatta la condizione $G(x)\geq 1000$. A conti fatti si trova $x\geq 4000$.
2. Un problema di scelta si dice *discreto* o *continuo* a seconda rispettivamente che la variabile indipendente vari assumendo solamente valori discontinui (per esempio, valori interi) o valori continui (per esempio variando in un intervallo reale).
3. In un problema di scelta in condizioni di certezza i dati sono fissi e la soluzione è predeterminata. In uno in condizione di incertezza i dati sono legati a fenomeni casuali e della soluzione si può dare solamente una valutazione probabilistica.
4. I criteri richiesti sono i seguenti: criterio del valor medio, criterio del valor medio con valutazione del rischio, criterio del pessimista (il quale ultimo, a sua volta, può essere il criterio max-min o il criterio mini-max).
5. Il criterio è un caso particolare del criterio del pessimista e risolve un problema di scelta in condizioni di incertezza quando la funzione obiettivo deve essere massimizzata. In base a tale criterio, si sceglie il valore minimo in ogni alternativa e fra tutti i minimi selezionati si sceglie il massimo: l'alternativa che gli corrisponde è quella favorevole alla situazione.
6. È proprio così. Questo induce a riflettere prima di prendere decisioni affrettate.
7. Il modello matematico è il seguente:

Rendere minima la funzione (detta *funzione obiettivo*):

$$y = \frac{s}{2}x + S\frac{Q}{x}$$

sotto la condizione $0 < x \leq C$, essendo:

- y il costo complessivo per il rifornimento del magazzino in un periodo stabilito (generalmente un anno), al netto delle spese sostenute per l'acquisto della merce e per il trasporto;
 - Q la quantità complessiva di merce ordinata e immagazzinata in un periodo di tempo (un anno);
 - C la capacità del magazzino (misurata ovviamente in unità di capacità);
 - x la quantità di merce che bisogna ordinare e immagazzinare ad ogni rifornimento (misurata in unità di capacità);
 - s la spesa (fissa) sostenuta per immagazzinare una quantità unitaria di merce;
 - S la spesa (fissa) sostenuta per una singola ordinazione.
8. Si tratta di risolvere un problema di gestione delle scorte di magazzino. Se si trova che la capacità della merce che rende minima la funzione obiettivo è maggiore o uguale alla capacità di magazzino, la risposta alla domanda è sì, ma se è minore la risposta è no.
 9. È la sequenza delle attività che richiede il tempo maggiore.
 10. Si ha:

$$P[T \leq 27] = 0,5 + P\left[0 \leq N \leq \frac{27-25}{3}\right] \approx 0,74.$$

È dunque di circa il 74% la probabilità cercata.