Prerequisiti:
- Conoscenze varie di matematica
- Uso consapevole di connettivi e quantificatori

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono:

- *avere consapevolezza del significato dei termini "ipotesi" e "tesi"*
- *sapere individuare ipotesi e tesi nell'enunciato di un teorema*
- *essere in grado di impostare una dimostrazione per assurdo*
- *saper elencare le principali figure di ragionamento*
- *essere in grado di produrre congetture e saperle sostenere con ragionamenti corretti*
- *saper confutare congetture anche con il ricorso ad un controesempio*
- *essere in grado di stabilire se un ragionamento è corretto o no*

Le Indicazioni Nazionali e le Linee Guida non prescrivono uno studio esplicito di questa unità. Riteniamo tuttavia che essa possa riguardare tutte le scuole superiori (5ª classe), ma in particolare il Liceo Scientifico e il Liceo Classico.
L'unità si occupa di concetti che, a varie riprese, sono stati oggetto di studio negli anni passati. Qui sono richiamati per un consolidamento e un approfondimento. Se, poi, negli anni passati questi concetti non fossero stati mai sviluppati, questa è l'occasione buona per rimediare.

Forme e figure di ragionamento

Unità 88

88.1 PREMESSA

Abbiamo parlato più volte in passato di “ragionamento corretto”, di “teorema” e “dimostrazione”, di “ipotesi” e “tesi”, di proposizione “contronominale”, “inversa” o “contraria”, e di altro ancora.
Lo abbiamo fatto poiché in parte abbiamo avuto modo di illustrare questi termini [1], in parte perché abbiamo fatto affidamento sul tuo buonsenso. Adesso è giunto il momento per una organizzazione sistematica dell’argomento ed una formalizzazione di tutti questi concetti.
Ammettiamo per acquisito da parte tua l’uso consapevole di connettivi e quantificatori [2].

88.2 IL RAGIONAMENTO DIRETTO

88.2.1 È molto probabile che questo argomento, almeno in parte, sia stato da te affrontato già nel corso del primo biennio, ma non è escluso che a suo tempo sia stato sviluppato in maniera poco approfondita o addirittura che sia stato accantonato. Per questo riteniamo utile riproporre parti già trattate e nello stesso tempo trattarne di nuove per un consolidamento e un ampliamento dei concetti studiati.

In matematica (e non solo) ci si imbatte spesso in situazioni in cui, partendo da una certa premessa I, supposta ovviamente vera, segue una conclusione T. In situazioni, cioè, del tipo:

Se questo (I) è vero allora è vero quest’altro (T).

Una situazione siffatta è espressa dall’implicazione $I \rightarrow T$.
In passato abbiamo avuto occasione di assumere come vere alcune di queste implicazioni: le abbiamo chiamate a volte *regole*, a volte *postulati* o altro; altre volte le abbiamo dimostrate e chiamate *teoremi*.
In generale, si definisce **teorema** un enunciato che, sulla base di premesse accettate come vere, si dimostra essere vero. Di conseguenza l’implicazione $I \rightarrow T$ (con premessa I vera), che si dimostri essere vera, è un teorema. La premessa I si chiama ***ipotesi***, la conclusione T ***tesi***.
L’argomentazione in base alla quale è dimostrato un teorema – cioè il fatto che dalla verità dell’ipotesi segue quella della tesi – è condotta attraverso una catena di deduzioni che formano il ***ragionamento deduttivo***.
Esso è di solito un **ragionamento diretto**, nel senso che, a partire dalla proposizione I e procedendo per passi, magari mediante l’utilizzazione di altre proposizioni della cui verità siamo certi (sono dette a volte: ***ipotesi implicite***), si perviene alla proposizione T.
A titolo di esempio, supponiamo di dover dimostrare il seguente teorema:

In ogni triangolo ciascun lato è minore del semiperimetro del triangolo.

Diciamo intanto che qui l’ipotesi sembra non esistere. In realtà, il teorema può mettersi nella forma seguente:

Se una figura geometrica è un triangolo allora …

E adesso l’ipotesi è chiara. Oltre a questa ipotesi (*esplicita*), sono sottintese altre proposizioni vere (*ipotesi implicite*), assunte come tali o già dimostrate, come questa, per esempio:

In ogni triangolo ciascun lato è minore della somma degli altri due.

Orbene, prendendo le mosse proprio da questa proposizione e indicando con a, b, c le lunghezze dei lati del triangolo, si ha, per esempio:

$$a < b+c.$$

[1] Cfr.: Unità 9: Logica: prime nozioni.
[2] Vedi nota 1.

Sommando la lunghezza a ad entrambi i membri (operazione giustificata da un'altra ipotesi implicita), otteniamo:

$$a+a < a+b+c,$$

da cui segue:

$$2a < 2p$$

dove p è il semiperimetro del triangolo, e infine (per un'ulteriore ipotesi implicita):

$$a < p.$$

Analogamente per gli altri due lati.

88.2.2 Prese due qualsiasi proposizioni A, B, la proposizione $A \to B$ è equivalente a $\overline{B} \to \overline{A}$, dove, lo ricordiamo, $\overline{A}$ e $\overline{B}$ rappresentano le negazioni di A e B rispettivamente. In simboli:

$$\mathbf{A \to B \equiv \overline{B} \to \overline{A}.}$$

Le due implicazioni $A \to B$ e $\overline{B} \to \overline{A}$ sono pertanto o entrambe vere o entrambe false.
Se, ora, la proposizione:

$$\mathbf{A \to B}$$

esprime l'enunciato di un teorema (che, per comodità, chiamiamo ***teorema diretto***), allora anche la proposizione:

$$\mathbf{\overline{B} \to \overline{A}}$$

è un teorema: la diciamo ***teorema contronominale***.
Assieme alle due suddette, è interessante considerare altre due proposizioni:

$$\mathbf{B \to A} \ \text{ e } \ \mathbf{\overline{A} \to \overline{B}}\,,$$

dette rispettivamente *implicazione inversa* e *implicazione contraria* di $A \to B$.
La verità dell'implicazione (diretta) $A \to B$, mentre rende automatica quella della contronominale $\overline{B} \to \overline{A}$, non comporta invece necessariamente la verità delle implicazioni inversa e contraria. Queste ultime due proposizioni possono essere vere (nel qual caso lo sono entrambe, poiché l'una è la contronominale dell'altra, e quindi sono anch'esse dei teoremi) ma possono risultare false (e anche adesso lo sono entrambe e quindi non sono dei teoremi). In ogni caso, che esse siano vere va dimostrato. La cosa è ben evidenziata dai seguenti esempi.

- ESEMPIO 1:
  - $A \to B$: se un quadrilatero è inscrivibile in un cerchio allora ha gli angoli opposti supplementari (si dimostra che è *vera*);
  - $\overline{B} \to \overline{A}$: se un quadrilatero non ha gli angoli opposti supplementari allora non è inscrivibile in un cerchio (è *vera* perché contronominale della precedente);
  - $B \to A$: se un quadrilatero ha gli angoli opposti supplementari allora è inscrivibile in un cerchio (si dimostra che è *vera*);
  - $\overline{A} \to \overline{B}$: se un quadrilatero non è inscrivibile in un cerchio allora non ha gli angoli opposti supplementari (è *vera* perché contronominale della precedente).
- ESEMPIO 2:
  - $A \to B$: se un quadrilatero è un quadrato allora è equilatero (si dimostra che è *vera*);
  - $\overline{B} \to \overline{A}$: se un quadrilatero non è equilatero allora non è un quadrato (è *vera* perché contronominale della precedente);

- B→A: se un quadrilatero è equilatero allora è un quadrato (*falsa* – basta un controesempio: il rombo è equilatero ma non è necessariamente un quadrato);
- $\overline{A} \to \overline{B}$: se un quadrilatero non è un quadrato allora non è equilatero (essa pure è *falsa*).

ESERCIZIO. Prendi in esame ciascuna delle seguenti proposizioni. È un teorema? Enuncia di essa le proposizioni contronominale, inversa e contraria. Si ottengono dei teoremi?

1) Se due numeri naturali sono primi allora sono primi fra loro.
2) Se un pentagono è equilatero ed inscrivibile in un cerchio allora è equiangolo.
3) Una similitudine conserva il parallelismo delle rette.
4) Se due rette, assegnate nello spazio, sono strettamente parallele allora non hanno punti comuni.
5) Se una funzione è derivabile in un intervallo allora è continua in esso.

88.2.3 Quando dell'implicazione che esprime l'enunciato di un teorema (diretto) vale anche l'implicazione inversa, e di conseguenza pure la contraria, nel senso che anche queste due proposizioni sono implicazioni vere, e perciò sono teoremi, allora si chiamano più esattamente ***teorema inverso*** e ***teorema contrario***.

In questo caso, posto che A→B indichi il teorema diretto e perciò B→A indica il teorema inverso, è ovviamente vera la proposizione:

$$A \to B \wedge B \to A.$$

Come noto, si dice che A è ***condizione necessaria e sufficiente*** per B.

In particolare, riprendendo l'esempio 1:

il fatto "un quadrilatero è inscrivibile in un cerchio"
è condizione necessaria e sufficiente per concludere che
"il quadrilatero ha gli angoli opposti supplementari".

Se invece vale il teorema diretto A→B ma non l'inverso B→A, si dice che A è ***condizione sufficiente*** (*ma non necessaria*) per B oppure che B è ***condizione necessaria*** (*ma non sufficiente*) per A.

Con riferimento all'esempio 2:

- il fatto "un quadrilatero è un quadrato" è condizione sufficiente (ma non necessaria) per concludere che "il quadrilatero è equilatero";
- il fatto "un quadrilatero è equilatero" è condizione necessaria (ma non sufficiente) perché risulti che "il quadrilatero è un quadrato".

Ti proponiamo alcuni esercizi.

1. Enuncia le proposizioni contronominale, inversa e contraria della seguente proposizione e di ognuna di esse di' se si tratta di un teorema o no:

«se gli angoli opposti di un quadrilatero sono congruenti
allora il quadrilatero è un parallelogramma».

2. Spiega perché il fatto che due punti A e B hanno uguale distanza da una retta r è condizione necessaria ma non sufficiente per concludere che la retta AB è parallela alla retta r.

3. Enuncia le proposizioni contronominale, inversa e contraria della seguente proposizione e di ognuna di esse di' se si tratta di un teorema o no:

«se un quadrilatero è un quadrato allora i suoi lati opposti sono congruenti».

4. Il fatto «un numero è pari e primo» è condizione necessaria e sufficiente per concludere che «il numero è 2». È vero o falso?

5. Enuncia le proposizioni contronominale, inversa e contraria della seguente proposizione e di ognuna di esse di' se si tratta di un teorema o no:

«se un'equazione algebrica di 2° grado con coefficienti reali
ha il discriminante positivo allora ammette radici reali. ».

88.2.4 Un'altra forma di ragionamento diretto di cui si fa largo uso nelle dimostrazioni matematiche è quella basata sul **principio d'induzione**. È un tipo di ragionamento che è usato quando si devono dimostrare proprietà dei numeri naturali. Ne abbiamo parlato diffusamente in passato [3] e non riteniamo necessario ritornarci su.

88.3 IL RAGIONAMENTO PER ASSURDO

88.3.1 A volte, la dimostrazione di un teorema non può essere condotta mediante un ragionamento diretto. In altri termini, dalla verità dell'ipotesi I non si riesce a desumere direttamente quella della tesi T.
Si segue, allora, un *ragionamento indiretto*. Anche di questo potresti aver trattato nei tuoi studi precedenti. Ad ogni buon conto riproponiamo i termini della questione.

Un **ragionamento indiretto** si articola nel modo seguente:

Si ammette che sia vera la negazione della tesi, cioè si ammette che sia vera la proposizione $\overline{T}$. Sulla base di questa ammissione (e di eventuali altre ipotesi implicite) si sviluppa il ragionamento deduttivo fino a giungere alla dimostrazione della verità della negazione $\overline{I}$ dell'ipotesi (a volte, della negazione di una delle ipotesi implicite), cioè alla dimostrazione della falsità di I.
Ora, però, se c'è una cosa di cui siamo sicuri, questa è la verità dell'ipotesi I. Avere dimostrato, invece, che I è falsa significa che dovrebbe essere vera la congiunzione $I \wedge \overline{I}$. Ma questa proposizione è sicuramente falsa, perciò da qualche parte il ragionamento precedente fa acqua, è in difetto.
Esaminandolo con attenzione, ci si rende conto che l'unico punto di crisi è costituito dall'avere ammesso la verità della proposizione $\overline{T}$. Dobbiamo concludere che ciò non può essere, per cui $\overline{T}$ è falsa e, di conseguenza, è vera T. Così termina il ragionamento indiretto.

Questo metodo di dimostrazione, che si conclude per l'appunto con la constatazione di una contraddizione che non può evidentemente sussistere, si chiama **ragionamento per assurdo**.

88.3.2 Ci siamo serviti del ragionamento per assurdo più volte in passato.

Ti invitiamo a riprendere qualcuno dei teoremi che già hai avuto modo di incontrare nel corso dei tuoi studi, più o meno recenti, e di cui si può fornire una dimostrazione per assurdo.
Ricostruisci tale dimostrazione, dopo aver individuato l'ipotesi e la tesi nell'enunciato dei vari teoremi. Per tua comodità ti suggeriamo alcuni di tali teoremi:

- Non esiste alcun numero razionale il cui quadrato è 2.
- Nessuna frazione dà luogo ad un numero decimale periodico con periodo 9.
- Dato un triangolo rettangolo, la semicirconferenza avente per diametro l'ipotenusa del triangolo e situata dalla stessa parte del vertice dell'angolo retto è circoscritta al triangolo.
- Se due rette distinte, assegnate nello spazio, sono parallele ad una terza retta allora sono parallele fra loro.

[3] Cfr.: Unità 39: Il principio d'induzione.

88.4 LA DEDUZIONE LOGICA

88.4.1 Abbiamo detto più volte che l'argomentazione in base alla quale è dimostrato un teorema è condotta attraverso una catena di deduzioni che formano il *ragionamento deduttivo*. Ciascuna delle deduzioni che compongono ogni ragionamento è basata su certe regole, dette **regole di deduzione** (o **di inferenza**). Ci occupiamo di due di queste regole di deduzione, le più conosciute.

- Una regola di deduzione si ottiene allorché si considerino come premesse le proposizioni:

$$A \rightarrow B \quad \text{ed} \quad A.$$

La tavola di verità del condizionale (Tab. 1) mostra che, ogni volta che $A \rightarrow B$ ed A sono entrambe vere, pure B è vera.

A	B	A→B
V	**V**	**V**
V	F	F
F	V	V
F	F	V

TAB. 1

Lo schema di deduzione che evidenzia come, dalle premesse $A \rightarrow B$ ed A si deduca la verità di B, può essere disposto nel modo seguente:

$$\begin{array}{c} \mathbf{A \rightarrow B} \\ \mathbf{A} \\ \hline \mathbf{B} \end{array}$$

È noto col nome di ***modus ponens*** [4]. Ecco come si presenta nella seguente situazione particolare:

Se Pierino è messinese allora (Pierino) è siciliano
Pierino è messinese
————————————————
Pierino è siciliano

Oppure in quest'altra situazione:

Se un triangolo ha due lati congruenti allora ha due angoli congruenti
Il triangolo ABC ha due lati congruenti
————————————————
Il triangolo ABC ha due angoli congruenti

- In base alla regola del modus ponens, se sono vere le premesse $\overline{B} \rightarrow \overline{A}$ e $\overline{B}$, è anche vera la conclusione $\overline{A}$. D'altra parte si sa che $\overline{B} \rightarrow \overline{A} \equiv A \rightarrow B$. Per cui se sono vere le premesse $A \rightarrow B$ e $\overline{B}$ possiamo concludere che è vera $\overline{A}$. La situazione, del resto, è ben evidenziata dalla tabella 2, la quale mostra che, ogni volta che $A \rightarrow B$ e $\overline{B}$ sono proposizioni vere, pure $\overline{A}$ è vera.

[4] Letteralmente: *modo che afferma* (sottinteso: la verità di una proposizione).

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	A→B
V	V	F	F	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	V
F	F	**V**	**V**	**V**

TAB. 2

Lo schema di deduzione che rappresenta questa situazione può essere disposto nel modo seguente, conosciuto come ***modus tollens*** [5] :

$$\frac{\begin{array}{c}\mathbf{A\rightarrow B}\\ \overline{\mathbf{B}}\end{array}}{\overline{\mathbf{A}}}$$

Con riferimento al primo degli esempi precedenti:

Se Pierino è messinese allora (Pierino) è siciliano
Pierino non è siciliano
———————————————————————
Pierino non è messinese

Con riferimento al secondo esempio:

Se un triangolo ha due lati congruenti allora ha due angoli congruenti
Il triangolo ABC non ha due angoli congruenti
———————————————————————————————————
Il triangolo ABC non ha due lati congruenti

88.4.2 In realtà, nelle dimostrazioni matematiche (e non solo matematiche), le precedenti regole di inferenza quasi mai vengono applicate direttamente. Si ricorre, invece, ad un principio che è dimostrato (ma noi non lo facciamo) chiamando in causa anche il *modus ponens*.
Questo principio è il seguente:

PRINCIPIO DI DEDUZIONE:

Dalle premesse $A_1, A_2, \dots, A_n$ segue l'implicazione A→B
se e solo se
dalle premesse $A_1, A_2, \dots, A_n$, A segue la conclusione B

$A_1, A_2, \dots, A_n$, A, B sono chiaramente delle proposizioni.
È a tale principio che quasi sempre abbiamo fatto ricorso nelle nostre dimostrazioni.

88.4.3 A questo punto ci si può chiedere legittimamente perché siano presi in considerazione soltanto ragionamenti con <u>premesse tutte vere</u> e non siano presi invece in considerazione ragionamenti con <u>premesse non tutte vere</u>, cioè premesse tali che la loro congiunzione sia una proposizione falsa. Il fatto è che, se le premesse non fossero tutte vere (se, dunque, la loro congiunzione fosse una proposizione falsa), ogni conclusione sarebbe possibile, vera o falsa.

---

[5] Letteralmente: *modo che toglie* (la verità di una proposizione).

A titolo di esempio riprendiamo lo schema “modus ponens”, ma questa volta supponiamo che almeno una delle premesse A, A→B sia falsa. Sicché la proposizione “$A \wedge (A \to B)$” è falsa [6]. Ebbene, le ultime tre righe della tabella 1, che sono quelle nelle quali le due proposizioni A e A→B non sono entrambe vere, mostrano per l'appunto che B può essere vera (3ª riga) e può essere falsa (2ª e 4ª riga).
I seguenti esempi particolari servono a spiegare meglio la situazione:

1) Se 7 è divisibile per 4 allora 7 è divisibile per 2 (vera)
7 è divisibile per 4 (falsa)
————————————————————————————
7 è divisibile per 2 (falsa)

2) Se 12 è divisibile per 5 allora 12 è divisibile per 2 (vera)
12 è divisibile per 5 (falsa)
————————————————————————————
12 è divisibile per 2 (vera)

3) Se 12 è divisibile per 6 allora 12 è divisibile per 5 (falsa)
12 è divisibile per 6 (vera)
————————————————————————————
12 è divisibile per 5 (falsa)

Insomma un ragionamento con premesse non tutte vere è privo di ogni interesse dal momento che non garantisce il valore di verità della conclusione, la quale, per l'appunto, può essere vera e può essere falsa.
Questo, tuttavia, non comporta che qualunque ragionamento con premesse vere sia corretto.
A titolo di esempio consideriamo questo modello di ragionamento:

quando piove prendo l'ombrello
prendo l'ombrello
——————————————————
piove

Lo schema che lo generalizza è il seguente:

$$\frac{\begin{array}{c} A \to B \\ B \end{array}}{A}$$

Si spiega facilmente che non è corretto ragionare secondo questo schema. Infatti, ricorrendo ancora una volta alla tabella di verità del condizionale (Tab. 1), si può osservare che quando A→B e B sono vere (1ª e 3ª riga) non necessariamente è vera A. Precisamente: A è vera nella 1ª riga ed è falsa nella 3ª. Due esempi chiariscono meglio la situazione:

[6] Detto per inciso, per la struttura stessa del condizionale, le due premesse “A” e “A→B” non possono essere contemporaneamente false dal momento che se “A” è falsa, “A→B” è certamente vera.

1) Se 12 è divisibile per 6 allora 12 è divisibile per 4 (vera)
12 è divisibile per 4 (vera)
————————————————————————————
12 è divisibile per 6 (vera)

2) Se 12 è divisibile per 5 allora 12 è divisibile per 4 (vera)
12 è divisibile per 4 (vera)
————————————————————————————
12 è divisibile per 5 (falsa)

88.4.5 La validità dei ragionamenti ai quali abbiamo fin qui accennato è stata spiegata col ricorso alle tabelle di verità. La validità di un ragionamento, tuttavia, può essere stabilita in altro modo. In particolare ricorrendo, quand'è possibile, ad opportuni diagrammi di Eulero-Venn.
Per esempio, consideriamo il seguente ragionamento:

Premesse: *Tutti i rettangoli sono parallelogrammi*
il quadrilatero ABCD è un parallelogramma.
Conclusione: *il quadrilatero ABCD è un rettangolo.*

Evidentemente si tratta di un ragionamento non corretto poiché il quadrilatero ABCD, pur essendo un parallelogramma, non è necessariamente un rettangolo: può esserlo e può non esserlo.
La cosa è ben evidenziata da un diagramma di Eulero-Venn (Fig. 1): si vede, in questo diagramma, che l'insieme R dei rettangoli è strettamente incluso nell'insieme P dei parallelogrammi. Ora, il quadrilatero ABCD può essere effettivamente un rettangolo (è rappresentato dal pallino x), ma può essere un parallelogramma generico (è rappresentato dal pallino y).

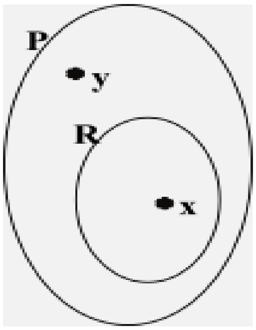

FIG. 1

Ti proponiamo per esercizio di verificare, con l'uso dei diagrammi di Eulero-Venn, se sono validi i ragionamenti che si ottengono generalizzando le seguenti situazioni particolari:

1) Premesse: *Tutti i numeri interi sono reali;*
4 è un numero intero.
Conclusione: *4 è un numero reale.*

2) Premesse: *Tutti gli uomini sono mortali;*
Socrate è un uomo.
Conclusione: *Socrate è mortale.*

VERIFICHE [7]

1. In ciascuno dei seguenti teoremi individuare l'ipotesi e la tesi:
- In ogni triangolo isoscele gli angoli alla base sono congruenti.
- Una frazione irriducibile si può trasformare in un numero decimale finito se il suo denominatore, scomposto in fattori primi, non contiene fattori diversi da 2 e da 5.
- Se p_1 e p_2 sono le probabilità di due eventi allora $p_1p_2<p_1$.
- Ogni equazione del tipo y = ax+b è rappresentata da una retta in un piano cartesiano (Oxy).
- Ogni equazione di 2° grado con discriminante negativo non ha radici reali.
- Ogni traslazione piana è un'isometria piana.
- In ogni quadrilatero inscritto in un cerchio la somma di due angoli opposti è uguale a quella degli altri due.
- Ogni funzione reale di variabile reale, continua in un intervallo chiuso e limitato, è integrabile in quell'intervallo.

2. Con riferimento a ciascuno dei teoremi precedenti dire se l'ipotesi è condizione solo sufficiente oppure se è necessaria e sufficiente per la tesi e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

3. Dopo aver messo ciascuna delle seguenti proposizioni sotto forma di implicazione (*se … allora*), formulare dell'implicazione ottenuta la contronominale, l'inversa e la contraria e, di ognuna delle quattro proposizioni correlate, determinare il rispettivo valore di verità:
- Un numero naturale è pari se il suo successivo è dispari.
- Il numero naturale a^2 è pari se anche il numero naturale a lo è.
- Un quadrato è un quadrilatero con i quattro lati congruenti.
- Un triangolo ha due angoli congruenti se ha due lati congruenti.
- Un quadrilatero con le diagonali perpendicolari è un rombo.
- Se due numeri naturali sono primi tra loro anche i loro successivi sono primi fra loro.
- Se due rette, tagliate da una trasversale, formano angoli alterni interni congruenti, sono parallele.
- Ogni funzione reale di variabile reale derivabile in un punto è continua in quel punto.
- Ogni funzione reale di variabile reale, continua in un intervallo chiuso e limitato, è integrabile in quell'intervallo.

4. Di ciascuno dei seguenti schemi di ragionamento dire se è uno schema valido:

$$\frac{\begin{array}{c}A\\B\end{array}}{A\wedge B}\qquad\qquad \frac{\begin{array}{c}A\\B\end{array}}{A\vee B}\qquad\qquad \frac{\begin{array}{c}A\wedge B\\\overline{A}\end{array}}{\overline{B}}\qquad\qquad \frac{\begin{array}{c}A\vee B\\\overline{A}\end{array}}{\overline{B}}$$

5. Stabilire se è corretto o no ragionare secondo lo schema implicito nel seguente ragionamento:

a) Premesse: *Tutti i numeri divisibili per 6 sono pari;*
7 non è pari.
Conclusione: *7 non è divisibile per 6.*

---

[7] I problemi (o gli esercizi) contrassegnati col simbolo ® sono risolti (totalmente o parzialmente) e la risoluzione è situata nella cartella "Integrazione 2", file "Matematica – Integrazione 2, unità 28-88", pubblicata in questo medesimo sito e scaricabile gratuitamente.

b) Premesse: *Il quadrilatero Q è un quadrato o un trapezio;*
Il quadrilatero Q non è un trapezio.
Conclusione: *Il quadrilatero Q è un quadrato.*

c) Premesse: *Se un numero naturale è maggiore di 1 allora è primo o composto;*
Il numero naturale a, maggiore di 1, non è primo.
Conclusione: *Il numero naturale a è composto.*

d) Premesse: *Tutti gli uomini sono mortali;*
Alcuni uomini sono Greci.
Conclusione: *Alcuni Greci sono mortali.*

e) Premesse: *Tutti gli uomini pensano;*
Socrate pensa.
Conclusione: *Socrate è un uomo.*

f) Premesse: *Tutti gli uomini sono mortali;*
Alcuni mortali sono Greci.
Conclusione: *Alcuni Greci sono uomini.*

6. Di un insieme di numeri si sa che:
1) se non c'è il numero 1 non c'è neppure il numero 2;
2) se non c'è 2 non c'è 3;
3) ci sono due numeri distinti assieme alla loro somma ed al loro prodotto.
L'insieme è il seguente:
[A] $\{2,3,4,5\}$; [B] $\{1,2,4,6\}$; [C] $\{1,3,4,5\}$; [D] nessuno di essi.
Una sola alternativa è corretta: individuarla e spiegare la scelta operata.

7. ® Giorgio acquista alcuni prodotti al supermercato, per una spesa totale di € 50. Paga con tre banconote del valore complessivo di € 50. Tra le banconote non ce n'è una da € 20. Qual è il valore delle singole banconote?

8. ® Il sig. Logicus giunge nel pianeta VerFal. Le sole categorie di persone che lo abitano sono i Furfanti ed i Cavalieri. I Furfanti fanno solo affermazioni false, i Cavalieri solo affermazioni vere. Logicus s'imbatte in tre persone – Aldo, Giovanni e Giacomo – e decide di porre qualche domanda a Giovanni, nella speranza di riuscire ad individuare un cavaliere fra i tre.
Logicus: «*Aldo e Giacomo sono entrambi cavalieri?*»
Giovanni: «*Sì, lo sono.*»
Logicus: «*Dunque confermi che Aldo è un cavaliere?*»
Giovanni: «*No, non lo è.*»
A questo punto Logicus, che non per niente si chiama così, ha capito tutto.
Hai capito anche tu? Ti mettiamo alla prova. Una ed una soltanto delle seguenti alternative è corretta. Individuala e fornisci una spiegazione esauriente della risposta.
[A] Aldo e Giacomo sono entrambi furfanti.
[B] Aldo e Giacomo sono entrambi cavalieri.
[C] Aldo è un furfante ma Giacomo è un cavaliere.
[D] Aldo è un cavaliere ma Giacomo è un furfante.

9. ® Il sig. Logicus, continuando il suo viaggio nel pianeta VerFal (vedi es. n. 8), incontra Piero, Giulio, Vito e Antonio, i quali, a conoscenza del fatto che Logicus ha il vizio di porre domande, senza essere interpellati lo bombardano ugualmente di parole.

Piero: «*Giulio e Antonio sono furfanti.*»
Giulio: «*Vito è un cavaliere.*»
Vito: «*Antonio è un furfante.*»
Antonio: «*Piero è un cavaliere.*»

Quale delle seguenti alternative è corretta?

[A] Giulio e Vito sono entrambi furfanti.
[B] Giulio e Vito sono entrambi cavalieri.
[C] Giulio è un furfante ma Vito è un cavaliere.
[D] Giulio è un cavaliere ma Vito è un furfante.

10. Nel pianeta VerFal (vedi es. n. 8) tutti i suoi abitanti possono pronunciare la frase "*Sono un Cavaliere*" mentre nessuno dei suoi abitanti osa proferire la frase "*Sono un Furfante*". È vero o è falso?

11. Il sig. Logicus, girando per il pianeta VerFal (vedi es. n. 8), incontra Luca, Michele, Gianni e Pasquale, tutti abitanti del pianeta. Ha potuto accertare che tre di essi sono Cavalieri ed uno è Furfante, ma non ha appurato ancora chi è quest'ultimo. Pone allora alcune domande ai quattro e ottiene le seguenti risposte:
Luca: «*Gianni e Pasquale sono Cavalieri*»
Michele: «*Pasquale è un Cavaliere ma Gianni e un Furfante*»
Gianni: «*Michele è un Furfante*»
Pasquale: «*Luca è un Cavaliere*»
Logicus ha capito tutto. Chi è il Furfante?

12. Al sig. Logicus, durante la sua esplorazione del pianeta VerFal (vedi es. n. 8), si presentano 4 abitanti del pianeta, che per comodità chiamiamo A, B, C, D. Logicus si propone di individuare chi tra loro è un Cavaliere e che un Furfante. Pone al riguardo delle domande mirate e ne ottiene le risposte qui appresso registrate:
A: «*B è un Cavaliere ma C è un Furfante*»
B: «*C e D sono entrambi furfanti*»
C: «*A e D sono entrambi cavalieri*»
D: «*A è un Cavaliere ma B è un Furfante*»
Logicus riesce ad individuare chi è Cavaliere e chi è Furfante. Qual è la soluzione?

13. Il sig. Logicus, continuando la sua esplorazione del pianeta VerFal (vedi es. n. 8), incontra 8 abitanti del pianeta. Gli è stato spiegato che almeno una di tali persone è un Furfante, mentre, scelte a caso due persone, almeno una è un Cavaliere. Logicus conclude subito che in realtà una ed una sola delle 8 persone è un Furfante. Quale ragionamento lo ha condotto a questa conclusione?

14. ESERCIZIO RISOLTO. Il sig. Logicus, nel suo girovagare per il pianeta VerFal (vedi es. n. 8), s'imbatte in due personaggi a dir poco folcloristici: uno basso, grasso e bruno; l'altro alto, magro e biondo. Ma soprattutto uno è un Cavaliere, l'altro un Furfante. Logicus però, pur sapendo tutte queste cose, non sa chi è il Cavaliere e chi il Furfante. E vorrebbe invece scoprirlo. Dopo breve meditazione trova la soluzione al suo enigma; basta una particolare domanda, rivolta ad uno dei due personaggi e, in base alla risposta, capire chi è il Cavaliere e chi il Furfante. Qual è la domanda? In base a quale risposta Logicus capisce?
RISOLUZIONE. La domanda, posta al personaggio che per comodità indichiamo con A, non può essere certamente: «Sei un Cavaliere?». Ne riceverebbe la medesima risposta «Sì» tanto che A sia Cavaliere quanto che sia Furfante.
In realtà, di domande ce ne sono diverse ed una, rivolta per esempio ad A, potrebbe essere la seguente:

«Io sostengo che B sia un Cavaliere. Se ne chiedo conferma allo stesso B, cosa mi risponde che "è vero" o che "è falso"?».
Se A risponde "è vero" allora è un Cavaliere; se risponde "è falso" allora è un Furfante.
Dare ampia spiegazione di ciò.

15. In un concorso per il reclutamento dei docenti, tra i quesiti segnalati dal Ministero vi era anche il seguente:
Se tutti i boiardi sono polemici e nessun campanaro è polemico, si può logicamente concludere che:
a) *Nessun campanaro è un boiardo* b) *Alcuni boiardi sono polemici*
c) *Alcuni boiardi sono campanari* d) *Tutti i campanari sono boiardi*
Il Ministero segnalava l'alternativa a) come unica risposta corretta.
Spiega in maniera esauriente perché la segnalazione del Ministero è errata.

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

DOMANDE.

1 È vero che la proposizione contronominale di un teorema è ancora un teorema?
2 È vero che la proposizione inversa di un teorema è ancora un teorema?
3 Sia la seguente proposizione:
Se a è un numero intero uguale ad 1 allora il quadrato di a è 1.
Si può dire che essa esprime un teorema? Qual è l'ipotesi? Quale la tesi? La proposizione inversa è un teorema?
4 È vero che il ragionamento per assurdo è basato sulla negazione dell'ipotesi del teorema che si vuole dimostrare?
5 Dire se è valida la seguente figura di ragionamento, dove A e B sono proposizioni qualsiasi:

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ \hline A \wedge B \end{array}$$

6 Dire se è valida la seguente figura di ragionamento, dove A e B sono proposizioni qualsiasi:

$$\begin{array}{c} A \rightarrow B \\ B \\ \hline A \end{array}$$

7 Dire se è valida la seguente figura di ragionamento, dove A e B sono proposizioni qualsiasi:

$$\begin{array}{c} A \vee B \\ \overline{A} \\ \hline B \end{array}$$

8 Dire se è corretto ragionare secondo lo schema che generalizza la seguente figura:

Se una funzione è razionale allora è algebrica
La funzione sin x non è algebrica
———————————————
La funzione sin x non è razionale.

9 Dire se è corretto ragionare secondo lo schema che generalizza la seguente figura:

Tutti gli uomini sono mortali
Tutti gli italiani sono mortali
———————————
Qualche italiano è un uomo.

10 Dire se è corretto ragionare secondo lo schema che generalizza la seguente figura:

Se la mia prova è giudicata almeno sufficiente ottengo almeno 10 punti su 15
Ottengo 10 punti su 15
———————————————————————————
La mia prova è giudicata almeno sufficiente.

11 Perché non c'è interesse a prendere in considerazione ragionamenti con premesse non tutte vere?

RISPOSTE.

1. È vero. Se, infatti, il teorema è espresso dall'implicazione vera $A \rightarrow B$, constatato che la contronominale di questa proposizione, vale a dire $\overline{B} \rightarrow \overline{A}$, è equivalente all'implicazione considerata, anche questa implicazione è vera e, perciò, esprime un teorema.
2. No. O, almeno, non sempre: può esserlo e può non esserlo. Ad esempio, se il teorema è questo:

   Ogni triangolo isoscele ha due angoli congruenti,

   la proposizione inversa, vale a dire:

   Ogni triangolo avente due angoli congruenti è isoscele

   è essa pure un teorema.
   Se, però, il teorema è quest'altro:

   Il prodotto di due numeri entrambi pari è pari,

   la proposizione inversa, vale a dire:

   Se il prodotto di due numeri è pari allora i due numeri sono entrambi pari

   non è vera e perciò non è un teorema.
3. La proposizione assegnata è un teorema, in cui l'ipotesi è "a è un numero intero tale che $a=1$" e la tesi è "a^2 è uguale ad 1". La proposizione inversa è: "Se a è un numero intero tale che $a^2=1$ allora $a=1$" ed è falsa poiché a può essere 1 ma anche -1. Essa, perciò, non è un teorema.
4. No. La verità dell'ipotesi è incontestabile. Il ragionamento per assurdo, al contrario, è basato sulla negazione della tesi che si vuole dimostrare.
5. La figura di ragionamento è valida poiché ogni volta che A e B sono vere anche $A \wedge B$ è vera.
6. La figura di ragionamento non è valida poiché ogni volta che $A \rightarrow B$ e B sono vere non necessariamente anche A è vera: infatti A può essere vera ma può essere falsa.
7. La figura di ragionamento è valida poiché, ogni volta che la proposizione $A \vee B$ è vera e la proposizione A è falsa (è, infatti, vera $\overline{A}$), allora deve essere vera B, vale a dire la conclusione dello schema considerato.
8. Lo schema di ragionamento è corretto: si tratta della figura denominata "modus tollens".
9. No, il ragionamento non è corretto. Infatti, generalizzandolo, sapere che gli insiemi U ed I sono contenuti nell'insieme M non implica necessariamente che U ed I abbiano elementi in comune: potrebbero essere benissimo disgiunti. La cosa può essere resa evidente con un diagramma di Eulero-Venn.
10. No, il ragionamento non è corretto. Infatti generalizzandolo, si ottiene la stessa figura proposta nella domanda 6, che era stata considerata una figura di ragionamento non valida.
11. Perché non sono in grado di discriminare il valore di verità della conclusione che può essere vera e può essere falsa.

COMPLEMENTI: IL SUDOKU

Un interessante esercizio di logica è costituito dal completamento dello schema di un **SUDOKU**. Pensiamo che tutti sappiano di cosa si tratti, ma ad ogni buon conto ne forniamo ugualmente la spiegazione.
Il sudoku più usuale consiste in un quadrato formato da 9×9 caselle suddivise in 9 riquadri 3×3 (Figg. 2-3-4-5). In ciascuna casella va inserita una delle cifre da 1 a 9, con la condizione che ciascuna riga, ciascuna colonna ed ogni riquadro contenga una sola volta tutte le cifre da 1 a 9. In realtà alcune caselle sono già occupate da tali cifre. Il gioco consiste nel completare lo schema.
Il completamento degli schemi 2-3 non dovrebbe comportare eccessive difficoltà. Ma altri schemi (4-5) potrebbero non essere altrettanto semplici.
A volte è sufficiente un procedimento diretto per completare lo schema o almeno parti di esso, altre volte bisogna ricorrere ad un procedimento che possiamo definire "per assurdo", nel senso che – posto di sapere che in una casella ci va una di due determinate cifre, mettiamo 4 o 7 – si prova con una di esse, per esempio 4, e si va avanti. Se si è fortunati si può giungere a completare lo schema. Ma se si perviene ad una situazione contraddittoria (nel senso che in una riga o colonna o riquadro una certa cifra compare due volte) allora la cifra collocata nella casella prescelta (vale a dire 4) non va bene. Di conseguenza va bene l'altra cifra, cioè 7. Di nuovo si procede.
Prova a completare i seguenti schemi incompleti.

3		9	8	7				
6			9			1	7	
4						8		
		6		5				8
	2		1		6		3	
9				2		6		
7		4			9			2
	9	3			5			6
				4	7	5		

FIG. 2

7							4	
	1							2
			5	6	1			
	3	1					7	
			2	9	7			
						6		8
	8					5	3	
6		9						
			6	7	4			

FIG. 3

		2	6			9		7
9		1	5	7		4		
5	7		9		3			
8		6			7		4	9
		3						
1						7		3
6				9	4		2	1
		9	3	8				
	3	7			5	8		

FIG. 4

			3		6			
1				9		4	3	
	2	5		7				9
			6				9	
	1				9			5
9	8		2			6	1	
	3	1			5		8	6
	7				3			
5			7				2	

FIG. 5