

Prerequisiti:

- Possedere i concetti di costo, ricavo, profitto.
- Risolvere un sistema lineare di  $n$  equazioni in  $n$  incognite.
- Rappresentare graficamente un sistema lineare di  $n$  disequazioni in 2 indeterminate.

Questa unità riguarda solamente l'Istituto Tecnico:

- settore Tecnologico, indirizzo Trasporti e Logistica (2° biennio);
- settore Economico (5ª classe).

### OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità gli allievi devono saper:

- *risolvere problemi di PL in due variabili di azione con il metodo grafico*
- *risolvere problemi di PL in due o più variabili di azione con il metodo del semplice e con l'uso del "pivot"*

**84.1 Problemi di PL con due variabili di azione: metodo grafico nel piano.**

**84.2 Metodo del semplice per i problemi di massimo.**

**84.3 Metodo del semplice per i problemi di minimo.**

**84.4 Problemi risolti.**

***Verifiche.***

Una breve sintesi per domande e risposte.

## Programmazione lineare

## Unità 84

## 84.1 PROBLEMI DI PL CON DUE VARIABILI DI AZIONE: METODO GRAFICO NEL PIANO

**84.1.1** Molte delle cose che andiamo a dire in questo paragrafo sono probabilmente tra le conoscenze da te acquisite nel corso del primo biennio. Per ogni evenienza le ripetiamo in modo da fornirti dell'argomento una trattazione completa ed esauriente. Partiamo da un problema concreto.

- **PROBLEMA.** Una fabbrica produce due manufatti: A e B. Per il manufatto A, che poi rivende a € 1,5 al pezzo, spende € 0,3 al pezzo per l'acquisto delle materie prime e per la lavorazione del prodotto e deve affrontare una spesa fissa giornaliera di € 250. Per il manufatto B, che poi rivende a € 1,1 al pezzo, spende € 0,2 al pezzo per l'acquisto delle materie prime e per la lavorazione del prodotto e deve affrontare una spesa fissa giornaliera di € 140.

Per impegni assunti la fabbrica deve produrre giornalmente almeno 400 pezzi del manufatto B ma la produzione complessiva giornaliera dei due manufatti non può superare i 900 pezzi e il numero dei pezzi di A non può superare la metà di quello dei pezzi di B.

**RISOLUZIONE.** Proviamo a tradurre questo problema in uno schema matematico.

Indichiamo con  $x$  ed  $y$  rispettivamente ( $x \geq 0, y \geq 0$ ) il numero dei pezzi di A e quello dei pezzi di B che vengono prodotti giornalmente.

L'utile dell'azienda è evidentemente una funzione delle variabili  $x, y$ : indichiamo questa funzione con  $\omega$ . Dunque si ha:

$$\omega = [(1,5 - 0,3)x - 250] + [(1,1 - 0,2)y - 140],$$

cioè, dopo aver semplificato (sottintendendo che i vari termini sono espressi in euro):

$$\omega = 1,2x + 0,9y - 390$$

Siccome nell'arco di una giornata lavorativa la fabbrica deve produrre almeno 400 pezzi del manufatto B, deve essere:

$$y \geq 400 ;$$

d'altronde la produzione complessiva giornaliera non può superare i 900 pezzi; perciò:

$$x + y \leq 900;$$

inoltre, giacché il numero dei pezzi di A non può superare la metà dei pezzi di B, deve essere:

$$x \leq \frac{y}{2}, \text{ cioè: } 2x - y \leq 0.$$

In definitiva il **modello matematico** che traduce il problema è il seguente:

Rendere massima la funzione:

$$\omega = 1,2x + 0,9y - 390$$

sotto le condizioni seguenti:

$$y \geq 400, \quad x + y \leq 900, \quad 2x - y \leq 0,$$

e naturalmente con  $x \geq 0, y \geq 0$ .

**84.1.2** Alcune definizioni prima di procedere.

La funzione da rendere massima (o eventualmente minima, in altre situazioni) si chiama **funzione obiettivo**. Essa dipende da una o più variabili – chiamate **variabili attive** (o **variabili di azione** o **variabili decisionali**), che devono soddisfare a determinate condizioni (equazioni e/o disequazioni), dette **vincoli** (o **restrizioni**).

Per esempio, nel problema precedente:

- la funzione obiettivo è:  $\omega = 1,2x + 0,9y - 390$  ;
- le variabili di azione sono  $x, y$ ;
- i vincoli sono le disequazioni:  $y \geq 400$ ,  $x+y \leq 900$ ,  $2x-y \leq 0$ , oltre alle condizioni  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ , che a volte sono chiamate *vincoli economici*, mentre le disequazioni (e/o equazioni) sono dette *vincoli tecnici*.

Quando, come nel suddetto schema, la funzione obiettivo è un polinomio di 1° grado nelle sue variabili ed i vincoli sono equazioni e/o disequazioni di 1° grado in quelle variabili, il problema è chiamato **problema di programmazione lineare** (sinteticamente: **PL**).

Rientrano nella categoria più generale dei **problemi di ottimizzazione**.

**84.1.3** Ritorniamo ora allo schema matematico che abbiamo lasciato poco sopra. Di esso possiamo dare facilmente un'interpretazione geometrica, dopo aver riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) (Fig. 1).

- La disequazione  $y \geq 400$  è rappresentata dalle coppie ordinate  $(x,y)$  di numeri reali per cui risulta appunto  $y \geq 400$ , vale a dire dal semipiano chiuso (cioè contenente anche la retta origine dello stesso) posto al di sopra della retta di equazione  $y=400$ .
- La disequazione  $x+y \leq 900$  è rappresentata dal semipiano chiuso avente come origine la retta di equazione  $x+y=900$  e contenente il punto  $(0,0)$  le cui coordinate soddisfano alla disequazione medesima.
- La disequazione  $2x-y \leq 0$  è rappresentata dal semipiano chiuso avente come origine la retta di equazione  $2x-y=0$  e contenente il punto  $(0,1)$  le cui coordinate soddisfano alla disequazione medesima.

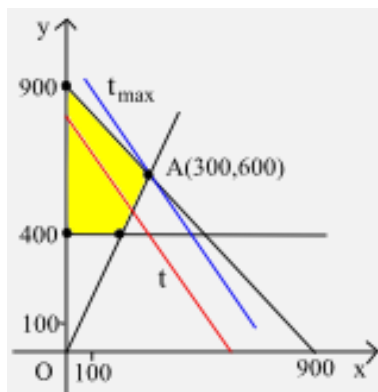


FIG. 1

In conclusione, i vincoli sono rappresentati graficamente dai punti della regione evidenziata in figura 1, compreso il suo contorno. Questa regione si chiama **regione delle soluzioni ammissibili** (o semplicemente **regione ammissibile** o anche **dominio dei vincoli**).

Ora, però, non si tratta di prendere un qualunque punto di tale regione, ma di determinare il punto di essa che, con le sue coordinate, fa assumere il valore massimo alla funzione:

$$\omega = 1,2x + 0,9y - 390 .$$

Per questo poniamo:

$$1,2x + 0,9y - 390 = k ,$$

ottenendo in questo modo un fascio di rette parallele, di coefficiente angolare  $-4/3$ , la generica delle

quali indichiamo con  $t$ .

Per un certo valore di  $k$ , che chiamiamo  $\max(k)$ , si ottiene la retta  $t_{\max}$  che passa per uno dei vertici del contorno della regione delle soluzioni ammissibili, mentre per  $k > \max(k)$  la retta  $t$  non interseca quella regione. Il valore  $\max(k)$  è il massimo valore della funzione  $\omega$  che stiamo cercando.

Nel nostro caso il vertice in questione è il punto  $A$  le cui coordinate si ottengono risolvendo il sistema delle due equazioni:  $x+y=900$ ,  $2x-y=0$ . Si trova:  $A(300, 600)$ . Dunque:

$$\max(\omega) = \max(k) = 1,2 \times 300 + 0,9 \times 600 - 390 = 510.$$

Pertanto, in conclusione: per ottenere il massimo ricavo giornaliero, che è di € 510, l'azienda deve produrre 300 pezzi del manufatto  $A$  e 600 del manufatto  $B$ .

Si capisce che se la regione ammissibile è l'insieme vuoto – il che accade quando i vincoli sono incompatibili – allora il problema è **inconsistente**, vale a dire che non ha soluzioni.

#### 84.1.4 Prendiamo adesso in esame un altro problema.

• **PROBLEMA.** Un'impresa produce un certo articolo in due diversi centri di produzione:  $P_1$  e  $P_2$ . Settimanalmente sono prodotti 2800 pezzi nel centro  $P_1$  e 3500 pezzi nel centro  $P_2$ . Tutti i pezzi prodotti devono essere convogliati in tre centri di smistamento –  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  – in modo che ogni settimana in  $S_1$  giunga il 50 % dei pezzi prodotti, in  $S_2$  ne giunga il 22 % ed in  $S_3$  la quantità rimanente. La seguente tabella indica il costo unitario di trasporto (in euro) dai centri di produzione a quelli di smistamento:

	$S_1$	$S_2$	$S_3$
$P_1$	0,07	0,09	0,08
$P_2$	0,08	0,06	0,06

Trovare quale piano di trasporto ottimizza i costi.

**RISOLUZIONE.** Osserviamo anzitutto che i pezzi prodotti sono in numero di:  $2800 + 3500 = 6300$ .

Di essi:

- in  $S_1$  ne deve essere convogliato il 50 %, vale a dire:  $0,50 \times 6300 = 3150$  ;
- in  $S_2$  ne deve essere convogliato il 22 %, vale a dire:  $0,22 \times 6300 = 1386$  ;
- in  $S_3$  deve giungere la parte rimanente, vale a dire:  $6300 - (3150 + 1386) = 1764$  .

Indichiamo ora con  $x$ ,  $y$ ,  $z$  i numeri dei pezzi che devono essere trasportati da  $P_1$  rispettivamente ad  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ ; per cui:

$$x + y + z = 2800 ,$$

con  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$ .

Allora i numeri dei pezzi che da  $P_2$  devono essere convogliati in  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  sono nell'ordine:

$$3150 - x, \quad 1386 - y, \quad 1764 - z ,$$

con  $3150 - x \geq 0$ ,  $1386 - y \geq 0$ ,  $1764 - z \geq 0$ .

Il costo per il trasporto (espresso in euro) è chiaramente una funzione delle variabili  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ; se lo indichiamo con  $\omega$ , risulta:

$$\omega = (0,07 x + 0,09 y + 0,08 z) + [0,08 (3150 - x) + 0,06 (1386 - y) + 0,07 (1764 - z)];$$

ossia, dopo aver semplificato:

$$\omega = 458,64 - 0,01 x + 0,03 y + 0,01 z .$$

Si tratta di rendere minima questa funzione, con i seguenti vincoli:

$$x + y + z = 2800, \quad x \leq 3150, \quad y \leq 1386, \quad z \leq 1764$$

e naturalmente con  $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ .

Ora, dall'equazione  $x+y+z=2800$  si ricava  $z=2800-x-y$ . Per cui la funzione  $\omega$  in effetti diventa una funzione delle due variabili  $x, y$ ; vale a dire:

$$\omega = 458,64 - 0,01 x + 0,03 y + 0,01 (2800 - x - y),$$

ossia, dopo aver semplificato:

$$\omega = 486,64 - 0,02 x + 0,02 y.$$

Riguardo ai vincoli bisogna tener presente che la disequazione  $z \leq 1764$  diventa  $2800-x-y \leq 1764$ , ossia  $x+y \geq 1036$ ; e la condizione  $z \geq 0$  diventa  $2800-x-y \geq 0$ , ossia  $x+y \leq 2800$ .

In definitiva il **modello matematico** in cui si traduce il problema è il seguente:

Rendere minima la funzione:

$$\omega = 486,64 - 0,02 x + 0,02 y,$$

sotto le condizioni seguenti:

$$0 \leq x \leq 3150, \quad 0 \leq y \leq 1386, \quad 1036 \leq x+y \leq 2800.$$

Operando come nella risoluzione del problema precedente, troviamo anzitutto la regione delle soluzioni ammissibili, la quale è costituita dalla superficie evidenziata in figura 2, incluso il contorno.

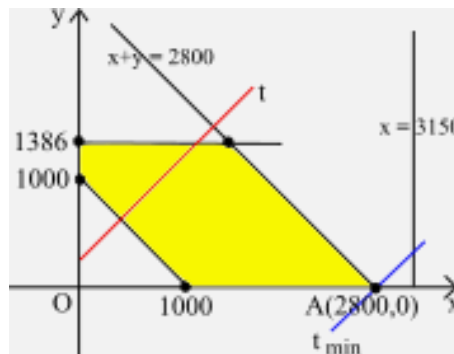


FIG. 2

Si fa notare che il vincolo  $x \leq 3150$  è superfluo (o, come anche si dice, **ridondante**). Di fatto è implicito nel vincolo  $x+y \leq 2800$  (se  $x+y \leq 2800$  allora sicuramente  $x < 3150$ ).

Siccome si tratta di rendere minima la funzione:

$$\omega = 486,64 - 0,02 x + 0,02 y \quad (\text{€}),$$

poniamo:

$$486,64 - 0,02 x + 0,02 y = k,$$

ottenendo così un fascio di rette parallele, di coefficiente angolare 1, la generica delle quali diciamo  $t$ . Per un certo valore di  $k$ , che chiamiamo  $\min(k)$ , si ottiene la retta  $t_{\min}$  che passa per uno dei vertici del contorno della regione delle soluzioni ammissibili, mentre per  $k < \min(k)$  la retta  $t$  è esterna a quella regione. Il valore  $\min(k)$  è il minimo valore della funzione  $\omega$  che stiamo cercando.

Nel nostro caso il vertice in questione è il punto A in cui la retta  $x+y=2800$  seca l'asse  $x$ , ovvero il punto di coordinate  $(2800, 0)$ .

Dunque:

$$\min(\omega) = \min(k) = 486,64 - 0,02 \times 2800 = 430,64 \quad (\text{€}).$$

Per  $x=2800$  e  $y=0$ , risulta  $z=2800-2800=0$ .

In definitiva, il piano che ottimizza i costi per il trasporto (cioè il piano che rende minimi tali costi) è quello che prevede il trasporto dai centri  $P_1$  e  $P_2$  ai centri  $S_1, S_2, S_3$ , sintetizzato nella seguente tabella:

	$S_1$	$S_2$	$S_3$
$P_1$	2800	0	0
$P_2$	350	1386	1764

Come detto, il costo complessivo settimanale per il trasporto, con questo piano, è di € 430,64.

**84.1.6** Concludiamo questa prima parte sui problemi di PL con un paio di esercizi che possono apparire poco significativi sul piano pratico, ma che tuttavia ci forniscono utili indicazioni.

- ESERCIZIO 1. Rendere massima la funzione:  $f(x,y) = 540x + 360y$ , con i seguenti vincoli:

$$x - 2y \leq 4, \quad 2y \leq x + 6, \quad 3x + 2y \leq 18$$

e naturalmente  $x \geq 0, y \geq 0$ .

RISOLUZIONE. Come sempre, troviamo per prima cosa la regione delle soluzioni ammissibili.

A questo riguardo disegniamo le rette (Fig. 3):

$$a \equiv x - 2y = 4, \quad b \equiv 2y = x + 6, \quad c \equiv 3x + 2y = 18.$$

La regione cercata è quella evidenziata in figura 3, compreso il contorno.

Poiché bisogna rendere massima la funzione:

$$f(x,y) = 540x + 360y,$$

poniamo:

$$540x + 360y = k,$$

ottenendo così un fascio di rette parallele, e non ci vuol molto a capire che esse sono anche parallele alla retta  $c$ . Questo significa che il valore di  $k$  per cui la retta del fascio coincide con  $c$  è il massimo cercato. Si trova facilmente:  $\max(k) = 3240$ .

Ma questo massimo non si ha per una sola coppia ordinata  $(x,y)$ , bensì per tutte quelle che sono contenute nel segmento  $AB$ , dove:  $A(5,5)$ ,  $B(3; 4,5)$ .

Dopo che nell'equazione di  $c$  la variabile  $y$  è stata espressa in funzione di  $x$ , si trova pertanto che le coppie  $(x,y)$  suddette sono le seguenti:

$$(x, 18 - 1,5x), \quad \text{con } 3 \leq x \leq 5,5.$$

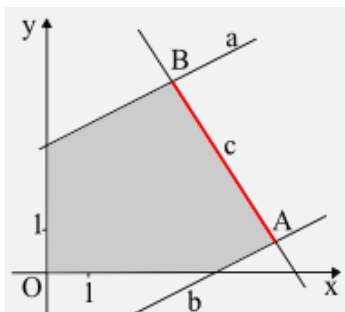


FIG. 3

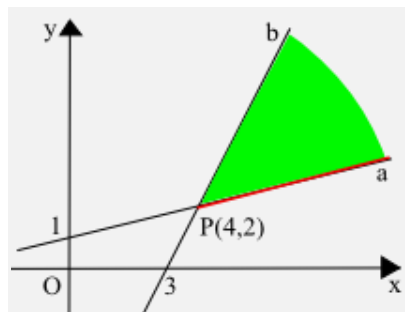


FIG. 4

- ESERCIZIO 2. Rendere minima la funzione:  $f(x,y) = 10 - 4x + 16y$ , con i seguenti vincoli:

$$4y - x \geq 4, \quad 2x - y \geq 6$$

e naturalmente  $x \geq 0, y \geq 0$ .

RISOLUZIONE. Ancora una volta troviamo per prima cosa la regione delle soluzioni ammissibili.

A questo riguardo disegniamo le rette (Fig. 4):

$$a \equiv 4y - x = 4, \quad b \equiv 2x - y = 6.$$

La regione cercata è costituita dall'angolo di vertice  $P(4,2)$  evidenziato in figura 4, compresi i suoi lati. Poiché bisogna rendere minima la funzione:

$$f(x,y) = 10 - 4x + 16y,$$

poniamo:

$$10 - 4x + 16y = k,$$

ottenendo così un fascio di rette parallele, e non ci vuol molto a capire che esse sono anche parallele alla retta  $a$ . Questo significa che il valore di  $k$  per cui la retta del fascio coincide con  $a$  è il minimo cercato. Si trova facilmente:  $\min(k) = 26$ .

Ma questo minimo non si ha per una sola coppia ordinata  $(x,y)$ , bensì per tutte quelle che appartengono al lato  $a$  dell'angolo considerato.

Dopo che nell'equazione di  $a$  la variabile  $y$  è stata espressa in funzione di  $x$ , si trova pertanto che le coppie  $(x,y)$  suddette sono le seguenti:

$$\left(x, \frac{1}{4}x + 1\right), \quad \text{con } x \geq 4.$$

**84.1.7** Vale il seguente teorema di cui omettiamo la dimostrazione:

**TEOREMA FONDAMENTALE DELLA PROGRAMMAZIONE LINEARE.**

Se esiste una soluzione ottima di un problema di PL in due variabili di azione, essa è situata in corrispondenza di un vertice della regione delle soluzioni ammissibili.

Se esistono due punti in corrispondenza dei quali c'è una soluzione ottima, allora questa si trova in corrispondenza di infiniti punti, quelli situati sul lato (segmento o semiretta) contenente i due punti.

**84.2 METODO DEL SIMPLESSO PER I PROBLEMI DI MASSIMO**

**84.2.1** Riprendiamo in esame il problema affrontato in 84.1.1 e che è stato tradotto nel seguente schema matematico, dove al posto di  $x, y$  mettiamo per comodità rispettivamente  $x_1, x_2$ :

Rendere massima la funzione:

$$\omega = 1,2x_1 + 0,9x_2 - 390$$

sotto le condizioni seguenti:

$$x_2 \geq 400, \quad x_1 + x_2 \leq 900, \quad 2x_1 - x_2 \leq 0,$$

e naturalmente con  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ .

Ci proponiamo di risolvere questa questione con un procedimento diverso da quello esposto in precedenza. Questo nuovo procedimento può apparire farraginoso e dispendioso, insomma un virtuosismo inutile ed una perdita di tempo. Ti invitiamo, tuttavia, ad armarti di pazienza ed a seguirci nel nostro discorso. Fra breve ne capirai i motivi.

Introducendo tre nuove variabili non negative –  $x_3, x_4, x_5$  – trasformiamo anzitutto il sistema delle tre disequazioni che costituiscono i vincoli in un sistema di altrettante equazioni:

$$[1] \quad \begin{cases} x_2 - x_3 = 400 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 900 \\ 2x_1 - x_2 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Otteniamo un sistema di 3 equazioni in 5 incognite. Questo significa che a 2 delle 5 variabili possiamo attribuire valori arbitrari e ricavare, in funzione di essi, i valori delle altre 3 variabili.

Risolviamo allora il sistema [1] esprimendo  $x_1, x_2, x_3$  in funzione di  $x_4, x_5$ . Otteniamo:

$$x_1 = 300 - \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5, \quad x_2 = 600 - \frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5, \quad x_3 = 200 - \frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5.$$

La funzione obiettivo  $\omega$ , espressa essa pure per mezzo di  $x_4, x_5$ , diventa allora:

$$\omega = 1,2 \left( 300 - \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 \right) + 0,9 \left( 600 - \frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 \right) - 390,$$

vale a dire:

$$[2] \quad \omega = 510 - x_4 - 0,1 x_5.$$

Da qui, si desume che il massimo di  $\omega$  si ha quando a 510 si sottraggono i valori più piccoli possibile, vale a dire, ricordando che  $x_4 \geq 0$  e  $x_5 \geq 0$ , quando  $x_4 = x_5 = 0$ . Dunque:  $\max(\omega) = 510$ .

I valori di  $x_1$  ed  $x_2$  – che sono quelli che c’interessano – per i quali si ha questo massimo, si trovano sostituendo  $x_4 = 0$  e  $x_5 = 0$  nelle ultime due equazioni del gruppo [1]. Si ottiene:  $x_1 = 300, x_2 = 600$ .

Tutto esattamente come in 84.1.3.

**84.2.2** Ad onor del vero, siamo stati fortunati ad ottenere che nell’espressione [2] di  $\omega$  i coefficienti delle variabili  $x_4$  ed  $x_5$  fossero tutte e due negativi. Questo ci ha permesso di giungere rapidamente alla conclusione. D’altronde, a quell’espressione di  $\omega$  siamo giunti perché abbiamo deciso di esprimere, nelle equazioni [1], le variabili  $x_1, x_2, x_3$  in funzione di  $x_4, x_5$ .

Sorge, allora, naturale il seguente interrogativo: **Se avessimo operato una scelta diversa delle variabili da assumere come quantità note, sarebbe cambiato qualcosa?**

Proviamo, per esempio, ad esprimere, sempre nelle [1], le variabili  $x_3, x_4, x_5$  in funzione di  $x_1$  ed  $x_2$ .

Otteniamo:

$$x_3 = -400 + x_2, \quad x_4 = 900 - x_1 - x_2, \quad x_5 = -2x_1 + x_2;$$

mentre la funzione obiettivo rimane ovviamente:

$$\omega = 1,2 x_1 + 0,9 x_2 - 390.$$

Adesso, nell’espressione di  $\omega$ , i coefficienti delle variabili  $x_1$  ed  $x_2$  sono entrambi positivi e, si capisce facilmente, più grandi sono i valori che si attribuiscono a tali variabili, più grande è il valore di  $\omega$ .

Ma fin dove possiamo spingerci per avere il massimo di  $\omega$ ? Non possiamo stabilirlo ragionando su quell’espressione di  $\omega$ . Dobbiamo concludere che quell’espressione non è idonea al nostro scopo e dobbiamo provare altre vie.

In altri termini, l’aver espresso le variabili  $x_3, x_4, x_5$  in funzione di  $x_1$  ed  $x_2$  conduce ad un’espressione di  $\omega$  – in funzione di  $x_1$  ed  $x_2$  – sulla quale non siamo in grado di concludere alcunché. Bisogna allora scegliere altre tre variabili da esprimere in funzione delle due rimanenti.

In seguito ad alcuni tentativi si giunge, di solito, ad una situazione, come quella descritta nel paragrafo 84.2.1, in cui i coefficienti delle variabili che figurano nell’espressione di  $\omega$  sono tutti negativi: la con-

clusione adesso è immediata.

In teoria potrebbe però capitare che, dopo aver effettuato tutti i possibili tentativi, non si trovi una funzione  $\omega$  con le caratteristiche suddette. Si deve concludere che essa non ha un massimo.

Osserviamo, a questo riguardo, che, nel caso in esame, i possibili tentativi sono tanti quanti i modi di esprimere 3 delle 5 variabili  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  in funzione delle 2 rimanenti; vale a dire che questi possibili tentativi sono tanti quante le combinazioni di 5 oggetti presi a 3 a 3, cioè sono in numero di  $\binom{5}{3}$ ,

ossia:  $\frac{5 \times 4 \times 3}{2 \times 3} = 10$ .

Cosicché questo metodo, se non si è fortunati nella scelta delle variabili da esprimere in funzione di altre, può essere piuttosto lungo, se non proprio complicato. Ed allora ci si potrebbe chiedere se sia veramente il caso di occuparsene visto e considerato che disponiamo già del metodo grafico, che è un metodo pratico ed economico.

**Il fatto è che al metodo grafico nel piano si può ricorrere finché si ha a che fare con problemi in due variabili (o riconducibili a due variabili). Ciò non è, invece, possibile quando le variabili sono in numero maggiore.**

In tal caso si può ricorrere ad un metodo algebrico, noto come **metodo del semplice**, del quale, a parte qualche dettaglio, quello che abbiamo descritto sopra è un particolare esempio, benché applicato al caso di due variabili di azione.

Cerchiamo allora di descrivere meglio questo metodo. Lo faremo ancora con riferimento alla funzione esaminata in 84.2.1.

### 84.2.3 Considerata la funzione obiettivo:

$$\omega = 1,2 x_1 + 0,9 x_2 - 390 ,$$

in cui  $x_1 \geq 0$  e  $x_2 \geq 0$ , bisogna renderla massima sotto il sistema di vincoli:

$$x_2 \geq 400, \quad x_1 + x_2 \leq 900, \quad 2 x_1 - x_2 \leq 0.$$

Si deve prima di tutto trasformare questo sistema di disequazioni in un sistema di equazioni. Si consegue lo scopo con l'introduzione di tante variabili non negative – chiamate **variabili aggiunte** (o di **scarto** o anche **fittizie**) – quante sono le disequazioni del sistema. Nel nostro caso con l'introduzione di 3 variabili aggiunte:  $u_1, u_2, u_3$ . Otteniamo il sistema [1] scritto in precedenza, ma nel quale adesso figurano le variabili  $u_1, u_2, u_3$  al posto di  $x_3, x_4, x_5$  rispettivamente:

$$[3] \quad \begin{cases} x_2 - u_1 = 400 \\ x_1 + x_2 + u_2 = 900 \\ 2x_1 - x_2 + u_3 = 0 \end{cases}$$

La soluzione che rende massima la funzione  $\omega$  è costituita dalla coppia  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  che, assieme alla terna  $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$ , forma la cinquina  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$  la quale è soluzione del sistema [3].

Il nostro scopo è quello di esprimere  $\omega$  come somma di una quantità costante e di un polinomio omogeneo di 1° grado in 2 delle 5 variabili introdotte (2 attive e 3 fittizie), convenientemente scelte, con coefficienti tutti negativi (o, quantomeno, non positivi).

Di modo che, ponendo uguali a 0 le due variabili del polinomio suddetto, si ottiene il valore massimo di  $\omega$  e nello stesso tempo, utilizzando il sistema [3] o un altro sistema equivalente ad esso, si determinano i valori delle variabili di azione che mancano (diciamo così, poiché qualcuna di esse potrebbe figurare nell'ultima espressione di  $\omega$  e perciò ad essa è stato attribuito il valore 0) e per i quali si ha quel

valore massimo.

La scelta delle tre variabili rispetto alle quali risolvere il sistema [3] non è del tutto casuale. In effetti, esse devono risultare tutte non negative quando le altre due sono nulle. Questo, chiaramente, perché la cinquina deve essere costituita da valori non negativi.

Realmente, quando  $u_2=u_3=0$ , si trova rapidamente:  $x_1=300$ ,  $x_2=600$ ,  $u_1=200$ .

Se la scelta, invece che su  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $u_1$ , fosse caduta, per esempio, su  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$ , ponendo  $x_1=x_2=0$  avremmo trovato:  $u_1=-400$ ,  $u_2=900$ ,  $u_3=0$ .

La prima scelta è buona, la seconda no.

Anche la scelta  $u_1=0$ ,  $u_2=0$  sarebbe stata buona, dal momento che in tal caso sarebbe risultato  $x_1=200$ ,  $x_2=400$ ,  $u_2=300$ .

Allora, generalizzando al caso di  $n$  equazioni in  $n+m$  incognite: quando si applica il metodo del semplice, è fondamentale scegliere correttamente le  $n$  variabili – dette *variabili di base* – che si assumono come incognite e le  $m$  variabili – dette *variabili non di base* – rispetto alle quali le prime devono essere espresse (e che, provvisoriamente si considerano quantità note).

Ripetiamo che la scelta è valida se, attribuendo valore 0 a tutte le variabili non di base, si ottengono valori non negativi per quelle di base.

La soluzione del sistema di equazioni che così si ottiene potrebbe già dar luogo al valore ottimale di  $\omega$ , ma potrebbe ancora aver bisogno di essere ottimizzata: essa si chiama una **soluzione base ammissibile** del sistema.

Talora i tentativi volti a trovare una soluzione base ammissibile richiedono un po' di tempo prima di sortire l'effetto voluto.

Per esempio, ritornando al sistema [3], fissiamo l'attenzione sulla seguente cinquina di valori, ottenuta pensando  $u_1=u_3=0$ :

$$x_1 = 200, \quad x_2 = 400, \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 300, \quad u_3 = 0.$$

Essa è una soluzione base ammissibile del sistema [3]. Le variabili  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $u_2$  sono le variabili di base; le variabili  $u_1$ ,  $u_3$  sono le variabili non di base.

Potrebbe capitare che questa soluzione base ammissibile conduca già al valore ottimale della funzione obiettivo. In questo caso la ricerca sarebbe terminata.

Nel nostro esempio non è così. Infatti, esprimendo  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $u_2$  in funzione di  $u_1$  ed  $u_3$ , si trova:

$$x_1 = 200 + \frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_3, \quad x_2 = 400 + u_1, \quad u_2 = 200 + \frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_3;$$

di conseguenza:

$$\omega = 1,2 \left( 200 + \frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_3 \right) + 0,9 (400 + u_1) - 390,$$

ossia, dopo aver semplificato:

$$\omega = 210 + 1,5 u_1 - 0,6 u_3.$$

Come si vede, nell'espressione di  $\omega$ , i coefficienti delle variabili  $u_1$  ed  $u_3$  non sono entrambi negativi.

Se invece la scelta fosse caduta sulla seguente cinquina, ottenuta pensando  $u_2 = u_3 = 0$ :

$$x_1 = 300, \quad x_2 = 600, \quad u_1 = 200, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 0,$$

avremmo ottenuto:

$$\omega = 510 - u_2 - 0,1 u_3$$

e da qui, proprio perché  $u_2=u_3=0$ , avremmo ricavato rapidamente la soluzione:

$$\max(\omega) = 510 \text{ per } x_1 = 300 \text{ ed } x_2 = 600.$$

Riepiloghiamo.

Una volta che è stata trovata per tentativi una soluzione base ammissibile e sono state espresse le variabili di base e la funzione obiettivo per mezzo delle variabili non di base, si possono ottenere due situazioni:

- nell'espressione della funzione obiettivo i coefficienti delle variabili non di base sono tutti negativi (o, almeno, non positivi): si traggono immediatamente le conclusioni in relazione alla situazione che rende massima la funzione obiettivo;
- nell'espressione della funzione obiettivo i coefficienti delle variabili non di base non sono tutti negativi o nulli: bisogna effettuare altri tentativi.

L'algoritmo del semplice è stato introdotto nel 1947 dal matematico statunitense George Bernard Dantzig (1914-2005), considerato anche il padre della programmazione lineare.

**84.2.4** Puoi constatare come il metodo del semplice comporti un procedimento particolarmente lungo e noioso, se si è sfortunati nella scelta delle variabili di base. Ed è tanto più lungo quanto più numerosi sono i coefficienti positivi nella funzione obiettivo che bisogna rendere massima. Questo perché potrebbe capitare di dover fare diversi tentativi nella speranza di giungere prima o poi alla situazione favorevole che nella funzione non ci siano coefficienti positivi fra quelli delle variabili.

Ebbene, nel caso in cui fra i coefficienti nella funzione obiettivo (da **massimizzare**) ce ne fossero alcuni positivi, invece di procedere per tentativi, alla cieca, il metodo del semplice può essere reso più agevole se viene eseguito con una tecnica speciale, detta **metodo del pivot**, che ci accingiamo a descrivere, occupandoci però di spiegare “come” si opera ma non “perché” si fa in quel modo, applicandolo ad uno specifico esempio.

Descriviamo allora l'**algoritmo del semplice eseguito mediante il metodo del pivot** con riferimento al seguente *problema di massimo*.

- PROBLEMA.

Rendere massima la funzione:

$$\omega = 120 x_1 + 240 x_2 + 8000 ,$$

con  $x_1, x_2$  numeri reali non negativi, sotto le condizioni seguenti:

$$2 x_1 + 3 x_2 \leq 90, \quad x_1 + x_2 \leq 1.$$

**RISOLUZIONE.** Il problema, che presenta due variabili di azione, può essere evidentemente risolto col metodo grafico nel piano: lasciamo a te questo compito per esercizio. Noi andiamo ad occuparci invece del metodo del semplice eseguito col metodo del pivot.

Constatiamo anzitutto che la funzione obiettivo si può scrivere nella forma seguente:

$$\omega = 120 (x_1 + 2x_2) + 8000,$$

per cui essa è massima quando lo è la funzione:

$$\omega' = x_1 + 2 x_2.$$

Si ha inoltre, ammesso che  $\omega'$  ammetta massimo:

$$\max (\omega) = 120 \max (\omega') + 8000.$$

Possiamo allora assumere provvisoriamente come funzione obiettivo la funzione  $\omega'$ .

Introducendo due nuove variabili non negative (variabili fittizie) –  $u_1, u_2$  – il sistema delle due disequazioni che costituiscono i vincoli è trasformato in un sistema di altrettante equazioni:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + u_1 = 90 \\ x_1 + x_2 + u_2 = 1 \end{cases}$$

A questo punto, ma solo per comodità di lettura, si scrive il sistema precedente sotto forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si costruisce, quindi, una matrice (detta **prima matrice del simplesso**), nel seguente modo:

si dispongono in una prima riga le variabili presenti nel sistema (attive e fittizie) e il termine noto (tn):

$$x_1 \quad x_2 \quad u_1 \quad u_2 \quad \text{tn};$$

sotto questa riga: in colonna con le variabili, si scrive la matrice dei coefficienti costruita sopra:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

in colonna col termine noto si scrive il vettore dei termini noti delle equazioni:

$$\begin{pmatrix} 90 \\ 1 \end{pmatrix};$$

al di sotto della nuova matrice così costruita, ma sempre in colonna con i coefficienti delle variabili e con il termine noto, si scrivono, in una riga, i coefficienti delle variabili della funzione obiettivo e il valore della funzione obiettivo ottenuto per  $x_1=x_2=0$ , cioè 0 nel caso specifico:

$$1 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 0.$$

Questa riga è chiamata *riga degli indicatori*.

La **prima matrice del simplesso** assume, allora, la forma seguente:

Prima matrice del simplesso				
$x_1$	$x_2$	$u_1$	$u_2$	tn
2	3	1	0	<b>90</b>
1	1	0	1	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>2</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>

In questa matrice si può leggere direttamente che la soluzione ottenuta ponendo  $x_1=0$  e  $x_2=0$ , cui corrispondono  $u_1=90$  ed  $u_2=1$ , vale a dire la quaterna ordinata di valori  $(0,0,90,1)$  è una soluzione base ammissibile, giacché non figura in essa alcun valore negativo.

In corrispondenza di questa soluzione base ammissibile, la funzione obiettivo assume il valore:  $\omega'=0$ .

Si tratta di vedere se questo valore può essere accresciuto.

La cosa, vista nei termini della rappresentazione grafica ha il seguente significato: il valore della funzione obiettivo in un vertice del contorno della regione delle soluzioni ammissibili ha il valore sopradetto; è possibile spostarsi in un altro vertice in modo che tale valore aumenti? Lì la risposta era ottenuta graficamente; qui bisogna elaborare la prima matrice del simplesso in maniera opportuna. Per questo si ricorre al metodo del pivot e si trasforma la matrice precedente fino ad ottenerne una (am-

messo che esista) che, nella riga degli indicatori, non presenti valori positivi (il che equivale a dire che fra i coefficienti della funzione obiettivo non ce ne sono di positivi).

Per prima cosa bisogna individuare il pivot, che è uno dei numeri della matrice dei coefficienti, quello che ha le caratteristiche che servono al nostro scopo:

- la *colonna del pivot* è quella che corrisponde all'indicatore avente il massimo valore: in questo caso l'indicatore è 2, quindi la colonna del pivot è la colonna  $x_2$ ;
- adesso bisogna trovare la riga del pivot: per questo si dividono i termini noti per i corrispondenti valori della colonna del pivot (tralasciando, però, se ce ne fossero, i casi in cui il divisore è 0 e i casi in cui il rapporto è negativo o nullo); nel caso in questione si hanno due valori, i seguenti:  $90/3$  e  $1/1$ ; la *riga del pivot* è quella cui corrisponde il rapporto minimo, vale a dire la riga del termine noto 1;
- il pivot è dunque 1.

Riscriviamo la stessa prima matrice del semplice, contrassegnando, però, il pivot con un asterisco:

**Prima matrice del semplice**

$x_1$	$x_2$	$u_1$	$u_2$	tn
2	3	1	0	<b>90</b>
1	1*	0	1	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>2</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>

A questo punto si può costruire la *seconda matrice del semplice*, seguendo le seguenti regole:

- Si moltiplicano gli elementi della riga del pivot per il reciproco del pivot, al fine di far diventare uguale ad 1 il valore del pivot. (Siccome, nel caso specifico, il pivot ha già valore 1, questa operazione si salta.)
- Adesso bisogna ridurre uguali a 0 i termini della colonna del pivot, fatta ovviamente eccezione per il pivot. Nel caso nostro ce ne sono due: uno nella riga prima (valore: 3) ed uno nella riga degli indicatori (valore: 2). Per raggiungere lo scopo si operano delle opportune combinazioni lineari fra le righe della matrice del semplice. Precisamente:
  - si sostituisce alla prima riga (che corrisponde al valore 90 del tn) quella che si ottiene sottraendole, termine a termine, la nuova riga del pivot moltiplicata per 3;
  - si moltiplicano i termini della nuova riga del pivot per  $-2$  (valore opposto dell'indicatore 2) e si sostituisce la riga degli indicatori con quella che si ottiene sommandola, termine a termine, con la riga precedentemente modificata.

La matrice, che è per l'appunto la *seconda matrice del semplice*, diventa questa:

**Seconda matrice del semplice**

$x_1$	$x_2$	$u_1$	$u_2$	tn
-1	0	1	-3	<b>87</b>
1	1	0	1	<b>1</b>
<b>-1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>-2</b>	<b>-2</b>

Nella riga degli indicatori adesso non compaiono più valori positivi: la matrice ottenuta è la matrice "ottima" e permette di leggere le conclusioni, a condizione che si prenda l'opposto del termine noto nella riga degli indicatori. Precisamente:

$$\text{Per } x_1=0, u_2=0, x_2=1, u_1=87, \text{ si ha } \omega' = -(-2) = 2.$$

Pertanto, coinvolgendo le sole variabili attive, la funzione obiettivo  $\omega'$  assume il massimo valore, uguale a 2, quando  $x_1=0$  ed  $x_2=1$ .

Ritornando alla funzione  $\omega$ , si ha allora, per tali medesimi valori:

$$\max(\omega) = 240 \times 2 + 8000 = 8480.$$

**84.2.5** Chi dall'uso del metodo del pivot s'aspettava una semplificazione rilevante del semplice so sarà rimasto probabilmente deluso. Il fatto è che il metodo del semplice so è laborioso di per sé e nessun marchingegno può ridurlo a pochi calcoli. Perlomeno finché si opera solo col proprio cervello e con carta e penna. Occorre precisare infatti che, una volta che è stata formata la prima matrice del semplice so, essa può essere elaborata, fino a giungere alla forma voluta, per mezzo di uno strumento di calcolo automatico, utilizzando un idoneo software matematico.

Quand'anche non si disponesse di un software in grado di elaborare automaticamente la prima matrice del semplice so fino a giungere al risultato finale, tuttavia sarebbe possibile servirsi di uno strumento di calcolo automatico (per esempio, un foglio elettronico) per agevolare le varie fasi.

**84.2.6** Per sintetizzare e concludere con i problemi di massimo col l'algoritmo del semplice so, possiamo dire che lo scopo del semplice so è quello di esprimere la funzione obiettivo come un polinomio, nelle variabili attive e fittizie, con coefficienti tutti negativi (o, almeno, non positivi), in modo che ponendo uguali a zero tali variabili si ottenga appunto il **valore massimo** della funzione obiettivo. Naturalmente, considerato come si ottiene, questo significa che nella riga degli indicatori nella matrice "ottima" del semplice so (vale a dire la matrice che fornisce la soluzione ottimale) devono figurare solo valori negativi o nulli.

### 84.3 METODO DEL SEMPLISSO PER I PROBLEMI DI MINIMO

**84.3.1** La procedura seguita per i problemi di massimo può essere ripetuta, con qualche necessario adattamento, anche nel caso in cui una data funzione deve essere resa minima.

Precisamente, adesso lo scopo del semplice so è quello di esprimere la funzione obiettivo come un polinomio, nelle variabili attive e fittizie, con coefficienti tutti positivi (o, almeno, non negativi), in modo che ponendo uguali a zero tali variabili si ottenga appunto il **valore minimo** della funzione obiettivo. Come prima, questo significa che nella riga degli indicatori nella matrice "ottima" del semplice so devono figurare solo valori positivi o nulli.

Tutto il resto rimane invariato, o quasi. C'è infatti una piccola difficoltà in più.

**84.3.2** Per far capire come funzioni l'**algoritmo del semplice so per i problemi di minimo** ci affidiamo ancora ad un esempio. Sia allora il seguente *problema di minimo*.

- PROBLEMA.

Rendere minima la funzione:

$$\omega = 4x_1 + 4x_2 - 15,$$

con  $x_1, x_2$  numeri reali non negativi, sotto le condizioni seguenti:

$$4x_1 + x_2 \geq 22, \quad 2x_1 + x_2 \geq 17, \quad 2x_1 + 3x_2 \geq 27.$$

**RISOLUZIONE.** Constatiamo per prima cosa che la funzione obiettivo può esser messa nella forma seguente:

$$\omega = 4(x_1 + x_2) - 15,$$

per cui, posto:  $\omega' = x_1 + x_2$ , è evidente che  $\min(\omega) = 4 \min(\omega') - 15$ . Assumiamo allora provvisoriamente come funzione obiettivo la funzione  $\omega'$ .

Introdotte tre variabili fittizie  $u_1, u_2, u_3$  (non negative), il sistema delle tre disequazioni costituenti i vincoli tecnici del problema si trasforma nel seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - u_1 = 22 \\ 2x_1 + x_2 - u_2 = 17 \\ 2x_1 + 3x_2 - u_3 = 27 \end{cases}$$

Per comodità di lettura scriviamolo in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 17 \\ 27 \end{pmatrix}$$

Costruiamo quindi la prima matrice del simplesso:

$x_1$	$x_2$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	t.n
4	1	-1	0	0	22
2	1	0	-1	0	17
2	3	0	0	-1	27
1	1	0	0	0	0

La soluzione ottenuta ponendo  $x_1=x_2=0$ , cui corrispondono  $u_1=-22, u_2=-17, u_3=-27$ , non è una soluzione base ammissibile giacché in essa figurano valori negativi, mentre nessuno di essi dovrebbe esserlo. Ora questo origina un problema. Per superarlo bisogna introdurre delle variabili cosiddette “artificiali”. Le **variabili artificiali** sono tante quanti sono i vincoli tecnici: tre nel caso specifico. Le indichiamo con  $a_1, a_2, a_3$ , e non devono assumere valori negativi, come le variabili attive e fittizie, anzi addirittura il loro valore si suppone che sia arbitrariamente grande: lo indichiamo con  $a$ . Il sistema delle equazioni diventa allora il seguente:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - u_1 + a_1 = 22 \\ 2x_1 + x_2 - u_2 + a_2 = 17 \\ 2x_1 + 3x_2 - u_3 + a_3 = 27 \end{cases}$$

Ripetiamo che l’introduzione delle variabili artificiali ha il solo scopo di ottenere una soluzione base ammissibile. Esse, come si vedrà, non interverranno nella soluzione del problema.

Ebbene, la prima matrice del simplesso, modificata con l’introduzione delle variabili artificiali, è la seguente, che però indichiamo come **matrice 0 del simplesso** per una ragione che sarà chiara fra breve:

**matrice 0 del simplesso**

$x_1$	$x_2$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	tn
4	1	-1	0	0	1	0	0	22
2	1	0	-1	0	0	1	0	17
2	3	0	0	-1	0	0	1	27
1	1	0	0	0	a	a	a	0

A questo punto bisogna operare in modo che diventino nulli gli indicatori nelle tre colonne delle variabili artificiali e lo scopo si consegue moltiplicando ognuna delle tre righe principali per  $-a$  e som-

mando i termini in colonna compresi quelli della riga degli indicatori: i valori ottenuti costituiscono la nuova riga degli indicatori.

Per esempio, il primo termine di tale riga è:  $(-4a-2a-2a)+1=1-8a$ , mentre il termine noto è:  $-22a-17a-27a=-66a$ .

Con tale accorgimento la nuova matrice, che assumiamo come vera e propria **prima matrice del semplice**, è la seguente:

**prima matrice del semplice**

$x_1$	$x_2$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	tn
4 *	1	-1	0	0	1	0	0	22
2	1	0	-1	0	0	1	0	17
2	3	0	0	-1	0	0	1	27
1-8a	1-5a	-a	-a	-a	0	0	0	-66a

Posto adesso  $x_1=x_2=u_1=u_2=u_3=0$  si ha  $a_1=22$ ,  $a_2=17$ ,  $a_3=27$ : è una soluzione base ammissibile. Si tratta di vedere se è possibile migliorarla e lo scopo si raggiunge facendo sì che nella riga degli indicatori non figurino termini negativi (a parte il termine noto): attualmente ce ne sono cinque, compresi i termini 1-8a e 1-5a (ricordiamo che a si può considerare arbitrariamente grande e positivo).

Si procede esattamente come nel caso dei problemi di massimo.

Allora, per prima cosa si individua il pivot nella prima matrice del semplice (è contrassegnato con un asterisco): precisiamo che *la colonna del pivot* è adesso quella dell'indicatore negativo col massimo valore assoluto. In secondo luogo si modificano nel modo conosciuto, dapprima gli altri termini della riga del pivot e poi i termini delle altre righe. Si ottiene, a conti fatti, la **seconda matrice del semplice**:

**seconda matrice del semplice**

$x_1$	$x_2$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	tn
1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{11}{2}$
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	6
0	5 *	$\frac{1}{2}$	0	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1	16
0	$\frac{3}{4}-3a$	$\frac{1}{4}-a$	-a	-a	$2a-\frac{1}{4}$	0	0	$-22a-\frac{11}{2}$

Poiché nella riga degli indicatori permangono termini negativi bisogna continuare, procedendo al solito modo. Si costruisce così la **terza matrice del semplice**:

**terza matrice del semplice**

$x_1$	$x_2$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	tn
1	0	$-\frac{3}{10}$	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	0	$-\frac{1}{10}$	$\frac{39}{10}$
0	0	2 *	-1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{14}{5}$
0	1	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{32}{5}$
0	0	$\frac{1}{10}-\frac{2}{5}a$	a	$\frac{3}{10}-\frac{1}{5}a$	$\frac{7}{5}a-\frac{1}{10}$	0	$\frac{6}{5}a-\frac{3}{10}$	$-\frac{14}{5}a-\frac{103}{10}$

Non ancora è stato raggiunto lo scopo, per cui bisogna proseguire con la costruzione della **quarta matrice del simplesso**:

**quarta matrice del simplesso**

$x_1$	$x_2$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	t.n.
1	0	0	$\frac{3}{-10}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	6
0	0	1	$\frac{5}{-\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{\frac{1}{2}}$	-1	$\frac{5}{\frac{1}{2}}$	$-\frac{1}{-\frac{1}{2}}$	7
0	1	0	$\frac{1}{\frac{1}{2}}$	$-\frac{1}{-\frac{1}{2}}$	0	$-\frac{1}{-\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{\frac{1}{4}}$	5
0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$a$	$a-\frac{1}{4}$	$a-\frac{1}{4}$	-11

Nella riga degli indicatori non ci sono più termini negativi (a parte il termine noto), questa è la matrice “ottima” del simplesso e da essa si ricava la soluzione ottimale, vale a dire:

$$\min(\omega') = -(-11) = 11 \text{ per } x_1=6 \text{ e } x_2=5.$$

Di conseguenza, per tali medesimi valori:

$$\min(\omega) = 4 \min(\omega') - 15 = 4 \times 11 - 15 = 29.$$

Detto per inciso, i valori delle variabili fittizie sono i seguenti:  $u_1=7, u_2=u_3=0$ .

**84.3.3** Per concludere con l’algoritmo del simplesso per i problemi di minimo, nel caso in cui si devono introdurre variabili artificiali, vogliamo far notare un paio di cose interessanti, che hanno carattere generale e, se non danno la certezza di aver operato correttamente, per lo meno ci possono indicare se abbiamo commesso errori.

- La prima nota riguarda **l’assenza, nella matrice “ottima” del simplesso, del valore arbitrario  $a$  in corrispondenza delle colonne delle variabili attive e fittizie.**
- La seconda considerazione si riferisce a tutte le matrici del simplesso e riguarda i termini della riga degli indicatori agli incroci con le colonne delle variabili fittizie e con le corrispondenti colonne delle variabili artificiali. I valori di due termini corrispondenti ( $u_1/a_1, u_2/a_2, u_3/a_3$ ) sono sempre del tipo  $pa+b, qa-b$ . Vale a dire che, tralasciando i termini in  $a$ , cioè  $pa$  e  $qa$ , **i due termini noti sono opposti.**

**84.3.4** Ancora un paio di riflessioni sul problema di minimo risolto sopra, su cui richiamiamo la tua attenzione.

Capisci da solo che, trattandosi di un problema di PL con due variabili di azione, non occorre scomodare il metodo del simplesso, ma bastava ricorrere al più semplice e immediato metodo grafico nel piano. Lo puoi fare da te per esercizio. Ovviamente troverai la stessa soluzione.

Un’altra considerazione. Trovato che per  $x_1=x_2=0$  non si ottiene una soluzione base ammissibile, siamo partiti in quarta con l’introduzione di variabili artificiali. In realtà si potevano prima fare dei tentativi per scoprire se, ponendo uguale a 0 le variabili di un’altra coppia distinta da  $(x_1, x_2)$ , non si potesse trovare una soluzione base ammissibile. In effetti, se si pone  $x_1=u_1=0$ , si trova:  $x_2=22, u_2=5, u_3=39$ ; vale a dire proprio una soluzione base ammissibile. In questo caso non serve introdurre le variabili artificiali, poiché il simplesso si sviluppa quasi esattamente come nel caso dei problemi di massimo.

Le differenze le abbiamo già segnalate: riguardano i coefficienti della riga degli indicatori che adesso non devono essere negativi e la colonna del pivot che è quella dell'indicatore che ha il valore negativo col massimo valore assoluto.

Prima, però, è necessario esprimere la funzione obiettivo  $\omega'$  per mezzo delle variabili  $x_1$  ed  $u_1$ , che diventano le nuove variabili di base. Questo comporta il calcolo preliminare delle variabili non di base  $x_2$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  in funzione di  $x_1$  ed  $u_1$ . Utilizzando le equazioni che traducono i vincoli tecnici del problema, si trova:

$$x_2 = -4x_1 + u_1 + 22, \quad u_2 = -2x_1 + u_1 + 5, \quad u_3 = -10x_1 + 3u_1 + 39$$

e, di conseguenza:

$$\omega' = -3x_1 + u_1 + 22.$$

Si tratta allora di rendere minima questa funzione sotto le condizioni precedenti che è più conveniente scrivere in questo modo:

$$4x_1 + x_2 - u_1 = 22, \quad 2x_1 - u_1 + u_2 = +5, \quad 10x_1 - 3u_1 + u_3 = 39.$$

Una volta compilata la prima matrice del simplesso (cosa che farai da te), dopo due elaborazioni (che pure troverai da solo) giungerai alla terza matrice del simplesso, che è la seguente:

$x_1$	$x_2$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	t.n.
0	1	0	1/2	-1/2	5
1	0	0	-3/4	1/4	6
0	0	1	-5/2	1/2	7
0	0	0	1/4	1/4	-11

Puoi trarre le conclusioni, che ovviamente sono le stesse dell'altro procedimento:

$$\min(\omega') = -(-11) \text{ e perciò } \min(\omega) = 4\min(\omega') - 15 = 4 \times 11 - 15 = 29,$$

per  $x_1=6$  ed  $x_2=5$  (nel qual caso, detto per inciso:  $u_1=7$ ,  $u_2=u_3=0$ ).

## 84.4 PROBLEMI RISOLTI <sup>(1)</sup>

**84.4.1** Concludiamo con la risoluzione di alcuni problemi di programmazione lineare con più di due variabili di azione. Ci limitiamo, però, a fornire una traccia di risoluzione, lasciando a te la prosecuzione dello svolgimento. Nelle pagine precedenti, e in particolare negli ultimi due paragrafi, trovi tutto ciò che ti è necessario sapere.

- PROBLEMA 1. Un'azienda produce 4 prodotti diversi: P1, P2, P3, P4.

Il massimo di produzione giornaliera, per ciascuno di essi, è il seguente:

$$\max(P1) = 600 \text{ pezzi}, \quad \max(P2) = 500 \text{ pezzi},$$

$$\max(P3) = 500 \text{ pezzi}, \quad \max(P4) = 700 \text{ pezzi};$$

ma complessivamente non possono essere prodotti più di 2000 pezzi al giorno.

L'azienda si è impegnata a produrre almeno 400 pezzi di P1 ed almeno 250 pezzi di P3.

Essa immette sul mercato i vari prodotti ai seguenti prezzi unitari:

$$P1: \text{€ } 2,00; \quad P2: \text{€ } 2,10; \quad P3: \text{€ } 1,90; \quad P4: \text{€ } 2,50.$$

<sup>1</sup> Questo paragrafo, in cui sono affrontati problemi con più di due variabili di azione, è riservato agli studenti del settore Economico, che peraltro, com'è stato già rilevato, svolgeranno l'intera unità nel corso del 5° anno.

Stabilire qual è la produzione giornaliera che assicura il massimo ricavo all'azienda.

RISOLUZIONE (traccia). Indicati con  $x_1, x_2, x_3, x_4$  i numeri, ovviamente non negativi, dei pezzi rispettivamente P1, P2, P3, P4 che vengono prodotti in un giorno, la funzione che esprime il ricavo giornaliero, espresso in euro, è evidentemente:

$$\omega = 2x_1 + 2,1x_2 + 1,9x_3 + 2,5x_4,$$

mentre i vincoli di produzione danno queste disequazioni:

$$x_1 \leq 600, x_2 \leq 500, x_3 \leq 500, x_4 \leq 700, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 2000, x_1 \geq 400, x_3 \geq 250.$$

Per trasformare questo sistema di 7 disequazioni in un sistema di altrettante equazioni, bisogna introdurre 7 variabili fittizie non negative:  $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7$ . Si ottiene il seguente sistema di 7 equazioni in 11 variabili:

$$\begin{cases} x_1 + u_1 = 600 \\ x_2 + u_2 = 500 \\ x_3 + u_3 = 500 \\ x_4 + u_4 = 700 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + u_5 = 2000 \\ x_1 - u_6 = 400 \\ x_3 - u_7 = 250 \end{cases}$$

Si forma la prima matrice del simplesso:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$	$u_5$	$u_6$	$u_7$	tn
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	600
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	500
0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	500
0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	700
1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	2000
1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	400
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	250
2	2,1	1,9	2,5	0	0	0	0	0	0	0	0

A questo punto, dal momento che nella riga degli indicatori compaiono valori positivi, devi procedere col metodo del simplesso.

Dopo aver svolto le necessarie operazioni, giungerai alla seguente conclusione:

Il ricavo massimo, che è di € 4375, si ottiene per questa produzione:

P1: 550 pezzi, P2: 500 pezzi, P3: 250 pezzi, P4: 700 pezzi.

- PROBLEMA 2. Un'impresa è impegnata contemporaneamente in tre settori di produzione – S1, S2, S3 – disponendo complessivamente di 80 operai.

In ogni settore non possono essere impiegati meno di 5 operai al giorno. Tuttavia si possono impegnare al più 40 operai nel settore S1, 35 in S2, 50 in S3.

Oltre alla paga in base alle tariffe ordinarie, l'impresa spende giornalmente per ogni operaio: 2 euro se egli è impegnato nel settore S1, 3 euro se è impegnato in S2 e 1,8 euro se è impegnato in S3.

Determinare quale distribuzione giornaliera degli operai comporta per l'impresa la minore spesa.

RISOLUZIONE (traccia). Indicati con  $x_1, x_2, x_3$  i numeri degli operai impiegati rispettivamente nei settori S1, S2, S3, la spesa giornaliera di cui parla la traccia del problema, espressa in euro, è chiaramente:

$$\omega = 2 x_1 + 3 x_2 + 1,8 x_3 .$$

I vincoli tecnici sono espressi dalle seguenti relazioni:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 80, \quad 5 \leq x_1 \leq 40, \quad 5 \leq x_2 \leq 35, \quad 5 \leq x_3 \leq 50.$$

Questo problema può essere ricondotto a due variabili effettive e quindi può essere risolto col metodo grafico nel piano (cosa che ti invitiamo a fare per esercizio).

Noi ci limitiamo a fornire il risultato:

La distribuzione degli operai che comporta la spesa minima, pari a € 155, è quella che assegna: 25 operai al settore S1, 5 operai al settore S2, 50 al settore S3.

• **PROBLEMA 3.** Individuare la combinazione produttiva ottima di un'azienda di 75 ettari, che dispone di 500 ore lavorative e di un capitale di anticipazione di € 2000.

Nell'azienda è possibile realizzare tre attività:

- produzione di frumento, che, per ogni quantità unitaria prodotta, impegna 1 ettaro di terreno, 0 ore lavorative e 10 euro;
- produzione di barbabietole da zucchero, che, per ogni quantità unitaria prodotta, richiede 1 ettaro di terreno, 25 ore lavorative e 20 euro;
- allevamento di vacche da latte, che, per ogni vacca allevata, comporta l'impiego di 1 ettaro di terreno, 20 ore lavorative e 50 euro.

Ogni quantità unitaria di frumento fornisce un reddito lordo di € 100, ogni quantità unitaria di barbabietole procura un reddito lordo di € 250 ed ogni vacca un reddito lordo di € 300.

**RISOLUZIONE** (traccia). Indichiamo con:

- $x_1$ : unità di quantità di frumento prodotto;
- $x_2$ : unità di quantità di barbabietole prodotte;
- $x_3$ : numero di vacche allevate.

Indicato con  $\omega$  il reddito complessivo lordo, espresso in euro, si ha evidentemente:

$$\omega = 100 x_1 + 250 x_2 + 300 x_3.$$

Ed è chiaro che la combinazione ottimale si ha per quei valori delle variabili che rendono massima  $\omega$ .

I vincoli di produzione portano alle seguenti disequazioni:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 75, \quad 25 x_2 + 20 x_3 \leq 500, \quad 10 x_1 + 20 x_2 + 50 x_3 \leq 2000.$$

Dopo aver semplificato queste disequazioni ed aver introdotto 3 variabili fittizie  $u_1, u_2, u_3$ , si ottiene il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + u_1 = 75 \\ 5x_2 + 4x_3 + u_2 = 100 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 + u_3 = 200 \end{cases}$$

Si compila la prima matrice del simplesso:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	tn
1	1	1	1	0	0	<b>75</b>
0	5	4	0	1	0	<b>100</b>
1	2	5	0	0	1	<b>200</b>
<b>100</b>	<b>250</b>	<b>300</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>

Poiché nella riga degli indicatori compaiono coefficienti positivi non puoi trarre alcuna conclusione,

ma puoi procedere col metodo del semplice. A conti fatti troverai la soluzione:

Il massimo ricavo lordo, pari a € 12500, si ha quando si producono 50 unità di quantità di frumento e 0 unità di quantità di barbabietole e si allevano 25 vacche.

- PROBLEMA 4. Si deve preparare un tipo di mangime per bestiame che utilizzi due sostanze nutritive S1 ed S2. Il mercato offre tre prodotti P1, P2, P3 che contengono S1 ed S2 nella percentuali indicate in tabella:

	P1	P2	P3
S1	10%	0%	30%
S2	0%	10%	20%

Il fabbisogno giornaliero minimo per una alimentazione razionale è del 30% di S1 e del 50% di S2. Nell'ipotesi che i costi dei prodotti siano, nell'ordine, 4 €/kg, 6 €/kg e 18 €/kg, si richiedono le quantità di P1, P2, P3 che devono essere distribuite giornalmente per avere un'alimentazione meno costosa e tale da soddisfare i limiti minimali richiesti.

[Tratto dall'esame di maturità per Ragionieri Programmatori, 1986, sessione ordinaria.

Nota: i prezzi dei prodotti sono stati adeguati alla nuova valuta]

RISOLUZIONE (traccia) Si indicano con  $x_1, x_2, x_3$  nell'ordine le quantità (in kilogrammi) dei prodotti P1, P2, P3 che devono essere distribuiti giornalmente. Il costo giornaliero, espresso in euro, da rendere minimo, è allora:

$$\omega = 4 x_1 + 6 x_2 + 18 x_3,$$

con i seguenti vincoli:

$$0,1 x_1 + 0,3 x_3 \geq 0,3, \quad 0,1 x_2 + 0,2 x_3 \geq 0,5,$$

naturalmente con  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$ .

Convieni scrivere le due disequazioni precedenti in una maniera più comoda:

$$x_1 + 3 x_3 \geq 3, \quad x_2 + 2 x_3 \geq 5,$$

Introdotte due variabili fittizie non negative,  $u_1$  ed  $u_2$ , le due precedenti disequazioni si trasformano nelle due equazioni seguenti:

$$x_1 + 3 x_3 - u_1 = 3, \quad x_2 + 2 x_3 - u_2 = 5.$$

Risolviamo con l'introduzione di due variabili artificiali,  $a_1$  ed  $a_2$ , di valore a arbitrariamente grande e positivo, scrivendo per prima cosa la matrice 0 del semplice:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$u_1$	$u_2$	$a_1$	$a_2$	tn
1	0	3	-1	0	1	0	3
0	1	2	0	-1	0	1	5
4	6	18	0	0	a	a	0

Da essa, dopo aver sostituito la riga degli indicatori con la somma, per colonne, con le prime due righe moltiplicate per -a, si ottiene la prima matrice del semplice:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$u_1$	$u_2$	$a_1$	$a_2$	tn
1	0	3	-1	0	1	0	3
0	1	2	0	-1	0	1	5
4-a	6-a	5a-18	a	a	0	0	-8a

Elaborandola nel modo conosciuto, dopo due iterazioni giungerai alla terza matrice del simplesso, che è anche la matrice “ottima” e dalla quale ricaverai la seguente conclusione:

Il costo minimo giornaliero per una corretta alimentazione nel rispetto dei limiti stabiliti è di € 36 e corrisponde all’impiego di:

0 kg del prodotto P1, 3 kg di P2, 1 kg di P3.

Un procedimento alternativo. Stabilito che per  $x_1=x_2=x_3=0$  non si ottiene una soluzione base ammissibile, prima di introdurre variabili artificiali, si può fare qualche tentativo per scoprire se, ponendo uguale a 0 le variabili di un’altra terna, che non sia  $(x_1, x_2, x_3)$ , possa scaturire una soluzione base ammissibile. In effetti, se si pone  $x_1=x_2=u_2=0$ , si trova:  $x_3=5/2$  ed  $u_1=9/20$ ; ossia proprio una soluzione base ammissibile. In questo caso non serve introdurre alcuna variabile artificiale, poiché il simplesso si sviluppa quasi esattamente come nel caso dei problemi di massimo.

Per prima cosa, però, bisogna esprimere  $x_3$ ,  $u_1$  ed  $\omega$  per mezzo di  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $u_2$ . Si trova:

$$x_3 = -\frac{1}{2}x_2 + 5u_2 + \frac{5}{2}, \quad u_1 = \frac{1}{10}x_1 - \frac{3}{20}x_2 + \frac{3}{2}u_2 + \frac{9}{20}, \quad \omega = 4x_1 - 3x_2 + 90u_2 + 45.$$

A questo punto, una volta constatato che le prime due equazioni si possono scrivere nel modo seguente:

$$x_2 + 2x_3 - 10u_2 = 5 \quad \text{e} \quad -2x_1 + 3x_2 + 20u_1 - 30u_2 = 9,$$

si può compilare la prima matrice del simplesso ed operare per ottimizzarla.

Puoi continuare da solo.

**84.4.2** Bisogna dire che la programmazione va ben oltre le poche cose che noi abbiamo potuto esporre ed il cui scopo è solo quello di darti un’idea delle questioni che possono essere affrontate.

Per esempio, la programmazione lineare viene distinta in *intera* (o *discreta*), *mista* e *bivalente*:

- la programmazione lineare *intera* si occupa dei problemi in cui intervengono variabili di azione suscettibili soltanto di valori interi;
- nella programmazione *mista* le variabili possono assumere valori anche decimali;
- la programmazione *bivalente* tratta infine dei casi in cui le variabili assumono i soli valori 0 e 1, e per questo è detta anche programmazione *zero-uno*.

Oltre alla programmazione lineare è affrontato lo studio della *programmazione non lineare*, in cui la funzione obiettivo o i vincoli sono espressi in tutto o in parte da funzioni non lineari.

Sono tutti argomenti di cui avrai modo di occuparti a fondo se proseguirai gli studi in corsi di laurea ad indirizzo economico.

## VERIFICHE

**Risolvere col metodo grafico nel piano (nn. 1-23):**

1. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), i punti (x,y), per i quali risulta:

$$2x + y \geq 12, \quad x + 12y \geq 19, \quad x + y \leq 8,$$

individuano una regione finita di piano. Calcolarne l’area.

2. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), i punti (x,y), per i quali risulta:

$$2|x| + 3|x-y| \leq 5,$$

individuano una regione finita di piano. Calcolarne l'area.

3. Rendere massima la funzione:  $f(x,y)=40x+50y$ , con  $x, y$  numeri reali non negativi, sotto le condizioni seguenti:

$$2x + y \leq 4, \quad x - y \leq 1.$$

4. Rendere massima la funzione:  $f(x,y)=12x+24y+800$ , con  $x, y$  numeri reali non negativi, sotto le condizioni seguenti:

$$2x + 3y \leq 60, \quad x + y \leq 1.$$

5. Rendere minima la funzione:  $f(x,y)=40x+60y$ , con  $x, y$  numeri reali non negativi, sotto le condizioni seguenti:

$$2x - y = 2, \quad x + y \leq 10, \quad y \geq 1.$$

6. Rendere minima la funzione:  $f(x,y) = 800x+900y+20000$ , con  $x, y$  numeri reali non negativi, sotto le condizioni seguenti:

$$3x + 2y = 40, \quad y - 2x \leq 4, \quad y \geq 5.$$

7. Rendere massima la funzione:  $f(x,y) = 4x-4y+25$ , con  $x, y$  numeri reali non negativi, sotto le condizioni seguenti:

$$3y - x \geq 3, \quad x - y \geq 1.$$

[R. Infinite soluzioni]

8. Rendere minima la funzione:  $f(x,y) = 9x+3y+17$ , con  $x, y$  numeri reali non negativi, sotto le condizioni seguenti:

$$3x + y \geq 3, \quad x \leq 3, \quad y \leq 3.$$

[R. Infinite soluzioni]

9. Rendere minima la funzione:  $f(x,y) = 8x+3y+15$ , con  $x, y$  numeri reali non negativi, sotto le condizioni seguenti:

$$3x + y \leq 3, \quad x \leq 4, \quad y \geq 3.$$

[R. Problema inconsistente]

10. Rendere massima la funzione:  $f(x,y) = 3x+6y+5$ , con  $x, y$  numeri reali non negativi, sotto le condizioni seguenti:

$$x + y \leq 4, \quad x + 3y \leq 6, \quad x - y \leq 5.$$

Uno dei vincoli assegnati è ridondante: quale?

11. Tra le soluzioni non negative del sistema costituito dalle seguenti disequazioni:

$$x+y \geq 1, \quad y-x \leq 2, \quad 3x+5y \leq 15, \quad 10x+7y \leq 35,$$

trovare quella che rende massima e quella che rende minima la funzione:  $f(x,y)=x+y$ .

12. Tra le soluzioni non negative del sistema formato dalle seguenti disequazioni:

$$x + y \geq 6, \quad x + 2y \geq 12, \quad 2x + y \geq 14,$$

trovare quella che rende minima la quantità  $3x+4y$ .

13. Una fabbrica produce due manufatti A e B. Per il manufatto A, che poi rivende a 1,75 euro al pezzo, spende 0,35 euro al pezzo per materie prime e lavorazione del prodotto e deve affrontare una spesa fissa giornaliera di € 300. Per il manufatto B, che rivende invece a 2 euro al pezzo, spende 0,42 euro al pezzo per materie prime e lavorazione e deve sostenere una spesa fissa giornaliera di € 380. Per impegni assunti deve produrre giornalmente almeno 500 pezzi del manufatto A ma la produzione complessiva dei due manufatti non può superare le 900 unità e il numero dei pezzi B non può superare la metà di quello dei pezzi A.

Qual è il piano di produzione che procura il maggior profitto alla fabbrica?

14. Un'azienda, per la produzione di due manufatti A e B, può utilizzare al massimo in una giornata 800

ore lavorative, disponendo di 2000 kg di materie prime. Per il manufatto A, che è rivenduto con un guadagno netto di € 0,25 al pezzo, occorrono 3 ore di lavoro e 90 kg di materie prime. Per il manufatto B, che è rivenduto con un guadagno netto di € 0,30 al pezzo, occorrono 3 ore di lavoro e 70 kg di materie prime. Quale produzione giornaliera assicura il massimo guadagno?

[R. Se  $x$  è il numero dei pezzi A che si producono giornalmente ed  $y$  quello dei pezzi B, si tratta di rendere massima la funzione  $0,25x+0,30y$  sotto le condizioni:  $3x+3,5y\leq 800$ ,  $90x+70y\leq 2000$ , naturalmente con  $x\geq 0$  ed  $y\geq 0$ ]

15. Un'azienda, per la produzione di due manufatti A e B, può utilizzare due macchine diverse,  $M'$  ed  $M''$ : la prima per un massimo di 10 ore al giorno, la seconda per un massimo di 8 ore al giorno. Per il manufatto A, che è venduto con un guadagno netto di € 8 al pezzo, occorrono 5 ore di lavoro della macchina  $M'$  e 3 ore della macchina  $M''$ . Per il manufatto B, che è venduto con un guadagno netto di € 7 al pezzo, occorrono 3 ore di lavoro della macchina  $M'$  e 4 ore della macchina  $M''$ . Quale produzione assicura ogni giorno all'azienda il massimo guadagno?
16. Le seguenti questioni possono essere risolte sia col metodo grafico nel piano (ma dopo qualche considerazione atta a ridurre a due il numero delle variabili di azione) sia col metodo del simplesso. Provarli entrambi.
- a) Rendere massima la quantità  $300x+100y+200z$ , con  $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ , sotto le condizioni seguenti:  $x+2z=4$ ,  $2x+3y\leq 18$ ,  $y+z\leq 5$ .
- b) Rendere minima la quantità  $200x+300y+500z$ , con  $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ , sotto le condizioni seguenti:  $x+2y+5z=6$ ,  $7x+2y+5z\geq 15$ ,  $y\geq 2z$ .

[R. Circa la questione a), si osservi che dall'equazione  $x+2z=4$  si ricava  $z=2-x/2$ , per cui la quantità da rendere massima diventa ... , mentre le condizioni si modificano nelle seguenti:  $0\leq x\leq 4$ ,  $2x+3y\leq 18$ ,  $2y-x\leq 6$ . Sicché ...]

17. Un'impresa produce un certo articolo in due diversi centri di produzione:  $P_1$ ,  $P_2$ . Settimanalmente sono prodotti 2500 pezzi nel centro  $P_1$  e 3200 nel centro  $P_2$ . Tutti i prezzi prodotti devono essere convogliati in tre punti vendita –  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$  – in modo che ogni settimana in  $V_1$  giunga il 30% dei pezzi prodotti, in  $V_2$  ne giunga il 45% ed in  $V_3$  la quantità rimanente. La seguente tabella indica il costo unitario di trasporto (in euro) dai centri  $P_1$ ,  $P_2$  di produzione a quelli  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  di smistamento:

	$V_1$	$V_2$	$V_3$
$P_1$	0,08	0,10	0,09
$P_2$	0,12	0,08	0,10

Trovare il piano di trasporto che ottimizza i costi.

[R. Se  $x_1$  indica il numero dei pezzi che devono essere trasportati da  $P_1$  a  $V_1$ ,  $1710-x_1$  indica quello dei pezzi che devono essere trasportati da  $P_2$  a  $V_1$ ; ... . Si tratta allora di rendere minima la funzione:

$$z = 552,90 - 40 x_1 + 20 x_2 - 10 x_3,$$

dove  $x_1\geq 0$ ,  $x_2\geq 0$ ,  $x_3\geq 0$ , con i seguenti vincoli:  $x_1\leq 1710$ ,  $x_2\leq 2565$ ,  $x_3\leq 1425$ ,  $x_1+x_2+x_3=2500$ ]

18. Un'azienda produce tre articoli diversi: A, B, C. Si sa che la produzione complessiva di una settimana (= 6 gg lavorativi) non può superare le 100 unità e sono disponibili 20 operai (cioè  $20\times 6=120$  giornate lavorative).

La seguente tabella fornisce il costo complessivo ( $C_u$ ) di ogni articolo in euro, il prezzo di vendita ( $P$ ) di ogni pezzo in euro e il numero di giornate lavorative ( $NG$ ) per produrlo:

	Cu	P	NG
A	250	350	4
B	20	35	0,5
C	180	300	8

La disponibilità dell'azienda per le spese di produzione settimanale è di € 5000.

Trovare la combinazione che procura all'azienda il massimo profitto, tenendo anche presente che le unità degli articoli prodotti possono essere frazionate.

[R. max profitto = € 2828,50 per questa produzione: 9,7 pezzi di A; 85,5 di B; 4,8 di C]

19. Trovare la combinazione più conveniente per un allevatore di bestiame che, dovendo preparare del mangime per gli animali, dispone dei seguenti dati:
- il mangime dovrà essere composto da una miscela di tre componenti: A tra il 20% e il 40%; B tra il 15% e il 35%; C tra il 25% e il 45%;
  - i prezzi al mercato sono questi: 20 €/q per A, 23 €/q per B, 19 €/q per C.
20. Trovare la combinazione più economica per un allevatore di bestiame che deve preparare del mangime per gli animali e dispone di questi elementi:
- il mangime dovrà contenere due sostanze nutritive S' ed S'' nei seguenti quantitativi:  
almeno 500 g di S' e 700 g di S'', al più 1500 g di S' e 1200 g di S'';
  - in commercio vi sono tre prodotti – A, B, C – che contengono, diversamente mescolate, le due sostanze; precisamente ogni confezione del prodotto:
    - A contiene 30 g di S' e 15 g di S'' e costa € 0,40;
    - B contiene 20 g di S' e 15 di S'' e costa € 0,35;
    - C contiene 25 g di S' e 20 g di S'' e costa € 0,42.
21. L'utile, espresso in euro, di un'azienda che produce gli articoli A e B nelle misure rispettive  $x_1$  ed  $x_2$ , è dato dalla seguente funzione:

$$z = 100 x_1 + 50 x_2,$$

dove le variabili non negative  $x_1$  ed  $x_2$  sottostanno ai seguenti vincoli:

$$28x_1 + 7x_2 \leq 168, \quad 3x_1 + 3x_2 \leq 42, \quad 7x_1 + 14x_2 \leq 84.$$

Trovare la produzione che rende massimo l'utile dell'azienda.

[Tratto dall'esame di maturità per Ragionieri Programmatori, 1998, sessione ordinaria.

Nota: i prezzi dei prodotti sono stati adeguati alla nuova valuta]

[R. Massimo utile  $\approx$  € 685,71 per  $x_1=36/7$  e  $x_2=24/7$ ]

22. Un'azienda produce fertilizzante in due diversi centri di produzione:  $C_1$  e  $C_2$ . Settimanalmente sono prodotti 40 q nel centro  $C_1$  e 50 q nel centro  $C_2$ . Tutto il fertilizzante prodotto deve essere convogliato in tre punti vendita –  $V_1, V_2, V_3$  – in modo che ogni settimana in  $V_1$  giungano 35 q di fertilizzante, in  $V_2$  ne giungano 30 q ed in  $V_3$  la quantità rimanente. La seguente tabella indica il costo di trasporto (in €/q) dai centri di produzione ai punti vendita:

	$V_1$	$V_2$	$V_3$
$C_1$	20	40	30
$C_2$	10	50	60

Quale piano di trasporto ottimizza i costi?

[R. Indicati con  $x, y, z$  i quintali di fertilizzante trasportati da  $C_1$  rispettivamente a  $V_1, V_2, V_3$ , quelli trasportati da  $C_2$  a  $V_1, V_2, V_3$  sono nell'ordine:  $35-x, 30-y, 25-z$ , con i vincoli economici  $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$  ed i vincoli tecnici:  $x \leq 35, y \leq 30, z \leq 25$  ed  $x+y+z=40$ . Si tratta di rendere minima la fun-

zione  $C(x,y,z)=(20x+40y+30z)+(10(35-x)+50(30-y)+60(25-z))$  con i vincoli suddetti]

23. Un'industria produce due tipi di pezzi lavorati costituiti dalla stessa quantità e qualità di materia, ma con diversi processi di lavorazione che impiegano tre macchine A, B, C. Lo schema di lavoro è il seguente:

Ore macchina	Prodotto P1	Prodotto P2
A	2	1
B	3	2
C	1	3

Le ore di lavoro macchina disponibili giornalmente sono: 8 per A, 24 per B, 18 per C.

Il guadagno unitario è di € 0,4 per i pezzi del primo tipo e di € 0,3 per i pezzi del secondo tipo.

Si vuole programmare la quantità di pezzi dei due tipi che occorre produrre giornalmente per ottenere il massimo guadagno.

[Tratto dall'esame di maturità per Ragionieri Programmatori, 1988, sessione ordinaria. Nota: i prezzi unitari sono stati cambiati per adattarli alla nuova valuta]

[R. Se  $x$  è il numero dei pezzi P1 che si producono giornalmente ed  $y$  quello dei pezzi P2, si tratta di rendere massima la funzione  $0,4x+0,3y$  sotto le condizioni seguenti:  $2x+y\leq 8$ ,  $3x+2y\leq 24$ ,  $x+3y\leq 18$ , naturalmente con  $x\geq 0$  ed  $y\geq 0$ ]

**Metodo del simplesso per funzioni di due variabili (nn. 24-28):**

- 24. Risolvere col metodo del simplesso il precedente esercizio n. 19.
- 25. Risolvere col metodo del simplesso il precedente esercizio n. 20.
- 26. Risolvere col metodo del simplesso il precedente esercizio n. 21.
- 27. Risolvere col metodo del simplesso il precedente esercizio n. 22.
- 28. Risolvere col metodo del simplesso il precedente esercizio n. 23.

**Metodo del simplesso per funzioni di più di due variabili (nn. 29-38):**

29. Rendere massima la funzione:  $f(x,y,z)=3x+10y+2z$ , con  $x, y, z$  numeri reali non negativi, sotto le condizioni seguenti:

$$2x+8y+z\leq 400, 4x+24y+5z\leq 1400, x+y+z\geq 250.$$

30. Rendere massima la funzione:  $f(x,y,z)=2x+20y+3z$ , con  $x, y, z$  numeri reali non negativi, sotto le condizioni seguenti:

$$2x+8y+z\leq 300, 10y+z\leq 100, x+16y+5z\leq 800, y\geq 2.$$

31. Rendere minima la funzione:  $f(x,y,z)=9x+4y+4z$ , con  $x, y, z$  numeri reali non negativi, sotto le condizioni seguenti:

$$21x + 7y + 4z \geq 294, 7x + 7y + 8z \geq 210.$$

32. Tra le soluzioni non negative del sistema formato dalle seguenti disequazioni:

$$x+y+z+t\geq 30, 3x+2y+z+t\geq 70,$$

trovare quella che rende minima la quantità:  $x+2y+2z+t$ .

33. Un'azienda produce tre articoli diversi: A, B, C. Si sa che la produzione complessiva di una settimana (= 6 gg lavorativi) non può superare le 100 unità e sono disponibili al più 20 operai (cioè  $20\times 6=120$  giornate lavorative).

La seguente tabella fornisce il costo complessivo ( $C_u$ ) di ogni articolo in euro, il prezzo di vendita ( $P$ ) di ogni pezzo in euro e il numero di giornate lavorative ( $NG$ ) per produrlo:

	Cu	P	NG
A	250	350	4
B	20	35	0,5
C	180	300	8

La disponibilità dell'azienda per le spese di produzione settimanale è di € 5000.

Trovare la combinazione che procura all'azienda il massimo profitto, tenendo anche presente che le unità degli articoli prodotti possono essere frazionate.

[R. Indicate con  $x, y, z$  le unità prodotte degli articoli A, B, C rispettivamente, si tratta di rendere massima la funzione  $G(x,y,z)=100x+15y+120z$ , con  $x,y,z \geq 0$  e con i seguenti vincoli tecnici:  $x+y+z \leq 100$ ,  $4x+0.5y+8z \leq 120$ ,  $250x+20y+180z \leq 5000$ ]

34. Un'azienda produce 4 prodotti – A, B, C, D – con la cui vendita ottiene un utile per ogni articolo venduto, rispettivamente di € 0,27, € 0,18, € 0,30, € 0,24. L'azienda può produrre giornalmente al più 80 pezzi di A; il numero dei pezzi B non deve essere inferiore a quello dei pezzi C ed il numero dei pezzi D non può essere inferiore a quello dei pezzi A; inoltre la produzione giornaliera complessiva non può superare i 500 pezzi.

Calcolare quale produzione giornaliera assicura all'azienda il massimo guadagno.

[R.  $\max(G) = € 122,40$  per questa produzione: pezziA=pezziD=80, pezziB=pezziC=170]

35. Un'azienda produce 4 prodotti – A, B, C, D – con la cui vendita ottiene un utile, per ogni pezzo venduto, rispettivamente di € 0,27, € 0,18, € 0,30, € 0,24.

L'azienda deve produrre giornalmente almeno 15 pezzi di A; il numero dei pezzi B non deve essere inferiore al doppio dei pezzi C e la produzione giornaliera complessiva non deve risultare inferiore a 50 pezzi e superiore a 500.

Calcolare qual è la produzione giornaliera che assicura all'azienda il massimo guadagno e quella che le procura il minimo guadagno.

[R.  $\max(G) = € 135$  per: pezziA=500, pezziB=pezziC=pezziD=0; ... ]

36. Un'azienda produce 3 articoli – A, B, C – ottenendo un utile rispettivamente di € 100, € 120, € 150 per ogni pezzo e impegnando 4 reparti di lavorazione – R1, R2, R3, R4 – con ore di lavoro, impiegate per la produzione di un pezzo, sintetizzate nella seguente tabella:

	R <sub>1</sub>	R <sub>2</sub>	R <sub>3</sub>	R <sub>4</sub>
A	3	1	0	2
B	2	2	4	0
C	1	4	2	2

Nell'arco di una giornata lavorativa il monte ore nei vari reparti è soggetto a questi vincoli:

- reparto R1: non più di 150 ore lavorative;
- reparto R2: almeno 50 ore lavorative ma al più 180;
- reparto R3: al più 120 ore lavorative;
- reparto R4: al più 90 ore lavorative.

L'azienda deve produrre giornalmente almeno 20 pezzi A, ma la produzione complessiva non può superare gli 80 pezzi.

Determinare la produzione giornaliera ottima per l'azienda e il numero di ore lavorative di ciascun reparto.

[R. L'azienda realizza l'utile massimo, pari a € 7500 al giorno, se produce giornalmente 30 pezzi di A, 25 di B, 10 di C. In questo caso ecco le ore lavorative nei vari reparti: R1-150, R2-120, R3-120, R4-90]

37. Un'azienda produce olio combustibile in due diversi centri di produzione:  $C_1$  e  $C_2$ . Settimanalmente sono prodotti 300 tonnellate nel centro  $C_1$  e 500 tonnellate nel centro  $C_2$ . Tutto il combustibile prodotto deve essere convogliato in quattro punti vendita –  $V_1, V_2, V_3, V_4$  – in modo che ogni settimana in  $V_1$  giunga il 15% del combustibile prodotto, in  $V_2$  ne giunga il 40%, in  $V_3$  il 25%, ed in  $V_4$  la quantità rimanente. La seguente tabella indica il costo di trasporto (in euro a tonnellata) dai centri di produzione ai punti vendita:

	$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$
$C_1$	120	140	130	110
$C_2$	110	150	160	80

Quale piano di trasporto ottimizza i costi?

[R. Indicati con  $x, y, z, t$  le tonnellate di olio combustibile trasportati da  $C_1$  rispettivamente a  $V_1, V_2, V_3, V_4$ , quelli trasportati da  $C_2$  a  $V_1, V_2, V_3, V_4$  sono nell'ordine:  $120-x, 320-y, 200-z, 160-t$  con i vincoli economici  $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, t \geq 0$  ed i vincoli tecnici:  $x \leq 120, y \leq 320, z \leq 200, t \leq 115$  ed  $x+y+z+t=300$ . Si tratta di rendere minima la funzione  $C(x,y,z) = (120x+140y+130z+110t) + (110(120-x)+150(320-y)+160(200-z)+80(160-t))$  con i vincoli suddetti]

38. Un allevatore di bestiame deve preparare del mangime per gli animali e dispone dei seguenti elementi:

- il mangime dovrà essere composto da una miscela di quattro componenti: A per non più del 40%; B tra il 15% e il 35%; C per non meno del 25%; D per non più del 25%.
- i prezzi dei componenti sono questi: 20 €/q per A, 23 €/q per B, 19 €/q per C, 22 €/q per D.

Trovare la combinazione più conveniente per l'allevatore.

[R. Indicate con  $x, y, z, t$  le quantità percentuali dei componenti A, B, C, D rispettivamente, si tratta di rendere minima la funzione  $f(x,y,z,t)=20x+23y+19z+22t$  con i vincoli seguenti:  $0 \leq x \leq 40, 15 \leq y \leq 35, z \geq 25, 0 \leq t \leq 20, x+y+z+t=100$ ]

## UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

### DOMANDE.

1. Quante devono essere le variabili, per mezzo delle quali è espressa la funzione obiettivo, affinché il relativo problema di programmazione lineare possa essere risolto col metodo grafico nel piano?
2. Cosa s'intende per regione delle soluzioni ammissibili?
3. Ammesso che un problema di programmazione lineare ammetta una soluzione ottima, è possibile che essa sia situata in un punto di tale regione diverso dai suoi vertici?
4. È possibile che un problema di programmazione lineare ammetta una soluzione ottima in corrispondenza di più punti?
5. Quando un problema di programmazione lineare si dice inconsistente?
6. Quando si ricorre all'algoritmo del simplesso per risolvere un problema di ottimo, una volta ottenuta la funzione obiettivo e tradotti in equazioni o disequazioni i vincoli del problema, si può stabilire quante sono le variabili fittizie?
7. Quando si ricorre all'algoritmo del simplesso eseguito col metodo del pivot, quando si ha la certezza di aver ottenuto la matrice "ottima"?

8. Quando si ricorre all'algoritmo del simplesso eseguito col metodo del pivot, quando si introducono le variabili artificiali?
9. Quando si ricorre al metodo del simplesso eseguito col metodo del pivot, come si determina la posizione del pivot?
10. Quando si ricorre all'algoritmo del simplesso eseguito col metodo del pivot, una volta individuato il pivot in una determinata matrice, che però non sia l'ultima, come si costruisce la matrice successiva?

**RISPOSTE.**

1. Evidentemente le variabili effettive devono essere due. Questo significa che possono essere anche più di due, per esempio tre, ma a condizione che uno dei vincoli sia tradotto in un'equazione nelle tre incognite. Di modo che il problema possa essere ricondotto a due variabili effettive.
2. È la regione determinata dai vincoli quando questi sono espressi da disequazioni nelle due variabili effettive che compaiono nella funzione obiettivo.
3. No. Un teorema fondamentale di programmazione lineare assicura che, se soluzione ottima c'è, questa deve trovarsi in corrispondenza di uno dei vertici della regione delle soluzioni ammissibili.
4. È possibile, ma in questo caso tutti i punti, in corrispondenza dei quali c'è la soluzione ottima, sono compresi fra due vertici adiacenti della regione delle soluzioni ammissibili.
5. Un problema di PL si dice inconsistente quando i vincoli del problema sono incompatibili e perciò la regione ammissibile è l'insieme vuoto.
6. Sì. Basta constatare che ogni disequazione deve essere trasformata in un'equazione per l'appunto con l'introduzione di una variabile fittizia. Per cui tali variabili sono tante quante sono le disequazioni corrispondenti ai vincoli del problema.
7. Bisogna distinguere. Se si tratta di un problema di massimo, la matrice è "ottima" se nella riga degli indicatori non figurano termini positivi (come dire che fra i coefficienti delle variabili della funzione obiettivo non ne figurano di positivi). Se si tratta invece di un problema di minimo, la matrice è "ottima" se nella riga degli indicatori non figurano termini negativi (come dire che fra i coefficienti delle variabili della funzione obiettivo non ne figurano di negativi).
8. Quando si risolve un problema di minimo e la soluzione base ottenuta non è una soluzione base ammissibile (il che significa che tra le sue componenti ce ne sono di negativi).
9. Bisogna distinguere. Se si tratta di un problema di massimo, la colonna del pivot è quella individuata dal numero positivo che, nella riga degli indicatori, ha il massimo valore. Se si tratta invece di un problema di minimo, la colonna del pivot è individuata dal numero negativo che, nella riga degli indicatori, ha il massimo valore assoluto. A questo punto, sia che si tratti di un problema di massimo sia di un problema di minimo, si dividono i termini noti per i corrispondenti valori della colonna del pivot (trascurando, ove ce ne fossero, i casi in cui il divisore è 0): la riga del pivot è quella cui corrisponde il valore minimo.
10. Anzitutto bisogna far sì che il pivot diventi uguale ad 1: per questo si moltiplicano gli elementi della riga del pivot per il reciproco del pivot. Adesso bisogna ridurre a 0 i termini della colonna del pivot, fatta eccezione naturalmente per il pivot: si ottiene lo scopo operando opportune combinazioni lineari fra le righe della matrice.